This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

LSoc 1726.9

Bd. Dec. 1886.

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.

CHRISTO ET ECCLESIAE

BOUGHT WITH

THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

11 April, 1884 –
14 Sept. 1885.

APR 11 1884

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1883. – 85

35 – 37

MIT EINER TAFEL.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1884.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

10-1-407

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

FÜNFUNDDREISSIGSTER BAND.

1883.

MIT EINER TAFEL.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

~~48.235~~
LSoc 1726.9

INHALT.

Seite

F. Klein, Über gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung 1

W. Weber, Über Construction des Bohnenberger'schen Reversionspendels, zur Bestimmung der Pendellänge für eine bestimmte Schwingungsdauer im Verhältniss zu einem gegebenen Längenmaass 7

C. Neumann, Über die von G. Cantor und P. du Bois-Reymond über trigonometrische Reihen aufgestellten Sätze, etc. . . . 18

W. Hankel, Neue Beobachtungen über die Thermo- und Aktinoelektricität des Bergkrystalles, als Erwiederung auf einen Aufsatz der Herren C. Friedel und J. Curie 35

W. Dyck, Vorläufige Mittheilungen über die durch Gruppen linearer Transformationen gegebenen regulären Gebietseintheilungen des Raumes. Mit 1 Tafel 61

W. Braune, Über die Intercostalvenen des menschlichen Körpers 76

C. Neumann, Über eine neue und einfache Methode zur Untersuchung der Stetigkeit, respective Unstetigkeit mehrdeutiger Functionen 85

C. Neumann, Über das Verschwinden der Thetafunctionen . . 99

W. Hankel, Über die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten 123

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Friedrich Zarncke* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.
– Professor *Adolf Ebert* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
– Geheimer Hofrath *Georg Curtius* in Leipzig.
– Professor *Georg Ebers* in Leipzig.
– —— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
– Geheimer Hofrath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig.
– Professor *Gustav Hartenstein* in Jena.
– Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Herr Geheimer Hofrath und Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Ludwig Lange* in Leipzig.
- Professor *August Leskien* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- —— —— *Otto Ribbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Anton Springer* in Leipzig.
- —— —— *Johann Ernst Otto Stobbe* in Leipzig.
- Professor *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.
- —— *Ernst Windisch* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
- —— *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Carl Friedrich Wilhelm Ludwig* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Christian Wilhelm Braune* in Leipzig.

Herr Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
- Professor *Wilhelm His* in Leipzig.
- —— *Felix Klein* in Leipzig.
- —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Hermann Kolbe* in Leipzig.
- —— —— *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- Professor *Carl Neumann* in Leipzig.
- —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- —— —— *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- —— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
- Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
- Professor *Adalbert Krüger* in Kiel.
- Regierungsrath *Samuel Friedrich Nathanael v. Stein* in Prag.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1883 eingegangenen Schriften.

Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1882. Berlin 1883.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1882, No. 39—54. 1883, No. 1—37.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 9. 10. Berlin 1882. 83.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 100 (1882), Heft 1. 2. Bd. 101 (1882), Heft 1. Wien 1882.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 85 (1882), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 3—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 86 (1882), Abth. II, Heft 1. Abth. III, Heft 1. 2. Wien 1882. — Register zu den Bänden 81—85 (X). Wien 1882.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 1882, No. 23—28. Jahrg. 1883, No. 1—25.

Almanach d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. 1882. Jahrg. 32. Wien 1882.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. v. der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 64, 1. Hälfte. Wien 1882.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrgang 1882, No. 12—18. Jahrg. 1883, No. 1—9.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1882, Bd. 32, No. 4. Jahrg. 1883, Bd. 33, No. 1—3. Wien 1882. 83.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1882. Bd. 25 (N. F. Bd. 15). Wien 1882.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1882. Bd. 32. Wien 1883.

Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 6. Folge. Bd. 11, vom J. 1881 und 1882. Prag 1882.

Jahresbericht der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, ausgegeben am 17. Juni 1881. Prag d. J.

Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrg. 1881. Prag 1882.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1882. Jahrg. 43. Hrsg. von C. Hornstein. Prag 1883.

Personalstand der k. k. Deutschen Karl-Ferdinands-Universität zu Prag zu Anfang d. Studienj. 1883/84. Prag 1883.

Zwanzigster Jahresbericht des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Für das Vereinsjahr 1881—82. Prag 1882.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 21, No. 1—4. Prag 1882. 83. — Lohr, O., Register zu Bd. 1—20 der Mittheilungen. Prag 1882.

Mitglieder-Verzeichniss des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. 1882.

Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft. Im Auftrag des Vereines »Lotos« hrsg. von Ph. Knoll. N. F. Bd. 3 und 4 (der ganzen Reihe 31. u. 32. Bd.). Prag 1883.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Hrsg. von dem historischen Vereine für Steiermark. Jahrg. 19. Graz 1883.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. H. 31. Graz 1883.

Krones Ritter von Marchland, Festrede aus Anlass der 600jähr. Habsburg-Feier der Steiermark gehalten in der Festversammlung d. histor. Vereines am 30. Juni 1883. Graz d. J.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. Godina 5, Br. 1—4. U Zagrebu 1883.

Personalstand u. Ordnung d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Winter-Sem. 1883/84.

Erdélyi Muzeum. Az Erd. Muzeum egylet tört. szakosztályának közlönye. Szerkesti Finály Henr. IX. évfolyam (1882), sz. 9. 10. Kolozsvárt d. J.

Abhandlungen der histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 16 (in d. Reihe d. Denkschr. der LVII. Bd.), Abth. 2. 3. Bd. 17 (in d. Reihe d. Denkschr. d. LVIII. Bd.), Abth. 1. München 1882. 83.

Abhandlungen der mathem.-physik. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 14 (in d. Reihe d. Denkschr. d. L. Bd.), Abth. 2. München 1883.

Abhandlungen der philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 16 (in d. Reihe d. Denkschr. d. LV. Bd.), Abth. 3. München 1882.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1882, H. 5. Jahrg. 1883, H. 1. 2. München 1882. 83.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München. Jahrg. 1882, Bd. 2, H. 2. 3. Jahrg. 1883, H. 1—3. München 1882. 83.

Kuhn, E., Ueber Herkunft u. Sprache d. transgangetischen Völker. Festrede z. Vorfeier des Allerh. Geburts- u. Namensfestes S. M. Ludwigs II. Königs von Bayern gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wiss. am 25. Juli 1881. München 1883.

Stieve, Fel., Churfürst Maximilian I. von Bayern. Festrede z. Vorfeier des Allerh. Geburts- u. Namensfestes S. M. Ludwigs II. Königs v. Bayern

gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wiss. am 29. Juli 1882. München 1882.

Wölfflin, Edu., Gedächtnissrede auf Karl v. Halm, gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wiss. zur Feier ihres 124. Stiftungstages am 28. März 1883. München 1883.

Vierundzwanzigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1883.

Die historische Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. 1858—1883. Eine Denkschrift. München 1883.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte bei München. Jahrg. 1882. München 1883.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 29, aus d. J. 1882. Göttingen 1882.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1882. Göttingen d. J.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 58. Bd. 59, H. 1. Görlitz 1882. 83.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 28 (1882), H. 1—4. Jahrg. 29 (1883), H. 1. 2. Dresden 1883.

Jahrbuch des k. sächsischen meteorologischen Institutes. 1883, Lief. 1. Leipzig 1883.

Dekadenbericht des k. sächsischen meteorologischen Institutes. 1883, No. 24—31.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 18, H. 1—3. Leipzig 1883.

Auwers, A., Mittlere Oerter von 83 südlichen Sternen für 1875.0 zur Fortsetzung d. Fundamental-Catalogs f. d. Zonen-Beobachtungen d. astronom. Gesellschaft. Publication d. astronom. Gesellsch. XVII. Leipzig 1883.

Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Jahrg. IX (1882). Leipzig 1883.

Codex diplomaticus Saxoniae Regiae. Im Auftrag der kgl. Sächs. Staatsregierung herausg. von O. Posse und H. Ermisch. II. Haupttheil, Bd. 7 (Urkundenbuch der Städte Kamenz und Löbau, herausg. von H. Knothe. Bd. 12 (Urkundenbuch d. Stadt Freiberg in Sachsen, herausg. von H. Ermisch. Bd. 1). Leipzig 1883.

Kgl. Sächsisches Polytechnikum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr 1882/83, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1883. — Programm f. d. Studienjahr, bezieh. Wintersem. 1883/84. — Regulativ für die Diplomprüfungen am K. Polytechnikum. Dresden 1883.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1882—83. Dresden 1883.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Herausg. v. C. Bley. Jahrg. 1882, Juli—Dec. Jahrg. 1883, Jan.—Juni. Dresden 1883.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1882 — Juli 1883. Meissen 1883.

Bericht über die im Jahr 1882 den Herzogl. Sammlungen zugegangenen Geschenke. Gotha 1883.

Pertsch, Wilh., Die arabischen Handschriften der Herzogl. Bibliothek zu Gotha. Auf Befehl S. H. des Herzogs Ernst II. von Sachsen-Coburg-Gotha verzeichnet. Bd. 4, H. 2. Gotha 1883.

Zuwachs der Grossherzogl. Bibliothek zu Weimar in d. Jahren 1881 u. 1882. Weimar 1883.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XV, No. 18. 19. Jahrg. XVI, No. 1—17. Berlin 1882. 83.

Furtwängler, A., Der Goldfund von Vettersfelde. 43. Programm zum Winckelmannsfeste der Archaeologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1883.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 3. Potsdam 1883.

Sechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1882. Breslau 1883.

Nova Acta Academiae Carolinae Leopoldinae Caesareae German. naturae curiosorum. T. 44. Halis 1883.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais. leopoldinisch-carolinisch-deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XVIII, No. 23. 24. Heft XIX, No. 1—20. Halle 1883.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. 15, H. 2—4. Bd. 16, H. 1. Halle 1881—83.

Bericht über die Sitzungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle im J. 1880. 1881. 1882.

Zeitschrift f. d. gesammten Naturwissenschaften, redig. von C. G. Giebel. Dritte Folge. 1881. Bd. 6 (der ganzen Reihe 54. Bd.). Berlin 1881. — Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 4. Folge (Fortsetzung d. Zeitschrift f. d. gesammten Naturwiss.), Bd. 1, 1882 (d. ganzen Reihe 55. Bd.). Bd. 2, 1883 (d. ganzen Reihe 56. Bd.), H. 1—4. Berlin u. Halle 1882. 83.

Schriften der Universität zu Kiel aus d. J. 1881/82. Bd. 28. Kiel 1882. — Chronik d. Universität Kiel 1882; Verzeichniss d. Vorles., Winter 1882/83, Sommer 1883; Personalverz. Sommer 1882, Wint. 1882/83. Blass, De Gemino et Posidonio. Ders., Einiges a. d. Geschichte d. Astronomie im Alterthum. 17 Inaug.-Dissertationen.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1882, Heft 1—9. Berlin 1883.

Vierter Bericht der Commission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel, für die Jahre 1877—81. Jahrg. VII—XI. Abth. 2. Berlin 1883.

Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 23 (1882), Abth. 1. 2. Königsberg 1882. 83.

Beiträge zur Naturkunde Preussens. Hrsg. von der K. physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. 1—5. Königsberg 1868—82.

31. u. 32. Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover f. d. Geschäftsjahre 1880—82. Hannover 1883.

Jahresbericht des physikal. Vereins zu Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1881—1882. Frankfurt a. M. 1883.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 73—75. Bonn 1882. 83.

10. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins für Wissenschaft u. Kunst pro 1881. 11. Jahresbericht pro 1882. Münster 1882. 83.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 14 (Nov. 1881—Aug. 1882). Erlangen 1882.

Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1882. Nürnberg 1883.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums. N. F. Jahrg. 29. Nürnberg 1882. — 28. Jahresbericht des Germanischen Nationalmuseums.]

Festschrift zur dritten Säcularfeier der Alma Julia Maximiliana gewidmet von der Medicinischen Facultät Würzburg. Bd. 1. 2. Leipzig 1882.

Verzeichniss d. Vorlesungen welche an der K. Bayer. Julius-Maximilians-Universität zu Würzburg im Sommer-Sem. 1883 gehalten werden.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1882. Würzburg 1882.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. 17. Würzburg 1883.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Herausg. von d. Kgl. Statist.-topogr. Bureau. Jahrg. 5 (1882), H. 1—4. Stuttgart 1882.

21. und 22. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1882. 83.

22. und 23. Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins für Naturkunde in d. Vereinsjahren 1880—82. Offenbach 1883.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 3, H. 2. Heidelberg 1882.

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Linthal d. 11—13. Sept. 1882 (65. Jahresversammlung). Jahresbericht 1881/82. Glarus 1882.

Archives des sciences physiques et naturelles, Nov. 1882: Compte-rendu des travaux présentés à la 65. session de la Société Helvétique des sciences naturelles réunie à Linthal les 11—13. sept. 1882. Genève 1882.

Neue Denkschriften der allgemeinen Schweiz. Gesellschaft f. die gesammten Naturwissenschaften. Bd. 28, Abth. 3. Basel 1883.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1882. H. 1. 2 (No. 1030—1056). 1883, H. 1 (No. 1057—1063). Bern 1882. 83.

Elfter u. Zwölfter Jahresbericht der historisch-antiquarischen Gesellschaft von Graubünden. Jahrg. 1881. 1882. Chur d. J.

Jahresbericht d. naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrg. 26. Vereinsjahr 1881/82. Chur 1883.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. XXVIII, P. 1. Genève 1882—83.

Bulletin des travaux de la Société Murithienne du Valais. Années 1881 et 1882. Fasc. 11. Neuchatel 1883.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. Deel XV. Amsterdam 1883. — Afdeel. Natuurkunde. Deel XXII. Amsterdam 1883.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks, Deel 11. Amsterdam 1882. Afdeel. Natuurkunde. II. Reeks, Deel 17. Amsterdam 1882. — Naam- en zaakregister op de Versl. en Meded., Afd. Letterk., D. 1—12. Amsterdam 1882.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1881.

Processen-verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afdeel. Natuurkunde. Mei 1881—April 1882.

Esseiva, Petr., Tobiae junioris peregrinatio. Carmen praemio aureo ornatum in certamine poetico Hoeufftiano. Acced. duo carmina laudata. Amstelod. 1882.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging. Ser. II. Deel 4, St. 1. Nijmegen 1883.

Catalogus der bibliotheek van de Nederlandsche botanische Vereeniging. Nijmegen 1883.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1883.

Berigten van het Historisch Genootschap te Utrecht. Deel I, St. 1. 2. II, 1. III, 1. 2. V, 1. 2. VI (II. Ser., 1), 1. 2. VII, 1. 2. Utrecht 1846—63.

Kronijk van het Historisch Genootschap te Utrecht. Jaarg. 2 (1846)—5 (1849). 6—10 (= II. Serie). 11—15 (III. Ser., 1—5). 16—20 (IV. Ser., 1—5). 21—25 (V. Ser., 1—5). 26—31 (VI. Ser., 1—6). Utrecht 1846—76. — Register v. Jaarg. 1846—54, Deel 1. 2. Utrecht 1857.

Codex diplomaticus Neerlandicus. Uitgeg. door het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel I, Afl. 1. 2. II. Ser., Deel II, 1. 2. III, 1. 2. IV, 1. 2. V. VI. Utrecht 1848—63.

Register op de onderwerpen behandeld in de Kronijk, Berichten en den Codex diplomaticus, uitgeg. door het Historisch Genootschap te Utrecht. Utrecht 1877.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. S. 1—26. 27. 27b. 28—35. Utrecht 1864—83.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 1—6. Utrecht 1878—83.

Katalogus der boekerij van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. 3. uitgave. Utrecht 1872. — Supplement-Katalogus der derde uitgave. Utrecht 1882.

Geer, Jhr. Mr. B. J. L. de, De Strijd der Friezen en Franken. Eene voorlezing. Uitgeg. door het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Utrecht 1850.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. Uitg. door F. C. Donders en Th. W. Engelmann. 3. Reeks, VIII. Utrecht 1883.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 17, Livr. 3—5. T. 18, Livr. 1. Harlem 1882. 83.

Archives du Musée Teyler. Sér. II, P. 3. Harlem 1882.

Sande Bakhuyzen, H. G. v. d., Catalogus van de boeken aanwezig in de bibliotheek der Sterrenwacht te Leiden. Suppl. I: 1877—1. Jan. 1879. II: 1879—1. Juli 1882 (Bijvoegsel bij de Annalen der Sterrenwacht). 's Gravenhage 1881. 82.

Programme de la Société Batave de philosophie expérimentale de Rotterdam, 1882.

Recueil des mémoires et des travaux publiés par la Société Botanique du Grand-Duché de Luxembourg. No. 6—8. 1880—82. Luxembourg 1882.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1882 (Année XLVIII). 1883 (Année XLIX). Bruxelles d. J.

Bulletins de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 50 (1881), 3. Sér. T. 1. 2. Année 51 (1882), 3. Sér. T. 3. 4. Année 52 (1883), 3. Sér. T. 5. Bruxelles d. J. — Tables générales du recueil des Bulletins, II. Sér. T. 21—50 (1867—80). Bruxelles 1883.

Mémoires de l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 43, P. 2. T. 44. Bruxelles 1882.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. p. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in-8^{0}. T. 31. 33—35. Bruxelles 1881—83.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publ. p. l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 44. Bruxelles 1882.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 26. Bruxelles 1882.

Bullettino dell' Instituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1882, No. 11. 12 (und Elenco de' participanti alla fine dell' anno 1882). 1883, No. 1—11. Roma 1883.

Atti della R. Accademia de' Lincei. Anno CCLXXIV (1876—77), Ser. II, Vol. 8. Roma 1883. — Memorie della classe di scienze fisiche, matem. e naturali. Anno CCLXXIX (1881—82), Ser. III, Vol. 11—13. Roma 1882. — Transunti Ser. III. Vol. 7, Fasc. 1—15. Roma 1882. 83.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matem. e naturali. Vol. 14 (Ser. III, Vol. 5), Fasc. 3. Milano 1881.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 14. — Programma dei concorsi ai premj proposti 1882.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XVIII, Disp. 1—7. Torino 1882. 83.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II, T. 34. Torino 1883.

Bollettino meteorologico ed astronomico dell' Osservatorio della R. Università di Torino. Anno XVII (1882). Parte meteorologica. Torino 1883.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Vol. 6 (Scienze fisiche e matem., Vol. 3). Pisa 1883.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 3, adunanza del 1. Luglio 1883.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Ser. V. T. 7, Disp. 10. T. 8, Disp. 1—10. Ser. VI. T. 1, Disp. 1—3. Venezia 1880—83.

Rowland, Enr. A., Relazione critica sulle varie determinazioni dell' equivalente meccanico della caloria. Opera premiata dal R. Istituto Veneto e trad. dall' Inglese p. cura dello stesso Istituto (Appendice al T. 7 della V. Serie degli Atti). Venezia 1882.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. 21, P. 3. Venezia 1882.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. II. T. 1. Modena 1883.

Giornale di scienze naturali ed economiche, pubbl. p. cura della Società di scienze natur. ed econom. di Palermo. Anno 15 (1880—82). Vol. 15 (mit Bulletino meteorologico del R. Osservatorio di Palermo, Anno 16 (1880). Vol. 15). Palermo 1882.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1882. Vol. 173, P. 2—4. — For the year 1883. Vol. 174, P. 1. London 1882. 83. — The R. Society, 30th Nov. 1882 (List of the members).

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXXIV, No. 221—23. Vol. XXXV, No. 224—26. London 1882. 83.

Catalogue of the scientific books in the library of the R. Society. Part 2. General Catalogue. London 1883.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. IX, P. 4. 5 (No. 73. 74). Vol. X, P. 1 (No. 75). London 1881—83.

Royal Institution of Great Britain. List of the members 1882, with the report of the visitors for 1881. London 1882.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 13, No. 186—88. 193. 94. Vol. 14, No. 195—208. — List of members 9th Nov. 1882. London 1882.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. Vol. 2, P. 6. Vol. 3, P. 1—6. London 1882. 83.

Catalogue of the Greek coins in the British Museum. Thessaly to Aetolia. By Reg. Stuart Poole. London 1883. — The Ptolemies, kings of Egypt. By Reg. Stuart Poole. London 1883.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 4, P. 2—5. Cambridge 1881—83.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 13, P. 2. Cambridge 1882.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. II. Vol. 2 (Polite literature and antiquities), No. 4. Vol. 3 (Science), No. 9. 10. Dublin 1882. 83.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 27 (Polite literature and antiquities), P. 5. Vol. 28 (Science), P. 11—13. Dublin 1882. 83.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 3, P. 5. Dublin 1882.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Ser. II, Vol. 1, No. 15—19. Vol. 2, No. 2. Dublin 1882.

Journal of the R. Geological Society of Ireland. Vol. 16 (N. S. Vol. 6), P. 2. 1881—82. London 1882.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 21—44. Paris 1832—74. Cah. 50—52. Paris 1881. 82.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 10, No. 7. T. 11, No. 1—4. Paris 1882. 83.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1882. Paris 1883.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. II. Série. T. 4, Cah. 3. T. 5, Cah. 1. 2. Paris 1881. 82.

Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles de Cherbourg. T. 23 (III. Sér., T. 3). Paris et Cherbourg 1881.

Catalogue de la bibliothèque de la Société nationale des sciences naturelles de Cherbourg, réd. p. A. Le Jolis. P. I. 2 éd. Cherbourg 1881.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Nouv. Série. T. 29 (Année 1882). Lyon et Paris 1883.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. T. 7, Fasc. 1 (Année 1882). — Mémoires de la section des sciences. T. 10, Fasc. 2 (Année 1881). Montpellier 1882.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg). Sér. II. T. 6, Fasc. 14. Année 15 (1882). Paris 1883.

Discursos leidos ante la R. Academia de ciencias morales y políticas en la recepcion pública del Arzobispo de Sevilla Zefferino González 1883. Madrid 1883.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1883. Madrid d. J.

Estatutos y demas disposiciones legislativas para el regimen de la R. Acad. de ciencias morales y políticas. Madrid 1883.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Programa para los concursos ordinarios de 1884 y 1885.

Anales del Instituto y Observatorio de marina de San Fernando, publ. por C. Pujazon. Seccion II. Observaciones meteorológicas. Año 1882. San Fernando 1883.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1882, No. 3. 1883, No. 1. 2.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturvid. og mathemat. Afd. 6. Række. Bd. 2, No. 4. 5. Kjøbenhavn 1883.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Delen 21—27 (Ny Följd, D. 1—7). Stockholm 1857—76.

Antiquarisk Tidskrift för Sverige, utg. of Kongl. Vitterhets, Historie och Antiquitets Akademien genom Bror Emil Hildebrand. Delen 6, H. 3. 7, H. 1—3. Stockholm 1882. 83.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af Jac. Spångberg. Årg. 3 (1882), H. 4. Stockholm d. J.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 15 (1878—79), Afd. I. II. T. 16 (1879—80), Afd. I. II. T. 17 (1880—81), Afd. I. II. III. Lund 1878—81.

Lunds Universitets-Biblioteks Accessions-Katalog. 1879. 80. 81. Lund 1880—82.

Festskrift till Kgl. Universitetet i Köpenhamn vid dess 400 års jubileum i Juni 1879 från Kgl. Carolinska Universitetet i Lund. Lund 1879.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. XI, Fasc. 2. Upsaliae 1883.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 14 (1882). Upsal 1882—83.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. VIII. Zoologi. 1. Buccinidae, ved H. Friele. IX. Chemi. 1. Om søvandets faste bestanddele, af L. Schmelck. 2. Om havbundens afleiringer, af H. Schmelck. X. Meteorologi, af H. Mohn. Christiania 1882. 83.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 30, No. 9—11. T. 31, No. 1—8. St.-Pétersbourg 1882. 83.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXVIII, No. 3. 4. St.-Pétersbourg 1883.

Acta horti Petropolitani. T. VIII, Fasc. 1. St. Petersburg 1883.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1881, Th. 2. St. Petersburg 1882.

Annales de l'Observatoire de Moscou, publ. p. Th. Bredichin. Vol. IX, Livr. 1. 2. Moscou 1883.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. 57 (Année 1882), No. 2, Livr. 1. 2. No. 3. 4. T. 58 (Année 1883), No. 1. Moscou 1882. 83.

Meteorologische Beobachtungen ausgeführt am Meteorol. Observatorium d. Landwirthschaftlichen Academie zu Moskau von B. E. Bachmetieff (Beilage z. Bulletin de la Soc. Imp. des Natural. de Moscou, T. 57). 1882, 2. Hälfte (Beilage z. Bulletin, T. 58). Moscou 1883.

Nouveaux Mémoires de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. XIV (= T. XX de la collection), Livr. 4. Moscou 1883.

Materialien zu einer Klimatologie des Kaukasus, gesammelt und herausg. von dem Physikalischen Observatorium in Tiflis. Abth. I: Meteorolog. Beobachtungen. Bd. 1 (1871—75). Bd. 2 (1876—79), Lief. 1—4. Tiflis 1877—80.

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1880. 1881. Hrsg. von J. Mielberg. Tiflis 1881. 82.

Magnetische Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1879. 80. Hrsg. von J. Mielberg. Tiflis 1880. 81.

Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Tifliser Physikalischen Observatorium i. J. 1880. Hrsg. von J. Mielberg. Tiflis 1881.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 25. Riga 1882.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. T. 12. Helsingforsiae 1883.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XXIV (1881—82). Helsingfors 1882.

Observations météorologiques publ. p. la Société des sciences de Finlande. Vol. 8 (Année 1880). Helsingfors 1883.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societet. Häftet 37. 38. Helsingfors 1882.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XX, No. 110—112. Philadelphia 1881. 82.

Proceedings of the American Oriental Society at New York, Oct. 1882; at Boston, May 1883; at New Haven, Oct. 1883.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 1 (1869/70)—13 (1882). Cambridge Mass. d. J.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. V, No. 2—4. Vol. VI, No. 2. Baltimore 1882. 83.

Johns Hopkins University Circulars. No. 19. Vol. II, No. 20—22. 24. Vol. III, No. 27. Baltimore 1882. 83.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences. N. S. Vol. X, P. 2. Cambridge 1882.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. S. Vol. IX (Whole Ser. Vol. XVII). From June 1881 to June 1882. Selected from the Records. Boston 1882.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol. III, No. 4. 5. Boston 1882.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XXI, P. 2 (Dec. 1880—Oct. 1881). P. 3 (Oct. 1881—Jan. 1882). Boston 1882.

Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. IV, No. 3. Buffalo 1882.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. VII (Geological Series, Vol. I), No. 9. 10. Vol. X, No. 2—6. Vol. XI, No. 1—4. Cambridge, Mass. 1882. 83.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College. Cambridge, Mass. Vol. VII, No. 2, P. 3. Vol. VIII, No. 2. Vol. IX, No. 1. 2. Cambridge, Mass. 1882. 83.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1881/82. Cambridge, Mass. 1882.

Scientific Proceedings of the Ohio Mechanics' Institute. Vol. I, No. 4. Vol. II, No. 2. 3. Cincinnati, Ohio, 1882. 83.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. I. Madison 1882.

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. II, No. 7—9. New York 1881. 82.

List of duplicates in the library of the New York Academy of sciences, Nov. 1880. — List of deficiencies in the library, Nov. 1881. New York 1881.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. I, No. 2—8. New York 1881. 82.

Bulletin of the American Geographical Society. 1882, No. 2—5. 1883, No. 1. 2. New York 1882. 83.

Journal of the American Geographical Society of New York. Vol. XIII. New York o. J.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1883, P. 1 (Jan.—May). Philadelphia 1883.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. IV, No. 2. St. Louis, Mo. 1882.

Abbott, Charles C., Primitive Industry, or illustrations of the handiwork, in stone, bone and clay, of the native races of the Northern Atlantic Seabord of America. A special publication of the Peabody Academy of science. Salem, Mass. 1881.

Astronomical and meteorological Observations made during the year 1878 at the U. S. Naval Observatory (Washington Astronomical and meteorological Observations Vol. 25). Washington 1882.

Washington Observations. Meteorological Observations made at the U. S. Naval Observatory during the year 1878. Washington 1882.

Washington Astronomical Observations for 1878. Append. I (Holden, E.S., Monograph of the central parts of the nebula of Orion). Washington 1882.

Report of the Commissioner of agriculture for the years 1881 and 1882. Washington 1882.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey, showing the progress of the work during the fiscal year ending with June 1879. 1880. 1881. Washington 1881—83.

Engineer Department, U. S. Army. Report upon U. S. Geographical Surveys west of the 100th meridian. Vol. 3, Supplement. Geology. Washington 1881.

Annual Report of the Chief Signal-Officer to the Secretary of war for the fiscal year ending June 1880. Part 1. 2. Washington 1881.

Annual Report of the Comptroller of the currency to the first session of the forty-seventh Congress of the U. S. Dec. 5, 1881. Washington 1881.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1881. Washington 1883.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 22—27. Washington 1882. 83.

Wyoming Historical and Geological Society. Publication No. 5: Lacoe, R. D., List of palaeozoic fossil insects of the U. S. and Canada. Wilkes-Barre, Penna. 1883.

Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya, para el año IV, 1884. México 1883.

Annales de l'Observatoire Impérial de Rio de Janeiro. T. I. Description de l'Observatoire. Rio de Janeiro 1882.

Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire Impérial de Rio de Janeiro. 1882, No. 8. 10—12. 1883, No. 1—9. Rio de Janeiro 1882. 83.

Actas de la Academia nacional de ciencias en Cordoba. T. IV, Entrega 1. Buenos Aires 1882.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. V, Entrega 1—3. Cordoba 1883.

Informe oficial de la comision científica agregada al Estado Major General de la Expedicion al Rio Negro realizada en los meses de Abril, Mayo y Junio de 1879 bajo las ordenes del General D. Julio A. Roca. Entrega I. Zoologia. II. Botanica. III. Geologia. Buenos Aires 1881.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 42, Stuk 1. Batavia 1881.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 20 (1882), No. 1—4. Batavia 1882.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 27, Afl. 6. Deel 28, Afl. 1—4. Batavia, 's Hage 1882. 83.

Catalogus der Numismat. Afdeeling van het Museum van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. 2de druk. Batavia 1877.

Francken, J. J. C., en C. F. M. de Grijs, Chineesch-hollandsch Woordenboek van het Emoi dialekt. Uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1882.

Transactions of the Seismological Society of Japan. Vol. III—V. Tokio 1882. 83.

Transactions and Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. 19. Melbourne 1883.

Einzelne Schriften.

Borch, L. Frhr. v., Beiträge zur Rechtsgeschichte des Mittelalters mit besond. Rücksicht auf die Dienstmannen fürstlicher und gräflicher Herkunft. Innsbruck 1881.

Whitehouse, F. Cope, Is Fingal's Cave artificial? Reprinted from the Popular Science Monthly. New York 1882.

Darget, L., Division. Trisection de l'angle. Théorie de parallèles sans pétition de principe. Postulatum d'Euclide. o. O. 1883.

List of scientific papers and works by James Croll.

Brauer, Frdr., Offenes Sendschreiben als Antwort auf Herrn Baron Osten-Sacken's »Critical Review« meiner Arbeit über die Notacanthen. Wien 1883.

Radič, Emilian Edler v., Ein Kampf um's Recht. Beitrag z. Lösung der orthodoxen Kirchenfrage in Bosnien-Herzegovina. Prag 1879.

Ders., Die Verfassung der orthodox-serbischen u. orthodox-rumänischen Particular-Kirchen in Österreich-Ungarn, Serbien u. Rumänien. I. Buch. Die Verfassung der orthodox-serbischen Particular-Kirche von Karlovitz. Prag 1880.

Blasius, W., Über neue und zweifelhafte Vögel von Celebes (Sep.-A.). Braunschweig 1883.

Ders., Vögel von Borneo, im Südosten der Insel gesammelt von H. F. J. Grabowsky. Verzeichnet u. besprochen von W. Blasius (Sep.-A.). Wien 1883.

Ders., On a collection of birds from the Isle of Ceram made by Dr. Platen 1881. (Sep.-A.) London 1882.

Merriam, Aug. C., The Greek and Latin inscriptions on the Obeliskcrab in the Metropolitan-Museum, New York. New York 1883.

Ignatius, K. E. F., Le Grand-Duché de Finlande. Notice statistique. Trad. du suédois p. G. Biaudet. Helsingfors 1878.

Lewis, H. Carvill, The great terminal Moraine across Pennsylvania. Abstract of a paper read before the American Assoc. for the advancement of science, Aug. 1882. From the Proceedings of the Montreal meeting.

Leibniz bref till Sparfvenfelt 1695—1700. Utgifna af Harald Wieselgren. Stockholm 1883.

Announcement of the Wagner Free Institute of science for the collegiate year 1883. Philadelphia 1883.

Gatschet, Alb. S., Linguistic Notes (Ausschn.). — The Massawomekes. Linguistic Notes (Ausschn.). — Phonetics of the Kayowē language (Ausschn.).

Ross, W. P., Early Creek history. Speech, transl. by Robertson and Sullivan. o. O. 1878.

Stein, Frdr. Ritter v., Der Organismus der Infusionsthiere. Abth. III, 2. Hälfte: Die Naturgeschichte der Arthrodelen Flagellaten. Einleitung u. Erkl. d. Abbildungen. Leipzig 1883.

Engelmann, G. J., Die Geburt bei den Urvölkern. A. d. Engl. übertragen u. mit eigenen Zusätzen versehen von C. Hennig. Wien 1884.

APR 11 1884

F. Klein, *Ueber gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung* *).

Die Theorie der elliptischen Functionen hat bekanntlich einen doppelten Eingang, indem man entweder mit den doppeltperiodischen Functionen oder mit den Integralen beginnen kann. Genau dasselbe gilt von gewissen neueren functionentheoretischen Untersuchungen, auf die ich mich hier zu beziehen habe. Einmal handelt es sich dabei um solche Functionen z einer Unabhängigen η, welche ungeändert bleiben, wenn man η einem gewissen discontinuirlichen Systeme linearer Substitutionen unterwirft [1]; das andere Mal mag man das einzelne z als independente Variable betrachten und η durch die Differentialgleichung dritter Ordnung definiren, der es in Bezug auf z genügt. Diese Differentialgleichung hat die übrigens wohlbekannte Gestalt:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = f(z),$$

die dadurch definirt ist, dass sich die allgemeine Lösung aus einer beliebigen Particularlösung η als willkürliche lineare Function $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ zusammensetzt. Der so bezeichnete Zusammenhang zwischen allgemeiner und particulärer Lösung überträgt sich natürlich auf die verschiedenen Zweige einer und derselben η-Function. Lässt man also z in seinem complexen Gebiete einen geschlossenen Weg beschreiben, d. h. einen solchen Weg, bei dem z selber, wie auch $f(z)$, die rechte Seite von (1), ihren ursprünglichen Werth wiedergewinnen, so wird η, diesem Wege entsprechend, eine gewisse lineare Substitution erfahren. Das

*) Vorgelegt und zum Druck übergeben in der Sitzung am 29. Januar 1883.

[1]) Man vergl. etwa meinen neuerdings publicirten Aufsatz: »Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie«, Mathematische Annalen Bd. XXI, wo auch die anderweitige Literatur ausführlich angegeben ist.

Integral $\int f(z) \,.\, dz$ wäre auf diesem Wege um einen Periodicitätsmodul gewachsen. Man kann das Wesen der neuen Functionen geradezu aus dem Gesichtspuncte betrachten, dass man durchweg die Periodicitätsmoduln der Integrale und jene charakteristischen linearen Substitutionen der η-Function parallelisirt.

Ich habe mich nun gefragt, ob man die hiermit angedeutete Vergleichung nicht noch einen Schritt weiter treiben kann. Schreiben wir

(2) . . . . $d\eta = f(z) \,.\, dz,$

so heisst dies, dass η jedem Incremente dz von z entsprechend um eine bestimmte unendlich kleine Grösse vermehrt wird. Wir lösen die Differentialgleichung (2), indem wir von bestimmter unterer Grenze ausgehend den hiermit bezeichneten Process unendlich oft wiederholen; eben Dieses und nichts Anderes besagt das bestimmte Integral

(3) . . . . $\eta = \int_{z_0}^{z} f(z) \,.\, dz + \eta_0.$

Der Periodicitätsmodul aber, den η auf geschlossenem Wege erhält, ist nur ein specieller Werth dieses Integrals. — Genau entsprechend versuche ich im Folgenden die Differentialgleichung (1) aufzufassen. Und zwar werde ich zunächst zeigen, dass man dieselbe so interpretiren kann, als definire sie einem jeden Differential dz entsprechend eine auf η bezügliche unendlich kleine lineare Transformation. Reiht man sodann mehrere Differentiale dz aneinander, so setzen sich die entsprechenden linearen Transformationen als auf einander folgende Operationen zusammen, und es erwächst also die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1), indem man von einer willkürlichen linearen Function beginnend die letztere mit unendlich vielen durch (1) bestimmten infinitesimalen linearen Transformationen componirt. Die charakteristischen linearen Substitutionen von η aber, die geschlossenen Wegen entsprechen, sind wieder nur ein specielles Ergebniss des allgemeinen Lösungsprocesses.

Um die hiermit angedeuteten Anschauungen zu präcisiren, bedürfen wir zunächst, unter η eine beliebige Function von z verstanden, des Begriffs der im Puncte $z = z_\nu$ osculirenden linearen Function. Ich verstehe darunter diejenige lineare Function von z:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_\nu(z) = \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu},$$

die im Puncte $z = z_\nu$ mit η sowohl dem Werthe nach, als auch im ersten und zweiten Differentialquotienten übereinstimmt. Offenbar hat man (wie man durch Reihenentwickelung nach Potenzen von $(z - z_\nu)$ sofort verificirt):

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad A_\nu(z) = \eta_\nu + \frac{2\eta'^2_\nu (z - z_\nu)}{2\eta'_\nu - \eta''_\nu (z - z_\nu)}.$$

Wir bilden uns ferner den Begriff der auf zwei aufeinander folgende Puncte, z_ν und $z_{\nu+1}$, bezüglichen Uebergangssubstitution. Ich definire als solche diejenige lineare Substitution, welche entsteht, wenn man in

$$A_\nu^{-1}(z) = \frac{-d_\nu z + b_\nu}{c_\nu z - a_\nu}$$

statt z den Werth

$$A_{\nu+1}(z) = \frac{a_{\nu+1} z + b_{\nu+1}}{c_{\nu+1} z + d_{\nu+1}}$$

einträgt, also in Formel:

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad S_{\nu,\nu+1} = A_\nu^{-1} . A_{\nu+1}.$$

Wir mögen insbesondere die beiden Werthe z_ν und $z_{\nu+1}$, wie es im Folgenden immer geschehen soll, consecutiv nehmen, also

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad z_{\nu+1} = z_\nu + dz_\nu$$

setzen. Ich bezeichne dann die betreffende Uebergangssubstitution, die ich in der Weise berechne, dass ich höhere Potenzen von dz_ν vernachlässige, schlechthin mit dem Buchstaben S_ν und nenne sie die zu dem Werthe z_ν gehörige infinitesimale Uebergangssubstitution.

Dies vorausgeschickt sage ich nun zunächst, dass die Differentialgleichung (1) für jeden Punct z_ν die zu diesem Puncte gehörige infinitesimale Uebergangssubstitution der Function η bestimmt.

Zum Beweise wolle man vor Allem beachten, dass eine Uebergangssubstitution ungändert bleibt, wenn man η, die zu Grunde liegende Function, durch irgend eine lineare Function von η, $T(\eta)$, ersetzt. Denn die beiden osculirenden linearen Functionen $A_\nu(z)$, $A_{\nu+1}(z)$ verwandeln sich dann in $T . A_\nu(z)$, $T . A_{\nu+1}(z)$ und $S_{\nu,\nu+1}$ in $(A_\nu^{-1} . T^{-1}) . (T . A_{\nu+1})$, was aber nichts Anderes ist, als das alte $S_{\nu,\nu+1}$.

Nun hängen alle Lösungen von (1), wie wir wissen, linear von einander ab. Sie ergeben also alle dieselben Uebergangssubstitutionen und insbesondere dieselben infinitesimalen Uebergangssubstitutionen. Letztere müssen sich also a priori bestimmen lassen. In der That, die infinitesimale Uebergangssubstitution hängt nach dem Früheren von z_ν, dz_ν, η_ν, η'_ν, η''_ν und η'''_ν ab, indem wir nämlich, der Gleichung (7) entsprechend, setzen:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \eta_{\nu+1} = \eta_\nu + \eta'_\nu \cdot dz_\nu, \\ \eta'_{\nu+1} = \eta'_\nu + \eta''_\nu \cdot dz_\nu, \\ \eta''_{\nu+1} = \eta''_\nu + \eta'''_\nu \cdot dz_\nu. \end{cases}$$

Nun gibt es aber keinen anderen aus η_ν, η'_ν, η''_ν, η'''_ν zusammengesetzten Ausdruck, der bei allen linearen Umänderungen von η ungeändert bliebe, als

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2,$$

die linke Seite unser Differentialgleichung (1). Die infinitesimale Uebergangssubstitution kann also jedenfalls (ev. nach geeigneter Zufügung eines Factors in Zähler und Nenner) so geschrieben werden, dass sie nur von z_ν, dz_ν und dem Ausdrucke (9) abhängt. Dass heisst aber ohne Weiteres, dass sie für die durch (1) bestimmte η-Function von Vornherein bekannt ist, was zu beweisen war.

Ich vervollständige diese Ueberlegung durch wirkliche Berechnung der Uebergangssubstitution. Am leichtesten dürfte sich dieselbe so gestalten, dass wir unter allen Lösungen von (1) diejenige, ζ, vorab herausgreifen, für welche die an der Stelle z_ν osculirende lineare Function mit z selbst znsammenfällt, für welche also

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \zeta_\nu = z_\nu, \quad \zeta'_\nu = 1, \quad \zeta''_\nu = 0$$

ist. Da allgemein:

$$\frac{\zeta'''_\nu}{\zeta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''_\nu}{\zeta'_\nu}\right)^2 = \frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2,$$

so wird

$$\zeta'''_\nu = \frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2$$

zu setzen sein. Wir berechnen jetzt für ζ die im Puncte $z_{\nu+1} = z_\nu + dz_\nu$ osculirende lineare Function. Dieselbe ist nach (5) und (7):

$$= \zeta_{\nu+1} + \frac{2\zeta'^2_{\nu+1}(z - z_\nu - dz_\nu)}{2\zeta'_{\nu+1} - \zeta''_{\nu+1}(z - z_\nu - dz_\nu)},$$

und also noch (8) unter Berücksichtigung der besonderen Werthe von ζ_ν; ζ'_ν, ζ''_ν:

$$(z_\nu + dz_\nu) + \frac{2(z - z_\nu - dz_\nu)}{2 - \zeta''_\nu dz_\nu (z - z_\nu - dz_\nu)},$$

oder, unter Wegwerfung höherer Potenzen von dz_ν:

$$\frac{(2 - \zeta'''_\nu z_\nu dz_\nu)\, z + (\zeta'''_\nu z_\nu^2 dz_\nu)}{(-\zeta'''_\nu dz_\nu) \cdot z + (2 + \zeta'''_\nu z_\nu dz_\nu)}.$$

Dieser Ausdruck ist aber an sich mit der gesuchten Uebergangssubstitution identisch. Denn da $S_\nu = A_\nu^{-1} . A_{\nu+1}$, für unser ζ aber A_ν mit z zusammenfällt, so stimmt S_ν ohne Weiteres mit dem bezüglichen $A_{\nu+1}$ überein. Tragen wir nun noch für ζ'''_ν seinen oben bestimmten Werth ein, so haben wir als Definition der Uebergangssubstitution S_ν die allgemeine Formel:

$$(12)\quad S_\nu = \frac{\left(2 - \left(\frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2\right) z_\nu dz_\nu\right) z + \left(\frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2\right) z^2_\nu dz_\nu}{-\left(\frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2\right) dz_\nu \cdot z + \left(2 + \left(\frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2\right) z_\nu dz_\nu\right)}.$$

Was nun die Lösung unserer Differentialgleichung (1) auf Grund der hiermit entwickelten Formeln angeht, so denke man sich eine Reihenfolge von Puncten $z_0, z_1, z_2, \ldots . z_\nu, \ldots z_n$ fixirt, die wir allmählich unter Festhaltung der Endpuncte immer dichter werden lassen, indem wir n grösser und grösser nehmen. Sei $A_0(z)$ eine beliebige lineare Function von z, von der wir annehmen, dass sie im Puncte $z = z_0$ die zu berechnende η-Function osculirt, eine Annahme, welche die drei willkürlichen Constanten fixirt, die in der allgemeinen Lösung von (1) enthalten sind. Dann haben wir der Reihe nach vermöge (6):

$$(13) \quad \ldots\ldots \begin{cases} A_1(z) = A_0 \cdot S_{0,1}, \\ A_2(z) = A_1 \cdot S_{0,1} \cdot S_{1,2}, \\ \text{— — — — — — —} \end{cases}$$

schliesslich:

$$(15) \quad \ldots \quad A_n(z) = A_0 . S_{0,1} . S_{1,2} \ldots . S_{n-1,n},$$

oder auch, indem wir n unendlich werden lassen und also die einzelnen Uebergangssubstitutionen $S_{\nu,\nu+1}$ durch die infinitesimalen S_ν ersetzen:

$$(15) \quad \ldots \quad A_n(z) = A_0 \,.\, S_0 \,.\, S_1 \,.\, S_2 \ldots\ldots S_n. \quad (\lim n = \infty)$$

Dies ist die gesuchte Lösung. Denn unsere Formel lässt uns $A_n(z)$, jene lineare Function, welche η an einer beliebig vorgegebenen Stelle $z = z_n$ osculirt, aus dem willkürlich angenommenen, auf $z = z_0$ bezüglichen $A_0(z)$, durch Aneinanderreihung von unendlich vielen unendlich kleinen linearen Transformationen berechnen.

Ich komme nicht noch einmal auf den Vergleich dieser Formel mit der Begriffsbestimmung des bestimmten Integrals, der auf der Hand liegt, zurück. Sowie man den Integrationsweg im complexen Gebiete in hohem Maasse abändern kann, ohne den Werth des Integrals zu ändern, so in (15) die Reihenfolge der zwischen z_0 und z_n eingeschalteten Puncte. Und wie das Integral über einen geschlossenen Weg erstreckt einen Periodicitätsmodul liefert, so Formel (15) die auf unsere η-Function bezügliche, dem geschlossenen Wege entsprechende charakteristische lineare Substitution.

Was die Convergenz unseres Verfahrens angeht, so braucht dieselbe kaum besonders erläutert zu werden. Denn materiell unterscheidet sich unser Verfahren nur unwesentlich von dem gewöhnlichen, eine Differentialgleichung dritter Ordnung zu integriren. Indem wir aus A_ν vermittelst der Uebergangssubstitution S_ν das $A_{\nu+1}$ berechnen, erreichen wir ja, von Termen höherer Ordnung in dz_ν abgesehen, jedesmal dasselbe, als wenn wir den Formeln (8) entsprechend

$$\eta_{\nu+1} = \eta_\nu + \eta'_\nu \,.\, dz_\nu, \quad \eta'_{\nu+1} = \eta'_\nu + \eta''_\nu \,.\, dz_\nu,$$
$$\eta''_{\nu+1} = \eta''_\nu + \eta'''_\nu \,.\, dz_\nu$$

setzen. Es ist nun die Form unserer Lösung und die in ihr liegende Auffassung von der Bedeutung der Differentialgleichungen (1), welche, wenn überhaupt, einigen Werth beanspruchen dürfte.

Wilhelm Weber, *Ueber Construction des Bohnenberger'schen Reversionspendels, zur Bestimmung der Pendellänge für eine bestimmte Schwingungsdauer im Verhältniss zu einem gegebenen Längenmaass* *).

Ausser Entfernungsmessungen auf der Erdoberfläche, welche für die Erdbewohner die wichtigsten sind, giebt es noch viele andere fast ebenso wichtige Längenmessungen, von denen die Pendelmessungen besonders hervorgehoben zu werden pflegen. Man versteht darunter die Messungen der an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche verschiedenen Secundenpendellänge.

Diese Secundenpendellänge (für einen bestimmten Punkt der Erdoberfläche) ist sogar selbst, statt des Meters oder der Seemeile, zum Längenmaass vorgeschlagen und empfohlen worden.

Ein über die ganze Erdoberfläche sich erstreckendes System von Pendellängenmessungen ist aber niemals wirklich ausgeführt worden, und nur selten ist ein wirkliches Secundenpendel an irgend einem Orte hergestellt und seine Länge genau gemessen worden; vielmehr pflegt nur ein Pendel von unveränderlicher Länge an verschiedene Stellen der Erdoberfläche versetzt und seine Schwingungsdauer überall beobachtet zu werden, die, wenn sie auch an einem Orte genau 1 Secunde beträgt, an den meisten andern Orten der Erdoberfläche mehr oder weniger davon verschieden ist. Es handelte sich also bei diesen Pendelmessungen an verschiedenen Stellen des Erdoberfläche wesentlich um Messung verschiedener Schwingungsdauern bei gleicher Pendellänge, nicht um verschiedene Pendellängen bei gleicher Schwingungsdauer.

Was aber die einzige hiernach zu messende Pendellänge betrifft, so kommt genau genommen nichts darauf an, dass sie selbst unmittelbar messbar sei, sondern nur darauf, dass sie zu

*) Vorgelegt und übergeben in der Sitzung am 29. Januar 1888.

einer an einem physischen Pendel (dessen Schwingungsdauer beobachtet worden ist) recht genau messbaren Länge in bekanntem Verhältnisse stehe.

Es ist nun zu diesen Messungen vorzugsweise das Bohnenberger'sche Reversionspendel nach Kater's Construction gebraucht worden, woran zwei parallele Schneiden sich befinden, welche abwechselnd als Drehungsaxen dienen, deren zu messender Abstand die Pendellänge für die beobachtete Schwingungsdauer darstellt, wenn letztere für beide Schneiden als Drehungsaxen gleich gefunden worden ist. Doch hat Bessel gegen diese Benutzung des Schneidenabstandes zur Bestimmung der Pendellänge gewichtige Bedenken erhoben.

Theorie des Bohnenberger'schen Reversionspendels.

Aus der Theorie des physischen Pendels ist bekannt, dass das Verhältniss der Directionskraft zum Trägheitsmoment gleich dem Verhältniss von $\pi\pi$ zum Quadrat der Schwingungsdauer ist, d. i.

$$\frac{gmx}{K} = \frac{\pi\pi}{tt},$$

wenn gm das Gewicht, K das Trägheitsmoment und t die Schwingungsdauer des Pendels, x aber den Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsaxe bezeichnet.

Für das mathematische Pendel wird x gleich der Pendellänge l und das Trägheitsmoment $K = mll$; folglich

$$\frac{g}{l} = \frac{\pi\pi}{tt} \text{ oder } l = \frac{g}{\pi\pi} \cdot tt.$$

Aus dieser Theorie des physischen Pendels folgt die Theorie des Reversionspendels, wenn man beachtet, dass die Differenz des wirklichen Trägheitsmoments und desjenigen, welches dem Pendel zukommen würde, wenn seine Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre, d.i. $K - mxx$, gleich dem Trägheitsmomente ist, welches dem Pendel zukommen würde, wenn die Drehungsaxe durch den Schwerpunkt ginge. Setzt man das letztere Drehungsmoment $= maa$, wonach

$$K - mxx = maa,$$

so erhält man die Gleichung des physischen Pendels

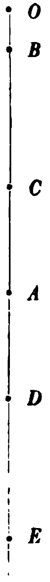
$$\frac{gmx}{maa + mxx} = \frac{\pi\pi}{tt},$$

oder, wenn darin $\frac{g}{\pi\pi} tt = l$ gesetzt wird,

$$l = x + \frac{aa}{x}.$$

Hierin sind unter l und x die Verticalabstände zu verstehen, in denen bei ruhenden Pendeln die concentrirte Masse des mathematischen Pendels und der Schwerpunkt des physischen Pendels, dem dieselbe Schwingungsdauer zukommt, unter ihren Drehungsaxen liegen. Es folgt hieraus, dass l und x in obiger Gleichung beide positiv sind, vorausgesetzt dass dasjenige Ende des physischen Pendels, welches zum Anfangspunkt genommen wird, der oberste Punkt des Pendels ist; wollte man den untersten Punkt dazu nehmen, so müssten beide, l sowohl als x, negativ gesetzt werden.

Es ergeben sich hiernach, wenn bei gegebenem Werthe von t für x der Werth x' genügt, noch drei andere gleichfalls genügende Werthe für x, nämlich:



$$x'' = \frac{aa}{x'}$$

$$x''' = -\frac{aa}{x'}$$

$$x^{\text{IV}} = -x'.$$

Stellt hierneben A den Schwerpunkt des ruhenden Pendels dar und wird $BA = x'$, $CA = x''$, $DA = x'''$ und $EA = x^{\text{IV}}$ gemacht; so ergiebt sich:

$$BD = BA + AD = x' - x''' = x' + \frac{aa}{x'} = l$$

$$CE = CA + AE = x'' - x^{\text{IV}} = \frac{aa}{x'} + x' = l,$$

wo B, C, D, E die vier verschiedenen Lagen der Drehungsaxe bezeichnen, für welche die Schwingungsdauer des Pendels gleich ist.

Für die Aufgabe: »Die Länge des mathematischen Pendels für irgend eine Schwingungsdauer t eines gegebenen physischen Pendels aus Beobachtungen derjenigen Versetzungen der Drehungsaxe des physischen Pendels zu bestimmen, durch welche diese Schwingungsdauer nicht geändert wird«, ergiebt sich hieraus folgende Auflösung:

Man suche eine zweite parallele Axe in einer durch die gegebene Axe und den Schwerpunkt des Pendels gelegten Ebene, welche auf entgegengesetzter Seite vom Schwerpunkt und nicht symmetrisch zu demselben liegt, für welche die Schwingungsdauer gleich ist, nämlich $= t$; so ist die gesuchte Länge des mathematischen Pendels für diese Schwingungsdauer t dem Abstande dieser beiden Axen von einander gleich.

Der Lösung dieser allgemeinen Aufgabe, nämlich die Pendellänge für irgend eine gegebene Schwingungsdauer zu bestimmen, ist nun noch die Lösung der besonderen Aufgabe hinzuzufügen, nämlich: »diejenige Schwingungsdauer t zu bestimmen, für welche die Bestimmung der Pendellänge auf die angegebene Weise die grösste Genauigkeit gestattet«.

Bei obiger allgemeinen Aufgabe war nämlich der Abstand der ersten Axe vom Schwerpunkt des Pendels nicht bestimmt, und war als beliebig anzusehen, so lange als die Schwingungsdauer t unbestimmt blieb; wird nun aber durch Lösung der besonderen Aufgabe t, und dadurch die Lage der ersten Axe, bestimmt, und wird ferner durch Lösung der allgemeinen Aufgabe auch die Lage der zweiten Axe gefunden, so ist durch den Abstand beider Axen die Pendellänge vollkommen bestimmt und kann mit grösster Genauigkeit, wenn nicht durch directe Messung dieses Abstandes, durch Messung einer mit diesem Abstande in einem genau bekannten Verhältniss stehenden Länge, gefunden werden.

Es leuchtet nun aber ein, dass die Pendellänge l auf die angegebene Weise am genauesten dann müsse bestimmt werden können, wenn ein kleiner Beobachtungsfehler dt der Schwingungsdauer t des physischen Pendels den geringsten Einfluss auf die Bestimmung von l hat.

Ein solcher Beobachtungsfehler dt kann aber statt finden erstens bei Beobachtung der Pendelschwingungen um die Axe B (wobei das zum Anfangspunkt genommene Ende O der oberste Punkt des in Ruhe befindlichen Pendels ist), und zweitens bei Beobachtung der Pendelschwingungen um die Axe D (wobei das zum Anfangspunkt genommene Ende O der unterste Punkt des in Ruhe befindlichen Pendels ist). Für den Fehler dt ist der Einfluss auf die Bestimmung von

$l = x' - x'''$ im ersteren Falle $= \frac{dx'}{dt} dt$, in letzterem Falle $= -\frac{dx'''}{dt} dt$.

Beachtet man, dass in beiden Fällen gleiche Fehler, und in jedem der beiden Fälle positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich sind; so ergiebt sich, dass der Einfluss dieser Fehler auf die Bestimmung der Pendellänge l der Wahrscheinlichkeit nach am geringsten sei, wenn die Summe $\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx'''}{dt}\right)^2$ ein Minimum ist.

Für $x = x'$ (wo x' positiv sein soll und folglich auch l) haben wir nun folgende Gleichung:

$$l = \frac{aa}{x'} + x' = \frac{g}{\pi\pi} tt,$$

woraus durch Differentiation erhalten wird:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{2g}{\pi\pi} t \cdot \frac{x'x'}{x'x' - aa}.$$

Für $x = x''' = -\frac{aa}{x'}$ (wo wenn x' wiederum positiv sein soll, l negativ zu setzen, oder $-l$ für $+l$ zu schreiben ist) wird ebenso folgende Gleichung erhalten:

$$-l = \frac{aa}{x'''} + x''' = -\frac{g}{\pi\pi} tt,$$

woraus sich durch Differentiation ergiebt:

$$\frac{dx'''}{dt} = -\frac{2g}{\pi\pi} t \cdot \frac{x'''x'''}{x'''x''' - aa},$$

oder, weil $x''' = -\frac{aa}{x'}$ ist,

$$\frac{dx'''}{dt} = -\frac{2g}{\pi\pi} t \cdot \frac{a^4}{a^4 - aax'x'}.$$

Substituirt man nun in obiger Gleichung

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx'''}{dt}\right)^2 = \text{Minimum},$$

die soeben für $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dx'''}{dt}$ gefundenen Werthe, so erhält man

$$\frac{4g^2t^2}{\pi^4}\left(\left(\frac{x'x'}{x'x' - aa}\right)^2 + \left(\frac{a^4}{a^4 - aax'x'}\right)^2\right) = \text{Minimum}$$

oder, weil $\frac{4g}{\pi\pi}$ ein constanter Factor und $\frac{gtt}{\pi\pi} = l = x' + \frac{a v}{x'}$ ist,

$$\left(x' + \frac{aa}{x'}\right)\left(\frac{x'^4 + a^4}{(x'x' - aa)^2}\right) = \text{Minimum}.$$

Setzt man $\frac{x'x'}{aa} = z$, so erhält man

$$\frac{(z+1)(zz+1)}{(z-1)^2\sqrt{z}} = \text{Minimum}$$

und hieraus die Gleichung:

$$z^4 + 1 = 6z(z^2 + z + 1).$$

Diese Gleichung hat zwei reelle Wurzeln, nämlich:

$$z = 6{,}97984 \text{ und } z = \frac{1}{6{,}97984},$$

und zwei imaginäre Wurzeln, nämlich:

$$z = -0{,}561555 \pm 0{,}83346 \,.\, \sqrt{-1}.$$

Da $z = \frac{x'x'}{aa}$ war, so ergeben sich vier reelle Werthe für $\frac{x'}{a}$, nämlich:

$$\frac{x'}{a} = +2{,}64194$$

$$\frac{x''}{a} = +0{,}37851$$

$$\frac{x'''}{a} = -0{,}37851$$

$$\frac{x^{\text{IV}}}{a} = -2{,}64194$$

folglich

$$l = x' - x''' = x'' - x^{\text{IV}} = 3{,}02045\,a = \frac{g}{\pi\pi}tt$$

und

$$t = \pi\sqrt{3{,}02045 \cdot \frac{a}{g}},$$

d. i. diejenige Schwingungsdauer, für welche die Pendellänge l am genauesten bestimmbar ist.

Bei einem langen, homogenen und genau cylindrischen Stabe kann der Werth von a, welcher von der Länge und dem Halbmesser des Stabes abhängt, als bekannt vorausgesetzt werden. Bezeichnet man nämlich mit ϱ die Dichtigkeit, mit r den Halbmesser und mit x den Abstand eines kreisscheiben-

förmigen Elements von der Stabmitte, und bezeichnet man ferner mit α den Winkel, welchen irgend ein Radius r der Scheibe mit ihrem der Schwingungsaxe parallelen Durchmesser bildet; so lassen sich für jeden Werth von α alle in gleicher Entfernung von jenem Durchmesser, nämlich in der Entfernung $r \sin \alpha$, liegenden Scheibenpunkte, die zusammen zwei Sehnen des Kreises bilden und die Länge $= 4\,r \cos \alpha$ besitzen, von den übrigen unterscheiden. Bezeichnet x die Entfernung des Scheibendurchmessers von dem damit parallelen, durch den Schwerpunkt des Stabes gehenden Durchmesser; so ist der Abstand aller jener Sehnenpunkte von diesem letzteren Durchmesser $= \sqrt{(x^2 + r^2 \sin \alpha^2)}$.

Legt man jenen beiden Sehnen einen kleinen Querschnitt $= r \cos \alpha \,.\, d\alpha\, dx$ bei, so wird der ihnen entsprechende Theil der Grösse $m\,a\,a$ ausgedrückt durch $4 \varrho\, r^2 \cos \alpha^2 \,.\, (x^2 + r^2 \sin \alpha^2)\, d\alpha\, dx$, wo ϱ die Dichtigkeit der Stabmasse bezeichnet; der dem ganzen Querschnitt entsprechende Theil ist

$$= 4 \varrho r^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (x^2 + r^2 \sin \alpha^2) \cos \alpha^2 d\alpha,$$

und der dem ganzen Stabe entsprechende Werth von

$$m a a = 8 \varrho r^2 \int_0^{\frac{1}{2}L} dx \int_0^{2\pi} (x^2 + r^2 \sin \alpha^2) \cos \alpha^2 d\alpha.$$

Nun ist $\int_0^{2\pi} (x^2 + r^2 \sin \alpha^2) \cos \alpha^2 d\alpha =$

$$= x^2 \int_0^{2\pi} \cos \alpha^2 d\alpha + \frac{1}{8} r^2 \int_0^{2\pi} (\sin 2\alpha)^2 d(2\alpha) = \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi r^2}{16};$$

folglich

$$m a a = 8 \varrho r^2 \int_0^{\frac{1}{2}L} \left(\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi r^2}{16}\right) dx = \pi \varrho r^2 L \left(\frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{4} r^2\right).$$

Nun ist $m = \pi \varrho r^2 L$, folglich

$$a a = \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{4} r^2,$$

wo L die ganze Stablänge bezeichnet.

Es geht hieraus hervor, dass, unter Voraussetzung eines im Verhältniss zu seiner Dicke r sehr langen, genau cylindri-

schen und homogenen Stabes L (wobei der kleine Bruch $\frac{r}{L}$ ebenfalls genau bestimmbar sei), der Werth von a nahezu mit gleicher Genauigkeit wie der Werth von L bestimmbar sein werde.

Nun ist aber oben gefunden worden, dass a zur Pendellänge l in einem genau bestimmten Verhältniss stehe, nämlich:

$$a : l = 1 : 3,02045;$$

also folgt hieraus, dass auch die Stablänge L (von der vorausgesetzt werden darf, dass sie entweder selbst als Originalmaassstab à bout gegeben, oder mit einem solchen auf das Genaueste verglichen worden sei) mit der Pendellänge l in einem genau bestimmten Verhältniss stehe, nämlich nach obiger Gleichung, wenn darin für a sein Werth aus folgender Gleichung gesetzt wird:

$$aa = \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{4} r^2.$$

Mit l ist aber die der Schwingungdauer t, nach der Gleichung $\frac{g}{\pi\pi} tt = l$, entsprechende Pendellänge bezeichnet worden, wo t, wie oben gezeigt worden ist, aus Schwingungsbeobachtungen des Stabes L sehr genau gefunden werden kann.

Ist also t aus den mit dem Stabe L, dessen Länge genau gegeben und bekannt ist, gemachten, oben beschriebenen Schwingungsbeobachtungen bestimmt worden, und kann ferner a aus L (unter Hinzufügung einer kleinen von r abhängigen Correction) sehr genau bestimmt werden, nämlich aus der Gleichung $aa = \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{4} r^2$, und ist endlich $l = 3,02045 \,.\, a$ gegeben; so ist der Zweck der Pendelmessung vollkommen erreicht, ohne dass es dazu einer directen Messung von l, d. i. der Entfernungen der an L angebrachten Schwingungsaxen x' von x''' oder x'' von x^{IV} bedürfte, welche wie Bessel gezeigt hat, keiner genauen Bestimmung überhaupt fähig ist.

Die an dem Stabe L anzubringenden vier Schwingungsaxen x', x'', x''' und x^{IV} sollen hiernach nur noch dazu dienen, die Schwingungsdauer t zu bestimmen. Es ist aber dabei zu bemerken, dass zwei von diesen Schwingungsaxen, nämlich x' und x^{IV}, an einem homogenen cylindrischen Stabe L, wie hier angenommen worden ist, gar nicht angebracht werden können. Die

mit x' und x^{IV} bezeichneten Entfernungen dieser beiden Axen vom Schwerpunkte, d. i. von der Mitte des Stabes L, sind nämlich bestimmt worden:

$$x' = + 2,64194 \,.\, a$$
$$x^{IV} = - 2,64194 \,.\, a$$

das ist, wenn $\frac{r}{L}$ ein sehr kleiner Bruch ist, nahezu

$$x' = + 0,7627 \,.\, L$$
$$x^{IV} = - 0,7627 \,.\, L$$

das heisst diese beiden Axen liegen in den Verlängerungen des Stabes nach beiden Seiten um mehr als um den vierten Theil der ganzen Stablänge von den Stabenden entfernt.

Da solche Axen, ohne feste Verbindung mit L, nicht existiren können, so bleiben nur die Axen x'' und x''' übrig, die sich wirklich darstellen lassen und deren jede zu Beobachtungen der Schwingungsdauer t benutzt werden kann.

Es geht daraus also hervor, dass, wenn ein homogener cylindrischer Stab zum Pendel benutzt werden soll darum, weil durch seine Länge und Dicke eine genaue Kenntniss von der Grösse a gewonnen würde; andererseits mit dieser Benutzung der Nachtheil verbunden zu sein scheint, dass die Bohnenberger'sche Methode (mit Einschluss der oben angegebenen Lagenbestimmung der vier Schwingungsaxen) illusorisch werden würde, insofern nämlich zwei von jenen vier Axen an einem solchen Stabe gar nicht angebracht werden könnten (sie würden nämlich nach obiger Lagenbestimmung über die Grenzen des Stabes hinaus liegen), und die beiden anderen allein zur Bestimmung der Pendellänge nicht geeignet wären.

Da nun aber, wie gezeigt worden ist, die gesuchte Pendellänge l bei einem homogenen cylindrischen Stabe, unabhängig von Axen und Schwingungsbeobachtungen, aus der Stablänge und Dicke sehr genau bestimmt werden kann; so sind Schwingungsbeobachtungen nur zur Bestimmung der Schwingungsdauer t erforderlich, wozu jede von den angegebenen vier Axen dienen kann, und es ist dabei gleichgültig, ob eine gleiche Zahl von Schwingungsbeobachtungen mit gleicher Genauigkeit alle an einer Axe oder an mehreren Axen vertheilt ausgeführt werden. Es bedarf also dazu der Axen x' und x^{IV} gar nicht und es genügen dazu vollkommen die beiden Axen x'' und x'''.

Es bleibt noch übrig, an einem solchen homogenen und cylindrischen Stabe die beiden Axen x'' und x''' so anzubringen, dass dadurch der Genauigkeit der Bestimmung der Grösse a (aus Stablänge und Dicke) kein Eintrag geschieht. Es soll vorausgesetzt werden, dass die Axe von der Kante eines gehärteten, feingeschliffenen und polirten Stahlprismas gebildet wird. Soll der Stab an der Stelle der Axe nicht quer durchbohrt werden, um das Prisma durch den Stab hindurchzuführen; so kann das Prisma mit zwei Stahlspitzen vertauscht werden, welche symmetrisch zu beiden Seiten des Stabes so befestigt werden, dass eine durch die beiden Spitzen gezogene Gerade genau die Stelle der Axe einnimmt. Unter der abwärts gekehrten Prismenkante oder unter den beiden Stahlspitzen werden zu beiden Seiten des Stabes auf festem Fundamente polirte Stahl- oder Achatplatten befestigt, deren Oberflächen genau in derselben Horizontalebene liegen müssen.

Bei Stäben von grösserem Gewichte verdient das Prisma als Axe den Vorzug, und wenn dieses Prisma quer durch den Stab hindurchgeführt werden soll, wozu der Stab durchbohrt werden muss, so steht es frei, entweder das Prisma mit dem Stabe fest zu verbinden und mit den ausserhalb des Stabes liegenden beiden Enden seiner nach unten gekehrten Kante auf die von polirtem Stahle oder von Achatplatten gebildete feste horizontale Unterlage zu stellen, oder es steht frei, die cylindrische Durchbohrung des Stabs (zumal wenn der Stab selbst aus feinem gezogenem Stahle besteht) fein auszupoliren, sodann das Stahlprisma frei durch diese Durchbohrung durchzuführen, seine zur Axe bestimmte Kante nach oben zu kehren und horizontal gerichtet an seinen Enden ausserhalb des Stabes zu befestigen, was den Vorzug hat, dass dadurch am Stabe selbst am wenigsten geändert wird und der Genauigkeit der Bestimmung der Grösse a (nämlich aus der Länge und Dicke des Stabes) kein merklicher Eintrag geschieht. Nur muss erstens mit grösster Genauigkeit die Horizontalität der cylindrischen Durchbohrung, bei senkrechter Stellung des Stabes, hergestellt werden, zweitens im Fall von zwei Durchbohrungen, nämlich für die Axen x'' und x''', muss genauer Parallelismus derselben hergestellt werden, und drittens muss die Cylinderoberfläche der Durchbohrung so zu liegen kommen, dass sie die Axe x'' oder x''' enthalte, indem diese Axe mit derjenigen auf der Cylin-

derfläche mit der Cylinderaxe parallel gezogenen Linie zusammenfällt, welche von dem Schwerpunkt des Stabes am entferntesten ist.

Es wird hierdurch am Stabe sonst gar nichts geändert, als durch Wegnahme des Stahls aus dem Raume der beiden Durchbohrungen, an den Axen x'' und x'''. Ein kleiner Planspiegel mit einem in die Durchbohrung passenden Holzzapfen, welcher das Gewicht des die Durchbohrung füllenden Stahls besässe, würde sich leicht herstellen lassen, und dazu dienen können, bei den Schwingungsbeobachtungen allemal in die offen bleibende Durchbohrung gesteckt zu werden, wodurch das durch die Durchbohrung veränderte Trägheitsmoment des schwingenden Stabes wieder hergestellt und zugleich die Beobachtung der Schwingungen im Spiegelbilde einer entfernten Skala ermöglicht werden würde.

Was die Herstellung eines cylindrischen Stabs, wie hiezu erfordert wird, betrifft, so kann dieselbe in grösster Vollkommenheit nach bekannter Methode bewerkstelligt werden, indem nämlich, während der Stab um seine Längenaxe gedreht wird, ein Stück desselben von einer aus zwei mit halbcylindrischen Vertiefungen gebildeten Kapsel umschlossen wird, welche, nachdem feiner Schmirgel zwischen die halbcylindrischen Kapselwände und die Staboberfläche gebracht worden ist, an dem sich drehenden Stabe schnell hin und her geschoben wird.

Carl Neumann, *Ueber die von G. Cantor und P. du Bois-Reymond über trigonometrische Reihen aufgestellten Sätze, etc.* *) Fortsetzung und Berichtigung des in diesen Berichten publicirten gleichnamigen Aufsatzes vom Jahre 1881, S. 1—25.

§ 4.

Ueber trigonometrische Reihen.

Wir bezeichnen die Puncte einer gegebenen *Kreisperipherie* vom Radius R, was ihre Polarcoordinaten betrifft, mit (R, φ), und rechnen das Azimuth φ von 0 bis 2π. Es sei nun $f(\varphi)$ eine beliebig gegebene Function, welche längs jener Peripherie überall *stetig* ist, und es sei (durch irgend welche Mittel, vielleicht auch durch Zufall) gelungen, diese Function $f(\varphi)$ durch eine nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von φ fortschreitenden Reihe zu entwickeln:

$$(1.)\qquad f(\varphi) = \alpha_0 + 2\sum_1^\infty (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Genauer ausgedrückt: *Es sei gelungen, die Constanten α, β der Art zu bestimmen, dass die Formel* (1.) *convergent und gültig ist für jedweden Punct der Kreisperipherie.*

Versteht man nun unter (r, φ) die Polarcoordinaten irgend eines Punctes *innerhalb* der Kreisperipherie, mithin unter r eine Grösse, die $< R$ ist, und bildet man die auxiliare Function:

$$(2.)\qquad F(r, \varphi) = \alpha_0 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

so unterliegt es keinem Zweifel, dass diese zur Definition von $F(r, \varphi)$ verwendete Reihe (2.) *convergent* ist. Denn nach einem von *Cantor* bewiesenem Satz (Crelle's Journal, Bd. 72, S. 135) folgt aus der vorausgesetzten Convergenz der früheren Reihe (1) mit Nothwendigkeit, dass sämmtliche Constante α, β zwischen endlichen Schranken liegen.

---

*) Gegenwärtiger Aufsatz wurde vorgelegt und zum Druck übergeben in der Sitzung am 5. März 1883.

Der eben genannte *Cantor'sche* Satz ist aber, worauf ich von *Du Bois-Reymond* aufmerksam gemacht wurde, bei dieser Schlussfolgerung nicht zu entbehren. Demgemäss ist, was den § 3 meines früheren Aufsatzes von 1881 betrifft, folgende Notiz erforderlich:

Aus der Formel (1.) *ergiebt sich mittelst des citirten Cantor-schen Satzes, dass die Constanten* α, β *durchweg endlich bleiben. Hieraus folgt dann weiter die Convergenz der Reihe* (2.), *und ebenso auch die Correctheit der in jenem Aufsatz auf* S. 17 *ausgeführten Integration.* Dabei sei bemerkt, dass die *dortigen* Formeln (1.) und (2.) dieselben sind, welche *hier* mit diesen Nummern bezeichnet werden.

Ich benutze diese Gelegenheit, um den genannten, nur auf die Functionen Sinus und Cosinus sich beziehenden Cantor-schen Satz einer gewissen Verallgemeinerung zu unterwerfen, indem ich an Stelle jener trigonometrischen Functionen eine *beliebig gegebene periodische* Function $f(x)$ eintreten lasse, von welcher jedoch vorausgesetzt sein soll, dass sie *stetig* ist.

§ 5.

Ueber eine gewisse Erweiterung des Cantor'schen Satzes (Crelle's Journal, Bd. 72, S. 135).*)

Es sei $f(x)$ eine beliebig gegebene *periodische* und *stetige* Function, und L die Länge ihrer Periode. Für $x = A$ sei B der Werth der Function:

$$(1.)\qquad f(A) = B.$$

Auch sei das A in solcher Weise ausgewählt, dass *B von 0 verschieden* ist. Alsdann ist:

$$f(A) = f(A+L) = f(A+2L) = \cdots = B,$$

oder, falls man $A = SL$ setzt:

$$(2.a)\qquad f(SL) = f((S+1)L) = f((S+2)L) = \cdots = B,$$

und ebenso auch:

$$(2.b)\qquad f(SL) = f((S-1)L) = f((S-2)L) = \cdots = B.$$

*) Jener Satz lautet: Wenn für jeden Werth von x zwischen gegebenen Grenzen ($a < x < b$) die Formel stattfindet: $\lim (a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$, so folgt hieraus, dass $\lim a_n = 0$, und ebenso auch $\lim b_n = 0$ ist.

Die hier auftretenden *Constanten*:

(3.) $\ldots, (S-2), (S-1), S, (S+1), (S+2), \ldots$

mögen hinfort kurzweg als die *Reihe* (3.) bezeichnet werden. Wir wollen nun die Function $f(x)$, und ebenso auch die Constanten L, A, B, S als *gegeben* betrachten, und uns folgende Aufgabe vorlegen:

Aufgabe. — *Es seien* $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n, \ldots$ in inf. *beliebig gegebene Constanten. Und insbesondere sei bekannt, dass für jedweden Werth der Variablen* x *die Formel stattfindet*:

$$(4.) \qquad \lim_{n=\infty} \beta_n f(nx) = 0.$$

Auf Grund dieser Formel sollen die Eigenschaften jener Constanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n, \ldots$ *näher untersucht werden.*

Da die Formel (4.) stattfinden soll für *jedwedes* x, so wird sie z. B. auch stattfinden für $x = 0$. Man erhält also:

$$(\sigma.) \qquad \lim_{n=\infty} \beta_n f(0) = 0,$$

oder, falls man durch die Constante $f(0)$ dividirt:

$$(\tau.) \qquad \lim_{n=\infty} \beta_n = 0.$$

Doch ist der Uebergang von (σ.) zu (τ.) offenbar nur dann erlaubt, wenn das $f(0)$ *von* 0 *verschieden* ist. Es scheint somit fraglich, ob die Formel (τ.) auch dann noch gültig bleibt, wenn $f(0) = 0$ ist.

Die Methode, welche man, falls $f(x)$ eine der Functionen $\sin(x)$ oder $\cos(x)$ vorstellt, zur Beantwortung dieser Frage einzuschlagen hat, verdankt man Herrn *Cantor*. So complicirt diese Methode in Anbetracht der einfachen Dinge, um welche es sich handelt, auch erscheinen mag, so sind doch alle Versuche, diese Methode durch eine bequemere und schnellere zu ersetzen, bisher vergeblich geblieben. Ich werde nun im Folgenden zeigen, dass diese *Cantor'sche Methode* nicht nur auf $\sin(x)$ und $\cos(x)$, sondern mittelst einiger sich leicht ergebenden Modificationen auch auf die hier betrachtete Function $f(x)$ anwendbar ist.

Dabei werde ich Gebrauch machen von zwei *ganz willkürlich zu fixirenden* Constanten h_0 und j_0, von denen indessen die *erstere* positiv und > 0 sein soll. Zur Absolvirung der *augenblicklich* vorliegenden Aufgabe (4.), würde es bequem sein, diese Constanten h_0 und j_0 etwa beide $= 1$ zu machen. Trotz-

dem werde ich dies *nicht* thun, sondern die Fixirung der Constanten h_0 und j_0 absichtlich *in suspenso* lassen, um in solcher Weise meinen Betrachtungen eine Form zu verleihen, in welcher sie nicht nur für die *augenblickliche* Aufgabe, sondern gleichzeitig auch für die Untersuchungen des *nächstfolgenden* §. geeignet sein werden.

Um unseren Vorstellungen und Betrachtungen eine gewisse Festigkeit zu geben, können wir uns im *ganzen gegenwärtigen* §. für h_0 und j_0 folgende Werthe festgesetzt denken:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} h_0 &= +\,345\tfrac{1}{4}, \\ j_0 &= +\,987\tfrac{2}{3},\ \text{oder} = -\,8733\tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

Während nämlich h_0, wie schon gesagt, *positiv und* >0 *sein soll*, ist die Fixirung von j_0 einer derartigen Beschränkung *nicht* unterworfen.

Es sei ε ein *ad libitum* gewählter Kleinheitsgrad. Mit Bezug auf dieses ε wollen wir sämmtliche Constanten

$$(6.)\qquad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \ldots\ldots\ \textit{in inf.}$$

in zwei Kategorien versetzen, in die der *höheren* und die der *tieferen* β's, indem wir jedwedes β zur ersten oder zweiten Kategorie zählen, je nachdem sein absoluter Betrag $>\varepsilon$, oder aber $\leqq \varepsilon$ ist. Dabei sind verschiedene Möglichkeiten vorhanden. Denn es wird der die Reihe (6.) von Links nach Rechts Durchwandernde *entweder* auf *gar kein höheres* β, sondern stets nur auf tiefere β's stossen, wie weit er auch nach Rechts fortschreiten mag. *Oder*, er wird *nur eine Zeit lang* auf *höhere* β's stossen, z. B. nur bis zu seiner Ankunft in β_{27}; sodann aber bei Durchlaufung der folgenden Glieder $\beta_{28}, \beta_{29}, \beta_{30}, \beta_{31}, \ldots$ bloss noch tieferen β's begegnen, wie weit er sich auch nach Rechts fortbewegen mag. *Oder endlich*, er wird auf eine *unerschöpfliche* Menge von *höheren* β's stossen, der Art, dass die Begegnung mit höheren β's niemals aufhört, wie weit er auch nach Rechts hin sich fortbewegen mag. Diese drei Fälle lassen sich *so* charakterisiren:

(7.a) *Erster Fall*: Es existiren *gar keine höheren* β's; so dass also die ganze Reihe

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \ldots\ \textit{in inf.}$$

lediglich aus *tieferen* β's besteht.

(7.b) *Zweiter Fall:* Die *höheren* β's bilden in der Anordnung, wie sie in der Reihe (6.) von Links nach Rechts aufeinanderfolgen, eine *endliche* Reihe:

$$\beta_{g_1},\ \beta_{g_2},\ \beta_{g_3},\ \ldots\ \beta_G,$$

wo $g_1 < g_2 < g_3 < \ldots < G$ ist, und G eine bestimmte *endliche* Zahl vorstellt. Alsdann wird also die auf β_G folgende Reihe:

$$\beta_{G+1},\ \beta_{G+2},\ \ldots\ \textit{in inf.}$$

lediglich aus *tieferen* β's bestehen.

(7.c) *Dritter Fall:* Die *höheren* β's bilden, wie sie in der Reihe (6.) von Links nach Rechts aufeinander folgen, eine sich *ins Unendliche* erstreckende Reihe:

$$\beta_{g_1},\ \beta_{g_2},\ \beta_{g_3},\ \ldots\ \textit{in infinitum},$$

wo alsdann $g_1 < g_2 < g_3 < \ldots$ positive ganze Zahlen vorstellen, die *ins Unendliche wachsen.*

Dies sind offenbar die einzig möglichen Fälle. Ist man also z. B. nachzuweisen im Stande, dass der *dritte* Fall *nicht* eintreten kann, so muss nothwendiger Weise der *erste* oder *zweite* Fall vorhanden sein. Einen solchen Nachweis werden wir nun in der That führen, und zwar mittelst eines apagogischen Verfahrens, indem wir zeigen, dass die Annahme des *dritten* Falles zu *absurden* Resultaten hinleitet, dass mithin dieser dritte Fall unmöglich ist. Dieser Disposition entsprechend ist unser Verfahren folgendes:

Wir nehmen an, der *dritte* Fall sei vorhanden, d. h. die Reihe der *höheren* β's:

$$(8.)\quad \beta_{g_1},\ \beta_{g_2},\ \beta_{g_3},\ \ldots\ \text{erstrecke sich } \textit{in infinitum}.$$

Die $g_1, g_2, g_3, \ldots$ repräsentiren alsdann eine Reihe *ganzer Zahlen*, von denen jede kleiner ist als die nächstfolgende, und zwar eine Reihe, die sich ebenfalls *in infinitum* erstreckt. Unter diesen ganzen Zahlen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ sei nun, beim Fortgange von Links nach Rechts, h_1 die erste, welche $\geqq 8h_0$ ist, sodann sei bei weiterem Fortgang h_2 die erste, welche $\geqq 8^2 h_1$ ist, sodann sei weiter h_3 die erste, welche $\geqq 8^3 h_2$ ist. U. s. w. Dabei soll h_0 die in (5.) besprochene Constante vorstellen. Wir haben alsdann die Formeln:

(9.) $h_1 \geqq 8 h_0, \quad h_2 \geqq 8^2 h_1, \quad h_3 \geqq 8^3 h_2,$ etc. etc.

Hieraus folgt sofort:

$$(10.)\quad \begin{aligned} &\frac{h_0}{h_1} = \frac{\vartheta_1}{8}, \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{\vartheta_2}{8^2}, \quad \frac{h_2}{h_3} = \frac{\vartheta_3}{8^3}, \text{ etc. etc.,} \\ &\frac{h_n}{h_{n+1}} = \frac{\vartheta_{n+1}}{8^{n+1}}, \quad \frac{h_{n+1}}{h_{n+2}} = \frac{\vartheta_{n+2}}{8^{n+2}}, \text{ etc. etc.,} \end{aligned}$$

wo sämmtliche ϑ *positive ächte Brüche* vorstellen. Denn nach (5.) ist h_0 *positiv*; und Gleiches gilt daher auch von h_1, h_2, h_3, ... Aus den Formeln (10.) folgt nun weiter durch Multiplication:

$$(11.)\quad \begin{aligned} &\frac{h_0}{h_1} = \frac{\vartheta_1}{8}, \quad \frac{h_0}{h_2} = \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{8.8^2}, \quad \frac{h_0}{h_3} = \frac{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}{8.8^2.8^3}, \text{ etc. etc.,} \\ &\frac{h_n}{h_{n+1}} = \frac{\vartheta_{n+1}}{8^{n+1}}, \quad \frac{h_n}{h_{n+2}} = \frac{\vartheta_{n+1}\vartheta_{n+2}}{8^{n+1}.8^{n+2}}, \quad \frac{h_n}{h_{n+3}} = \frac{\vartheta_{n+1}\vartheta_{n+2}\vartheta_{n+3}}{8^{n+1}.8^{n+2}.8^{n+3}}, \text{ etc. etc.} \end{aligned}$$

Ferner folgt aus (11.):

$$(12.)\quad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \cdots = \frac{1}{h_0}\left(\frac{\vartheta_1}{8} + \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{8.8^2} + \frac{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}{8.8^2.8^3} + \cdots\right).$$

Nachdem in solcher Weise, in Anlehnung an das gewählte ϵ, die g_1, g_2, g_3, ... und h_1, h_2, h_3, ... und ebenso auch die ϑ's in völlig bestimmter Weise definirt sind, wollen wir nun an die h_1, h_2, h_3, ... eine neue Constantenreihe j_1, j_2, j_3, ... sich anlehnen lassen. Während aber g_1, g_2, g_3, ... und h_1, h_2, h_3, ... lauter positive ganze Zahlen sind, sollen j_1, j_2, j_3, ... diesen Charakter *nicht* mehr besitzen, vielmehr der Constantenreihe (3.):

$$(13.)\quad \ldots\ldots (S-2),\ (S-1),\ S,\ (S+1),\ (S+2),\ \ldots\ldots$$

angehören. Und zwar sei, beim Fortgange von Links nach Rechts, j_1 die erste dieser Constanten (13.), welche $\geqq j_0 \frac{h_1}{h_0}$ ist; sodann sei bei weiterem Fortgange j_2 die erste dieser Constanten, welche $\geqq j_1 \frac{h_2}{h_1}$ ist. Sodann sei weiter j_3 die erste jener Constanten, welche $\geqq j_2 \frac{h_3}{h_2}$ ist. U. s. w. Dabei soll das j_0 die früher besprochene Bedeutung (5.) besitzen. Alsdann ergiebt sich z. B., was j_1 betrifft, die Formel:

$$(j_1 - 1) < j_0 \frac{h_1}{h_0} \leqq j_1.$$

Hieraus folgt:

$$-1 < \left(j_0 \frac{h_1}{h_0} - j_1\right) \leqq 0,$$

oder, falls man mit (-1) multiplicirt:

$$1 > \left(j_1 - j_0 \frac{h_1}{h_0}\right) \geqq 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$j_1 - j_0 \frac{h_1}{h_0} = \Theta_1,$$

wo Θ_1 einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Dividirt man die letzte Formel durch h_1, so erhält man die erste Gleichung des folgenden Systems:

$$(14.)\quad \begin{aligned} \frac{j_1}{h_1} - \frac{j_0}{h_0} &= \frac{\Theta_1}{h_1}, \\ \frac{j_2}{h_2} - \frac{j_1}{h_1} &= \frac{\Theta_2}{h_2}, \\ &\text{etc. etc.,} \\ \frac{j_n}{h_n} - \frac{j_{n-1}}{h_{n-1}} &= \frac{\Theta_n}{h_n}, \\ &\text{etc. etc.,} \end{aligned}$$

dessen übrige Gleichungen sich in analoger Weise ergeben. Dabei sind sämmtliche Θ *positive ächte Brüche.* Aus (14.) folgt durch Addition:

$$(15.)\quad \frac{j_n}{h_n} - \frac{j_0}{h_0} = \frac{\Theta_1}{h_1} + \frac{\Theta_2}{h_2} + \cdots\cdots + \frac{\Theta_n}{h_n}.$$

Die Reihe rechts convergirt für $n = \infty$ gegen eine *bestimmte feste Grenze*, wie solches aus (12.) ersichtlich ist. Demgemäss gilt Gleiches auch von dem links stehenden Quotienten $\frac{j_n}{h_n}$. Bezeichnet man aber die *feste Grenze*, gegen welche dieser Quotient bei wachsendem n convergirt, mit Ω:

$$(16.)\quad \Omega = \lim_{n=\infty} \frac{j_n}{h_n},$$

so ergiebt sich aus (15.):

$$(17.)\quad \Omega - \frac{j_0}{h_0} = \frac{\Theta_1}{h_1} + \frac{\Theta_2}{h_2} + \cdots + \frac{\Theta_n}{h_n} + \frac{\Theta_{n+1}}{h_{n+1}} + \cdots\cdots \textit{in inf.}$$

Nunmehr folgt aus (15.), (17.) durch Subtraction, und falls man zugleich mit h_n multiplicirt:

$$h_n \Omega - j_n = \Theta_{n+1} \frac{h_n}{h_{n+1}} + \Theta_{n+2} \frac{h_n}{h_{n+2}} + \Theta_{n+3} \frac{h_n}{h_{n+3}} + \cdots \textit{ in inf.},$$

oder, mit Rücksicht auf (11.),

$$h_n \Omega - j_n = \Theta_{n+1} \frac{\vartheta_{n+1}}{g^{n+1}} + \Theta_{n+2} \frac{\vartheta_{n+1}\,\vartheta_{n+2}}{g^{n+1}.g^{n+2}} +$$

$$+ \Theta_{n+3} \frac{\vartheta_{n+1}\,\vartheta_{n+2}\,\vartheta_{n+3}}{g^{n+1}.g^{n+2}.g^{n+3}} + \cdots \textit{ in inf.}$$

Und hieraus endlich folgt sofort:

(18.) $$\lim_{n=\infty} (h_n \Omega - j_n) = 0.$$

Nachdem in solcher Weise in Anlehnung an das gewählte ε die Constanten g, h, j, Ω, wie auch die ϑ, Θ in ganz bestimmter Weise gebildet, und einige Eigenschaften dieser Constanten durch Formeln ausgedrückt sind, kehren wir zurück zu den ursprünglich gegebenen Constanten β. Diese β sind nach (4) von solcher Beschaffenheit, dass für *jedwedes* x die Formel stattfindet:

(19.) $$\lim_{n=\infty} \beta_n f(nx) = 0.$$

Es wird also z. B. diese Formel auch dann stattfinden, wenn man $x = \Omega L$ setzt; so dass man also erhält:

(20.) $$\lim_{n=\infty} \beta_n f(n \Omega L) = 0.$$

Nun können wir z. B. das n in *der* Art unendlich werden lassen, dass wir dasselbe successive $= h_1, h_2, h_3, \ldots$ machen; denn die $h_1, h_2, h_3, \ldots$ sind ins Unendliche aufsteigende positive ganze Zahlen, wie solches aus ihrer Definition sich ergiebt. Somit erhalten wir:

$$\lim_{n=\infty} \beta_{h_n} f(h_n \Omega L) = 0,$$

oder, was identisch dasselbe ist:

(21.) $$\lim_{n=\infty} \beta_{h_n} f(j_n L + [h_n \Omega - j_n] L) = 0.$$

Bezeichnet man nun für den Augenblick jede von n abhängende Grösse, die bei unendlich wachsendem n gegen 0 convergirt, mit ξ_n resp. mit ψ_n, χ_n, ..., so ist nach (18.):

$$h_n \Omega - j_n = \xi_n,$$

und folglich nach (21.):

(22.) $$\beta_{h_n} f(j_n L + \xi_n L) = \psi_n.$$

Die j_n gehören sämmtlich zur Reihe (3.), unterscheiden sich

also von der gegebenen Constante S nur durch *ganze* Zahlen. Demgemäss ist also z. B.:

$$j_n L = (S + J_n) L = SL + J_n L,$$

wo J_n eine *ganze* Zahl vorstellt. Substituirt man aber diesen Werth von $j_n L$ in (22.), und beachtet, dass die Constante L die Periodenlänge der Function $f(x)$ bezeichnet, dass mithin für jedwedes x die Formel stattfindet: $f(x+J_n L) = f(x)$, so erhält man;

$$\beta_{h_n} f(SL + \xi_n L) = \psi_n. \tag{23.}$$

Nun ist aber nach (2.a)

$$f(SL) = B,$$

wo B eine von 0 verschiedene Constante vorstellt. Auch ist $f(x)$ nach unserer Voraussetzung eine *stetige* Function, mithin:

$$f(SL + \xi_n L) = B + \chi_n.$$

Dies in (23.) substituirt, ergiebt sich:

$$\beta_{h_n} (B + \chi_n) = \psi_n, \tag{24.}$$

wo ψ_n und χ_n Grössen vorstellen, die mit unendlich wachsendem n gegen 0 convergiren, während B eine feste und von 0 verschiedene Constante bezeichnet. Demgemäss folgt aus der Formel (24.) sofort, dass die Grösse β_{h_n} bei unendlich wachsendem n ebenfalls gegen 0 convergirt; sodass man also die Formel erhält:

$$\lim_{n=\infty} \beta_{h_n} = 0. \tag{25.}$$

Diese Formel (25.) sagt aus, dass die $\beta_{h_1}, \beta_{h_2}, \beta_{h_3}, \ldots,$ bei weiterem Fortgange, sich *in infinitum* der 0 nähern, und dass es also z. B. unter diesen β_h auch solche geben muss, die ihrem absoluten Betrage nach *kleiner* sind als das von uns zu Anfang gewählte ε. Die β_h sind aber nur Individua aus der Classe der β_g.*) Wir kommen demgemäss also zu dem Resultat, dass in dieser Classe der β_g gewisse Individua vorhanden sein müssen, die ihrem absoluten Betrage nach *kleiner* als jenes ε sind.

Dies Resultat aber ist *absurd*. Denn wir sind ausgegangen von der Voraussetzung des *dritten* Falles (7.c); und die β_g sind

---

*) Die $h_1, h_2, h_3, \ldots$ sind nämlich nach ihrer Definition bestimmte Individuen aus der Reihe $g_1, g_2, g_3, \ldots$. Und dementsprechend sind also auch die $\beta_{h_1}, \beta_{h_2}, \beta_{h_3}, \ldots$ zu bezeichnen als Individua aus der Reihe $\beta_{g_1}, \beta_{g_2}, \beta_{g_3}, \ldots$.

also, zufolge ihrer dortigen Definition, dem absoluten Betrage nach durchweg *grösser* als jenes ε.

So sehen wir also, dass die Annahme des *dritten* Falles (7.c) zu einem *Absurdum* hinleitet, dass mithin dieser dritte Fall *unmöglich* ist. Es bleiben also als möglich nur übrig der *erste* und *zweite* Fall. Und wir gelangen daher mit Rücksicht auf die in (7.a, b) gegebene Charakterisirung dieser beiden Fälle zu folgendem Resultat:

Ist ε ein *ad libitum* gewählter Kleinheitsgrad, und denkt man sich mit Rücksicht auf dieses ε die gegebenen Constanten

(26.) $$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots \textit{ in inf.}$$

eingetheilt in die *höheren* und *tieferen* β's, so wird sich stets eine *endliche* positive ganze Zahl N angeben lassen von solcher Beschaffenheit, dass die Grössen

(26.a) $$\beta_N, \beta_{N+1}, \beta_{N+2}, \beta_{N+3}, \ldots \textit{ in inf.}$$

durchweg zu den *tieferen* β's gehören*).

Oder genauer ausgedrückt: *Es wird sich, falls ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad vorstellt, stets eine endliche positive ganze Zahl N angeben lassen, von solcher Beschaffenheit, dass die Constanten* (26.a) *ihrem absoluten Betrage nach durchweg $\leqq \varepsilon$ sind.* Demgemäss sehen wir also, dass die ursprünglich gegebenen Constanten (26.) der Formel entsprechen

$$\lim_{n=\infty} \beta_n = 0,$$

und gelangen daher zu folgenden Theorem:

Theorem. — *Versteht man unter $f(x)$ eine beliebig gegebene Function, welche stetig und periodisch ist, ferner unter*

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \textit{ in inf.}$$

beliebig gegebene Constanten, und ist bekannt, dass für jedwedes x die Formel stattfindet:

(27.) $$\lim_{n=\infty} \beta_n f_n(x) = 0,$$

so folgt hieraus mit Nothwendigkeit, dass

(28.) $$\lim_{n=\infty} \beta_n \textit{ ebenfalls } = 0 \textit{ ist.}$$

---

*) Diese Zahl N ist nämlich $= 1$ im Falle (7.a), anderseits $= (G + 1)$ im Falle (7.b), wo G die in (7.b) angegebene Bedeutung besitzt.

§ 6.

Fortsetzung. Weitere Ausdehnung des erhaltenen Resultates.

Die in diesem Satz gemachte Voraussetzung, dass die Formel (27.) stattfinden solle für *jedwedes* x, ist für die Gültigkeit des Satzes nicht in vollem Umfange erforderlich. In der That lässt sich zeigen, dass der soeben ausgesprochene Satz auch dann noch in Kraft bleibt, wenn die Formel (27.) nur erfüllt ist für *solche* x, die (geometrisch ausgedrückt) ein kleines Linienstück stetig erfüllen. In der That gilt folgendes

Allgemeineres Theorem. — *Versteht man unter $f(x)$ eine beliebig gegebene Function, welche stetig und periodisch ist, ferner unter*

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

beliebig gegebene Constanten, endlich unter $x_1 < x_2$ ebenfalls zwei beliebig gegebene Constanten, und ist bekannt, dass die Formel

$$\lim_{n=\infty} \beta_n f(nx) = 0 \tag{29.}$$

stattfindet für jedwedes der Bedingung $x_1 < x < x_2$ entsprechende x, so folgt hieraus mit Nothwendigkeit, dass

$$\lim_{n=\infty} \beta_n \text{ ebenfalls } = 0 \text{ ist.} \tag{30.}$$

Der Beweis dieses Satzes lässt sich in genau derselben Weise führen, wie der des vorhergehenden Satzes (27.), (28.); nur mit dem einen Unterschiede, dass in diesem Fall die Constanten h_0 und j_0 nicht mehr beliebig, sondern mit Rücksichtnahme auf die gegebenen Constanten x_1 und x_2 zu fixiren sind. Und zwar sind h_0 und j_0 in diesem Fall so zu wählen, dass den Gleichungen entsprochen wird:

$$\begin{aligned} x_1 &= L\frac{j_0-1}{h_0}, \\ x_2 &= L\frac{j_0+1}{h_0}, \end{aligned} \tag{31.}$$

woraus sich ergiebt:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{2L}{x_2-x_1}, \\ j_0 &= \frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}. \end{aligned} \tag{31.a}$$

Dabei bezeichnet L, ebenso wie wie früher, die Periodenlänge der gegebenen Function $f(x)$, also eine gegebene *positive* Constante. Beiläufig zeigen die Formeln (31.a), dass von den so determinirten Constanten h_0 und j_0 *die erstere positiv und* > 0 *ist.* Denn L ist positiv, und $x_2 - x_1$ ebenfalls, weil nach der in unserem Satze gemachten Voraussetzung $x_1 < x_2$ sein soll.

Wiederholt man nun, nach Festsetzung dieser Constanten h_0 und j_0, Schritt für Schritt genau dieselben Betrachtungen wie vorhin S. 21—25, so erhält man genau dieselben Formeln wie damals, bis zu den Formeln (19.), (20.) hin auf S. 25. Denn der Uebergang von (19.) zu (20.) ist offenbar im gegenwärtigen Falle nicht mehr erlaubt, oder bedarf wenigstens noch einer besonderen Motivirung. Um näher hierauf einzugehen, wiederholen wir zunächst die Formel (17.):

$$\Omega - \frac{j_0}{h_0} = \frac{\Theta_1}{h_1} + \frac{\Theta_2}{h_2} + \frac{\Theta_3}{h_3} + \cdots \text{ in inf.}$$

Wir können dieselbe auch so schreiben:

$$h_0\Omega - j_0 = \Theta_1 \frac{h_0}{h_1} + \Theta_2 \frac{h_0}{h_2} + \Theta_3 \frac{h_0}{h_3} + \cdots \text{ in inf.}$$

oder, mit Rücksicht auf (11.) auch so:

$$h_0\Omega - j_0 = \Theta_1 \frac{\vartheta_1}{8} + \Theta_2 \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{8.8^2} + \Theta_3 \frac{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}{8.8^2.8^3} + \cdots \text{ in inf.}$$

Hieraus aber folgt, weil die ϑ, Θ lauter positive ächte Brüche sind, sofort:

$$\text{abs}\,(h_0\Omega - j_0) < \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \cdots + \text{in inf.}\right),$$

diese Formel kann man auch so schreiben: $\text{abs}\,(h_0\Omega - j_0) < \frac{1}{7}$. Folglich ist:

$$-\frac{1}{7} < (h_0\Omega - j_0) < +\frac{1}{7}.$$

Hieraus folgt weiter

$$j_0 - \frac{1}{7} < h_0\Omega < j_0 + \frac{1}{7},$$

mithin *a fortiori*:

$$j_0 - 1 < h_0\Omega < j_0 + 1,$$

oder, falls man mit $\frac{L}{h_0}$ multiplicirt, und dabei beachtet, dass L und h_0 beide *positiv* sind:

$$\frac{(j_0-1)L}{h_0} < \Omega L < \frac{(j_0+1)L}{h_0},$$

also mit Rücksicht auf (31.):

(32.) $$x_1 < \Omega L < x_2.$$

Nun soll aber für *jedwedes* der Bedingung $x_1 < x < x_2$ entsprechende x die Formel (29.) stattfinden. Und es muss daher diese Formel, wie aus (32.) folgt, z. B. auch stattfinden für den Specialwerth $x = \Omega L$. Demgemäss ergiebt sich:

(33.) $$\lim_{n=\infty} \beta_n f(n\Omega L) = 0.$$

Demgemäss ist also die Richtigkeit jener früheren Formel (20.) S. 25 im gegenwärtigen Falle ebenfalls constatirt. Und wir übersehen nun sofort, dass von (20.) aus all' unsere früheren Betrachtungen S. 25—27 in völlig ungeänderter Weise von Neuem wiederholt werden können, und dass man in solcher Art zu dem Beweise des zuletzt aufgestellten *allgemeineren* Theorems (29.), (30.) hingelangt. *Q. e. d.*

§ 7.

Ueber die Potentialfunctionen einer Kreisfläche.

Es sei F eine Function von (x, y), welche mit Bezug auf eine um den Anfangspunct mit dem Radius R beschriebene Kreisfläche folgende Eigenschaften besitzt:

(I.) *Die Werthe von F sind auf der ganzen Kreisfläche, ihren Rand miteingeschlossen, überall stetig.*

(II.) *Für jedweden Punct (x, y), der innerhalb der Kreisfläche (also nicht etwa hart am Rande derselben) liegt, sind F, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, ... stetig, und $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$ gleich Null.*

Wir wollen die Polarcoordinaten der *inneren* Puncte mit (r, φ), die der *Rand*puncte mit (R, φ) bezeichnen, also für die ersteren Puncte

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

für die letzteren:

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi$$

setzen, wo $r < R$ ist, und R den Radius der Kreisfläche vor-

stellt. Und denentsprechend wollen wir die Function F mit $F(r, \varphi)$ bezeichnen. Alsdann gilt, wie ich in § 2 (Berichte von 1881, S. 15) gezeigt habe, folgender Satz:

(A.) Sind längs des Randes der Kreisfläche irgend welche stetig zusammenhängende Werthe $f(\varphi)$ vorgeschrieben, so kann stets nur *eine* Function $F(r, \varphi)$ existiren, welche den Bedingungen (I.), (II.) entspricht, und welche ausserdem am Rande die vorgeschriebenen Werthe $f(\varphi)$ besitzt.

Vergegenwärtigt man sich den damals von mir für diesen Satz (in § 2) gegebenen Beweis, so entsteht fast von selber die Vermuthung, dass man in genau derselben Art auch *folgenden* Satz beweisen könne:

(B.) Sind am Rande der Kreisfläche irgend welche stetig zusammenhängende Werthe $f(\varphi)$ vorgeschrieben, so kann immer nur *eine* Function $F(r, \varphi)$ existiren, welche die Bedingungen (II.) erfüllt*), und welche ausserdem für jedwedes φ der Formel

$$\lim_{r=R} F(r, \varphi) = f(\varphi)$$

entspricht.

Denkt man sich nämlich irgend eine den Anforderungen dieses Satzes (B.) entsprechende Function $F(r, \varphi)$ wirklich construirt**), bezeichnet man ferner *alle* Puncte der gegebenen Kreisfläche, ihren Rand einbegriffen, mit x, und versteht man unter U_x für jeden *inneren* Punct x das demselben zugehörige $F(r, \varphi)$, andererseits für jeden *Rand*punct x das demselben zukommende $f(\varphi)$, — so lassen sich auf dieses Werthsystem U_x Schritt für Schritt dieselben Betrachtungen anwenden, welche in § 2 mit Bezug auf die F_x angestellt sind. Und diese Betrachtungen, welche bei ihrer Anwendung auf die F_x zum Satze (A.) führten, werden alsdann bei ihrer Anwendung auf die U_x zum Satze (B.) hinleiten.

Dabei ist indessen übersehen, dass die früheren F_x und

---

*) Ich sage: »die Bedingungen (II.)«; — *nicht* (I.) und (II.).

**) Dass mindestens *eine* Function $F(r, \varphi)$ analytisch construirbar ist, welche den Anforderungen des Satzes (B.) entspricht, geht aus § 1 (Berichte von 1881) ohne Weiteres hervor. Fraglich bleibt dabei aber, ob ausser dieser *einen* Function $F(r, \varphi)$ noch *andere* derartige Functionen existiren.

die gegenwärtigen U_x einander nicht völlig parallel stehen. Denn jene in § 2 behandelten F_x sind (ihrer dortigen Definition zufolge) auf der Kreisfläche, inclusive des Randes, *überall stetig*, und besitzen daher auf der Kreisfläche einen *bestimmten Maximalwerth*. Bei den gegenwärtigen U_x hingegen, welche theils durch die $F(r, \varphi)$, theils durch die $f(\varphi)$ definirt sind, ist die Existenz eines solchen *bestimmten Maximalwerthes* nicht ohne Weiteres klar, sondern fraglicher Natur, und jedenfalls noch des Beweises bedürftig. Hiermit aber hängt zusammen, dass jene in § 2 bei den F_x angestellten Ueberlegungen, welche sich auf die Existenz eines bestimmten Maximums der F_x wesentlich stützen*), *nicht ohne Weiteres auf die U_x übertragbar sind.*

Nehmen wir für den Augenblick an, es sei auf irgend welchem Wege gelungen, *die Existenz eines bestimmten Maximums* der U_x wirklich nachzuweisen, so würde alsdann durch die Betrachtungen des § 2 nicht nur der Satz (A.), sondern gleichzeitig auch der Satz (B.) bewiesen, und hiermit den Untersuchungen des nächstfolgenden § 3 die ausreichende Grundlage gegeben sein.

Demgemäss ist in Betreff meines früheren Aufsatzes (von 1881) Folgendes hinzuzufügen: *Die dortigen* § 1 *und* § 2 *sind völlig correct. Hingegen ist in dem* § 3 *insofern ein gewisser Defect vorhanden, als derselbe auf dem noch unbewiesenen Satze* (B.) *beruht. Gelänge es, diesen noch fraglichen Satz* (B.) *wirklich zu beweisen, so würden hierdurch die Betrachtungen des* § 3 *ihr ausreichendes Fundament erhalten, und zu den dort angegebenen Endresultaten* [(25.), (26.) S. 22] *in legitimer Weise hinleiten.*

Es dreht sich also Alles nur um den noch fraglichen Satz (B.). *Dieser aber würde vollständig bewiesen sein, wenn es gelänge zu zeigen, dass die vorhin genannten Werthe U_x ein bestimmtes Maximum besitzen.*

Möglicherweise ist es bequemer, den Satz (B.) *in anderer Art zu beweisen. Und mit Bezug hierauf sei bemerkt, dass man denselben leicht auf einfachere Sätze reduciren kann, z. B. auf die Sätze* (C.) *und* (D.), *von denen im folgenden Paragraphen* (§ 8) *die Rede sein soll.*

---

*) In der That heisst es z. B. in jenem § 2 auf S. 13: »Existirt also *überhaupt* unter den Werthen F_x einer, der alle übrigen an Grösse übertrifft (*und das wird immer der Fall sein*, wenn nicht etwa F auf der ganzen Kreisfläche constant ist), so muss« etc. etc.

Einstweilen ist jedenfalls der Satz (B.) *als ein noch unbewiesener Satz zu bezeichnen, also als ein Satz, der möglicherweise auch falsch sein kann.*

Aus den Darlegungen des gegenwärtigen §. sind zugleich diejenigen Überlegungen und Schlussfolgerungen zu ersehen, welche mich bei der Niederschrift meines Aufsatzes von 1881 *in Wirklichkeit* geleitet haben. So z. B. erinnere ich mich mit Bestimmtheit, dass mir bei der Ausarbeitung des § 3 die Sätze (A.) und (B.) *gleichzeitig* vorschwebten. Ich hielt es damals nicht für besonders nothwendig, zwischen diesen beiden Sätzen zu unterscheiden, weil ich damals der Ansicht war, dass der eine wie der andere mit genau denselben Mitteln sich beweisen liesse, oder genauer ausgedrückt, weil ich damals auf den *Existenzbeweis* für ein bestimmtes Maximum der F_x resp. der U_x noch kein sonderliches Gewicht legte. Wie nothwendig ein solcher Existenzbeweis in Wirklichkeit ist, habe ich erst später erkannt aus den vielen *vergeblichen* Bemühungen, denen ich mich nachträglich zur Auffindung eines solchen Beweises unterzogen habe.

Schliesslich habe ich Herrn *Cantor*, der mich auf das Mangelhafte meiner Schlussfolgerungen im § 3 meines Aufsatzes (von 1881) durch mehrere briefliche Mittheilungen (vom April 1882) aufmerksam zu machen die Güte hatte, hiefür meinen ganz besondern Dank auszudrücken. Es wird mir stets erwünscht sein, etwaige Incorrectheiten in meinen Publicationen entweder zu berichtigen, oder, wo dies nicht möglich sein sollte, wenigstens als solche zu bezeichnen. Und ich wünschte nur, dass andere Autoren betreffs *ihrer* Publicationen nach dieser Richtung hin dieselbe Bereitwilligkeit an den Tag legen möchten.

§ 8.
Beiläufige Bemerkungen.

Der vorhin aufgestellte und *noch fragliche* Satz (B.) nimmt für den Specialfall $f(\varphi) = 0$ die einfachere Gestalt an:

(C.) Mit Bezug auf die gegebene Kreisfläche kann stets nur *eine* Function $F(r, \varphi)$ existiren, welche den Bedingungen (II.) Genüge leistet, und ausserdem für jedwedes φ der Formel

$$\lim_{r=R} F(r, \varphi) = 0$$

entspricht.

Den in diesem Satze (C.) gestellten Anforderungen wird nun offenbar entsprochen, wenn man die Function $F(r, \varphi)$ *allenthalben* $= 0$ setzt. Und demgemäss kann man also dem Satze (C.) auch folgende Gestalt geben:

(D.) Eine Function $F(r, \varphi)$, welche die Bedingungen (II.) erfüllt, und welche ausserdem für jedwedes φ der Formel

$$\lim_{r=R} F(r, \varphi) = 0$$

entspricht, wird nothwendiger Weise auf der gegebenen Kreisfläche *allenthalben* $= 0$ sein.

Auch bemerkt man sofort, dass die Sätze (B.), (C.), (D.) unter einander *äquivalent* sind. Denn gelingt es z. B. den Beweis des Satzes (D.) zu finden, so würde hiermit der Beweis des Satzes (B.) ebenfalls erbracht sein. Es wäre daher sehr zu wünschen, dass es glücken möchte, diesen durch besondere Einfachheit ausgezeichneten Satz (D.) entweder wirklich zu beweisen, oder aber durch irgend welches Beispiel seine Unrichtigkeit zu documentiren.

Inhaltsübersicht des früheren Theils des Aufsatzes (in den Ber. von 1881).

	Seite
Angabe der von *Cantor* und *Du Bois-Reymond* aufgestellten Sätze	1
§ 1. Aufstellung einer Potentialfunction der Kreisfläche, welche am Rande derselben vorgeschriebene Werthe besitzt	2
§ 2. Es wird gezeigt, dass ausser der gefundenen Potentialfunction keine andere existiren kann, welche am Rande die vorgeschriebenen Werthe besitzt	10
§ 3. Ableitung der (zu Anfang genannten) von *Cantor* und *Du Bois-Reymond* aufgestellten Sätze	15
Nachschrift	22

Inhaltsübersicht des gegenwärtigen Theils des Aufsatzes.

	Seite
§ 4. Ueber trigonometrische Reihen	18
§ 5. Ueber eine gewisse Erweiterung eines *Cantor*'schen Satzes (Crelle's Journal, Bd. 72, S. 135)	19
§ 6. Fortsetzung. Weitere Ausdehnung des soeben erhaltenen Resultats	28
§ 7. Ueber die Potentialfunctionen einer Kreisfläche	30
§ 8. Beiläufige Bemerkungen	33

W. Hankel, *Neue Beobachtungen über die Thermo- und Aktinoelektricität des Bergkrystalles, als Erwiederung auf einen Aufsatz der Herren C. Friedel und J. Curie.* *)

In zwei Abhandlungen (»über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles« 1866 [1]) und »über die aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen« 1881 [2])) sind von mir in Betreff des elektrischen Verhaltens des Bergkrystalles bei Änderung der Temperatur, der auf ihn fallenden Wärmestrahlung und des Druckes folgende Gesetze nachgewiesen worden.

I. Thermoelektricität.

1) Die Bildung der Bergkrystalle ist durch das Auftreten der trigonalen Trapezoeder und der trigonalen Pyramiden eine nach den Nebenaxen hemimorphe.

2) An den beiden Enden jeder der hemimorphen Nebenaxen treten bei Temperaturänderungen entgegengesetzt elektrische Pole auf, so dass am Umfange einfacher Krystalle stets positive und negative Pole abwechseln.

3) Bei steigender Temperatur sind die Polaritäten die umgekehrten wie bei sinkender.

4) Bei sinkender Temperatur liegen die positiven Pole an denjenigen Axenenden, an welchen die Flächen der trigonalen Pyramiden und Trapezoeder auftreten, die negativen an den entgegengesetzten. Bei steigender Temperatur erscheinen die erstgenannten Enden negativ, die zuletzt genannten positiv.

5) Bei ringsum normal ausgebildeten einfachen Bergkrystallen zeigt sich in der Ausbreitung der beiden elektrischen

---

*) Vorgetragen in der Sitzung am 5. März 1883, zum Druck übergeben am 30. März.

1) Abhandl. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XIII. S. 319—392.

2) Ebendas. Bd. XX. S. 457—547.

Polaritäten auf der Oberfläche ein Unterschied, je nachdem die Krystalle zu den sogenannten linken oder rechten gehören. Bei den linken erstrecken sich beim Erkalten im Allgemeinen die negativen Zonen von den grossen Pyramidenflächen des oberen Endes über die Seitenkanten, welche keine trigonalen Gestalten tragen, hinweg zu den am unteren Ende nach rechts gelegenen grossen Pyramidenflächen, während sich die positiven Zonen in gleicher Richtung von den kleinen Pyramidenflächen des oberen Endes über die mit trigonalen Flächen versehenen Kanten zu den am unteren Ende rechts liegenden kleinen Pyramidenflächen hinabziehen. Bei den rechten Krystallen gehen die negativen Zonen von den grossen Pyramidenflächen des oberen Endes über die nicht mit trigonalen Gestalten versehenen Kanten zu den am unteren Ende links liegenden grossen Pyramidenflächen, und die positiven von den kleinen Pyramidenflächen des oberen Endes über die trigonale Gestalten tragenden Kanten zu den links liegenden kleinen Pyramidenflächen des unteren Endes. Eine Umkehrung des Krystalles, wobei das untere Ende zum oberen gemacht wird, lässt selbstverständlich die schiefen Lagen der Zonen ungeändert.

6) Abweichungen von der normalen Bildung haben Änderungen in der Ausbreitung der elektrischen Zonen auf der Oberfläche im Gefolge. Solche Abweichungen entstehen namentlich durch Verwachsungen zweier Individuen. Jedes der in einem scheinbar einfachen Krystalle vorhandenen Individuen zeigt auf seinen an die Oberfläche tretenden Flächenstücken möglichst die denselben entsprechende Polarität.

7) An den Enden der Hauptaxe, nach welcher keine hemimorphe Bildung statt hat, erscheinen ebenfalls elektrische Spannungen, aber von gleicher Art. An normal gebildeten Krystallen sind beide Enden der Hauptaxe beim Erkalten positiv.

8) Bei Temperaturen über 200° verschwindet die während der Erhitzung aufgetretene elektrische Spannung.

II. Aktinoelektricität.

1) Treffen Wärmestrahlungen einen einfachen Bergkrystall, so entstehen an den Enden der hemimorph gebildeten Nebenaxen, also auf den sechs Kanten des Prismas, elektrische Pole.

2) Die elektrische Spannung wächst bei der Bestrahlung

anfangs rasch, dann langsamer, und erreicht in 40 Secunden nach deren Beginn ihr Maximum.

3) In dem gleichen Zeitraume von 40 Secunden verschwinden nach dem Aufhören der Bestrahlung die elektrischen Spannungen, indem sie anfangs rasch, dann langsamer abnehmen.

4) Auf den mit den Flächen der trigonalen Gestalten versehenen Kanten[1]) treten bei der Bestrahlung positive, auf den übrigen drei Kanten negative Pole auf. Bei der Bestrahlung zeigen also die Kanten dieselbe elektrische Polarität, welche sie thermoelektrisch bei der Abkühlung annehmen.

5) Die Richtung, in welcher die Wärmestrahlung den Krystall trifft, ist in Bezug auf die Art der auf den Kanten auftretenden Elektricität gleichgiltig; die Strahlen können selbst parallel mit der Hauptaxe durch den Krystall gehen.

6) Die Quelle, aus welcher die Strahlung kommt, kann jede beliebige sein: Sonnenlicht, elektrisches Kohlenlicht, Gasflamme, Kerzenflamme, mit heissem Wasser gefüllter Metallwürfel, erwärmte Metallkugel u. s. w.

7) Die Stärke der auf derselben Kante eines Krystalles erregten elektrischen Spannung ist proportional der Intensität der Bestrahlung.

8) Die Strahlen, welche die Aktinoelektricität hervorrufen, sind nicht genau dieselben, welche von dem berussten Ende einer Thermosäule absorbirt werden. Bei dem Durchgange durch farblose und gefärbte Glasplatten werden die aktinoelektrischen Strahlen mehr geschwächt, als die auf die Thermosäule wirkenden.

9) Bei zusammengesetzten Krystallen zeigt jedes auf der Oberfläche erscheinende Stück möglichst die ihm entsprechende Polarität.

10) Der Vorgang für die Erzeugung der Aktinoelektricität ist umkehrbar. Beim Annähern oder Auflegen einer kalten Metallkugel auf die Kante eines erhitzten Bergkrystalles entsteht infolge der Strahlung seitens des Krystalles auf die genäherte Kugel eine elektrische Erregung, wie sie thermoelektrisch bei steigender Temperatur sich zeigen würde.

---

1) Oder auf den Kanten, auf welchen die Flächen der trigonalen Gestalten liegen würden, wenn sie vorhanden wären.

III. Piezoelektricität.

1) Bei Ausübung eines Druckes in der Richtung einer Nebenaxe des Bergkrystalles entstehen, wie J. und P. Curie gefunden haben, polarelektrische Spannungen an den Enden dieser Axe, und zwar sind dieselben an den trigonale Gestalten tragenden Kanten negativ, an den anderen positiv. Beim Nachlassen des Druckes treten die entgegengesetzten Polaritäten auf.

2) Ich habe nun gezeigt, dass die in der angegebenen Vertheilung auftretenden Polaritäten der von J. und P. Curie aufgestellten Regel, wonach Druck und Abkühlung (Nähern der Moleküle), und ebenso andererseits Nachlassen des Druckes und Erwärmung (Entfernung der Moleküle von einander) dieselbe Modification der Elektricität hervorrufen sollen, widersprechen.

3) Beim Zusammendrücken in der Richtung der einen Nebenaxe zeigen die Endpunkte der anderen beiden Nebenaxen die einer Ausdehnung entsprechenden Polaritäten; ebenso beim Druck in der Richtung einer Zwischenaxe (Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberliegenden Seitenflächen) die Enden der darauf senkrechten Nebenaxe.

4) Bei zusammengesetzten Krystallen zeigt jedes an der Oberfläche erscheinende Stück möglichst die ihm entsprechende Polarität.

Gegen eine Anzahl der im Vorstehenden aufgeführten Sätze haben nun in einem Aufsatze »Sur la pyroélectricité du quartz«[1]) die Herren C. Friedel und J. Curie Einwendungen erhoben, die sich im Wesentlichen darauf reduciren, dass die von mir angegebene thermoelektrische Vertheilung nur Folge einer unregelmässigen Erkaltung sei, dass die thermoelektrischen Pole auf den Kanten des Bergkrystalles vielmehr das umgekehrte Zeichen erhalten müssen, und sonach die am Bergkrystalle auftretenden piezoelektrischen Vorgänge mit der von Curie aufgestellten Regel übereinstimmen. Schliesslich sollen nach ihnen auch die aktinoelektrischen Vorgänge als besondere nicht existiren, sondern ebenfalls nur unregelmässigen Erhitzungen ihre Entstehung verdanken.

Ich werde indess den strengen Nachweis führen, dass die

---

1) Bulletin de la société minéralogique de France. Decembre 1882. Tome V. p. 282—296.

obigen Einwendungen in jeder Beziehung durchaus unbegründet sind.

Zur Zurückweisung dieser Einwendungen bedürfte es eigentlich nur des Hinweises auf die in meinen Abhandlungen mitgetheilten speciellen Beobachtungen. Da jedoch gerade in der letzten Zeit der Bergkrystall in elektrischer Beziehung vielfach in Anspruch genommen worden, so will ich, um auch nicht das geringste Bedenken gegen meine Versuche und die daraus gezogenen Schlüsse bestehen zu lassen, durch ganz specielle Versuche die Ansichten der Herren Friedel und Curie als irrthümlich nachweisen.

Ad I.

a) Beschaffenheit der thermoelektrischen Pole.

Nach meinen Beobachtungen liegen, wie ich oben angeführt habe, beim Erwärmen die thermoelektrisch positiven Pole auf den Kanten, welche keine trigonalen Gestalten tragen, die negativen auf den mit solchen Flächen versehenen Kanten; beim Erkalten sind die elektrischen Spannungen auf den ersteren Kanten negativ, auf den letzteren positiv. Herr Friedel hat nun in einer früheren Mittheilung [1]) die Beschaffenheit der elektrischen Pole auf den Kanten gerade entgegengesetzt angegeben, und hält diese Ansicht in dem zuvor S. 38 citirten Aufsatze vom Jahre 1882 aufrecht.

Bei meiner ersten, in meiner Habilitationsschrift vom Jahre 1840 veröffentlichten Untersuchung der thermoelektrischen Vorgänge am Bergkrystall hatte ich den Krystall auf einer Metallplatte frei liegend erhitzt und ebenso abkühlen lassen, und zur Bestimmung der elektrischen Spannungen die Spitze eines isolirten, durch einen sehr dünnen Draht mit dem Goldblättchen eines Elektrometers verbundenen Platindrahtes den verschiedenen Punkten der Oberfläche bis zur Berührung genähert. Da jedoch bei diesem Verfahren die Beobachtung der auf dem berührten Flächenstücke vorhandenen Polarität durch die Vertheilungswirkung der auf den benachbarten Theilen befindlichen entgegengesetzten Elektricitäten oft sehr wesentlich gestört

1) Ch. Friedel, sur la pyroélectricité dans la topaze, la blende et le quartz. Bulletin de la Société minéralogique de France. Tome II. 1879. Nr. 2. p. 34.

wurde, so hüllte ich später den Krystall bis auf die zu prüfende Fläche oder Kante in Eisen- oder Kupferfeilicht ein. Hiedurch wurden alle auf den bedeckten Theilen befindlichen elektrischen Spannungen unwirksam gemacht, und es übten nur noch die auf den freien Theilen vorhandenen eine Vertheilung auf den mittelst einer Hebelvorrichtung, jedoch nicht bis zur Berührung, genäherten Draht aus.

Die Herren Ch. Friedel und Curie haben nun nach diesem Verfahren meine Versuche am Bergkrystalle wiederholt, und die von mir gemachten Angaben bestätigt. Sie sagen: »Nous avons obtenu ainsi des résultats s'accordant en général avec ceux de M. Hankel.«

Die auf diese Weise beobachteten Polaritäten sollen nun aber nach der Ansicht der Herren Friedel und Curie nicht wahre thermoelektrische Spannungen darstellen, sondern nur durch eine unregelmässige (irrégulier) Abkühlung des Krystalles hervorgerufene piezoelektrische sein. Die von dem Kupferfeilicht bedeckten seitlichen Theile müssten rascher erkalten, als die frei an der Luft liegenden; infolge dessen trete eine seitliche Zusammenpressung ein, welche in der Richtung der vertical gestellten Nebenaxe eine Ausdehnung und somit eine dieser entsprechende Polarität erzeuge.

Der Unterschied in der Temperatur der freiliegenden, und der bedeckten Theile der Krystalloberfläche lässt sich nun aber sehr vermindern, wenn man den Krystall in eine grössere Menge Kupferfeilicht einsetzt. In einem kupfernen Kasten von 93^{mm} Länge und 85^{mm} Breite wurde ein Bergkrystall[1]) in das Kupferfeilicht so eingesetzt, dass eine Kante[2]) frei blieb, und die in ihr endigende Nebenaxe vertical stand. Die Länge dieser Nebenaxe betrug 23^{mm}; der Abstand der beiden mit ihr parallelen Prismenflächen mass 19^{mm}. Die am untern Ende der vertical gerichteten Nebenaxe befindliche Kante[3]) war 3 bis 4^{mm} von dem Boden des kupfernen Gefässes entfernt, und das Kupferfeilicht in solcher Menge eingeschüttet, dass seine Ober-

1) Es war der in der Abh. von 1881 unter Nr. 4 aufgeführte. Ich werde die prismatischen Seitenflächen, ebenso wie in jener Abhandlung mit den Zahlen 1 bis 6, und die Kanten durch Zusammenstellung der Flächen, welche in ihnen zum Durchschnitt kommen, bezeichnen.

2) Die Kante (1.2).

3) Die Kante (4.5).

fläche im Niveau der freigelassenen Kante lag. Auf jeder Seite der Kante war ein 4 bis 5^{mm} breiter Streifen von dem Feilicht befreit.

Der kupferne Kasten mit seinem Inhalte wurde längere Zeit in einem Ofen auf einer Temperatur von 135° gehalten. Nach dem Herausnehmen drückte ich ein Thermometer mit cylindrischem Gefässe dicht an der einen verticalen Prismenfläche des Krystalles in das Kupferfeilicht, und stellte den Kasten zur Abkühlung auf den Rand eines anderen kupfernen Gefässes. Auf die frei stehende Kante wurden winzig kleine Brocken eines bei 51,8° schmelzenden Stearins gebracht. Als das dicht neben dem Krystall stehende Thermometer 52° zeigte, schmolz das Stearin noch, behielt aber seinen festen Zustand, als das Thermometer 51° angab. Im vorliegenden Falle ist also, selbst unter der Annahme, dass die bedeckte Krystallfläche nicht noch etwas wärmer gewesen als das anliegende Thermometer, der Unterschied zwischen den freien und bedeckten Theilen ein sehr geringer.

Es ist nun aber auch nicht schwer, die Temperaturverhältnisse umzukehren, und die bedeckten Theile wärmer zu erhalten als die freien. Zu diesem Zwecke wurde anstatt des Kupferfeilichts Sand genommen und der Krystall in gleicher Weise eingehüllt. Der Kasten mit seinem Inhalte war längere Zeit einer Temperatur von 90° ausgesetzt gewesen. Als bei der Abkühlung das neben der prismatischen Seitenfläche stehende Thermometer 53° zeigte, schmolz das auf die freie Kante gelegte Stearin nicht mehr. Jetzt waren also die freien Theile kälter als die bedeckten, es musste also umgekehrt wie zuvor, eine Ausdehnung senkrecht zu der vertical gerichteten Nebenaxe, und also nach dieser eine Zusammenziehung stattfinden. Wäre die Meinung der Herren Friedel und Curie richtig, so hätte bei dem im Sande abkühlenden Krystalle auf der frei liegenden Kante die entgegengesetzte Polarität von der auf dem im Kupferfeilicht erkaltenden Krystalle auftreten müssen.

Als nun die Kante auf ihr elektrisches Verhalten untersucht wurde, zeigte sie dieselbe elektrische Spannung, sowohl wenn der Krystall in der oben angegebenen Weise in Kupferfeilicht, als auch, wenn er in Sand eingehüllt ward. Befand sich der Krystall in Sand eingehüllt, so lies sich nicht nur die Elektricität der freiliegenden Kante beobachten, sondern auch links

und rechts neben ihr konnten über dem Sande die entgegengesetzten, den benachbarten Kanten angehörigen elektrischen Spannungen wahrgenommen werden, weil ihre Vertheilungswirkung auf den genäherten Platindraht durch den Sand nicht gehindert wurde.

Sonach hat also der Umstand, ob das freiliegende Flächenstück etwas wärmer oder kälter ist als der bedeckte Theil der Krystalloberfläche, keinen Einfluss auf die nach meinem Verfahren beobachteten thermoelektrischen Spannungen, und es sind dieselben also nicht durch eine unregelmässige Abkühlung hervorgerufene piezoelektrische.

Die Herren Friedel und Curie suchen die Ursache der thermoelektrischen Spannungen allein in dem Auftreten ungleichen Druckes, und kommen zu dem Schlusse, dass die durch eine regelmässige Erhitzung auf seiner Oberfläche entwickelte Elektricitätsmenge auf irgend einer Fläche gleich Null sein müsse[1].

Um diese Folgerung zu prüfen, erhitzten sie einen Bergkrystall längere Zeit auf 180° bis 200°, fassten denselben in eine Pincette, die ihn nur in zwei Punkten berührte, und liessen ihn dann in der Luft frei erkalten, um die Abkühlung möglichst regelmässig (aussi régulièrement que possible) zu gestalten. Als sie dann den Krystall mittelst eines angenäherten Platindrahtes untersuchten, fanden sie keine Elektricität oder nur auf ganz unregelmässige Weise vertheilte Spuren derselben[2], obwohl an dem Elektrometer noch $^1/_{100}$ der Spannung eines Daniell'schen Elementes beobachtet werden konnte.

Dieser Ausspruch setzt mich in Verwunderung; es müssen höchst unglückliche Umstände bei den Versuchen der Herren Friedel und Curie obgewaltet haben, wodurch es ihnen unmöglich geworden, die auf den frei in der Luft erkaltenden Bergkrystallen auftretenden elektrischen Spannungen wahrzunehmen. Ich werde durch specielle Versuche beweisen, dass auf

---

1) Il serait du reste facile d'établir, que la quantité d'électricité dégagée par un échauffement régulier sur une surface quelconque doit de même être nulle.

2) En opérant ainsi nous n'avons point trouvé d'électricité sur les cristaux, ou seulement des traces distribuées d'une façon tout à fait irrégulière. Nous avons opéré de même sur les lames taillées perpendiculairement à l'un des axes d'hémimorphisme et nous n'avons pas davantage trouvé d'électricité.

den frei in der Luft erkaltenden Bergkrystallen elektrische Spannungen entstehen, und dass die Pole gerade dieselbe Lage haben, wie bei der Prüfung der in Kupferfeilicht oder Sand eingehüllten Krystalle. Bei den Beobachtungen auf dem ringsum freien Krystalle kann natürlich der Fall eintreten, dass ein infolge der Bildung des Krystalles schwacher Pol, welcher zwischen zwei entgegengesetzt elektrischen starken oder auch nur neben einem solchen sehr starken Pole liegt, bei der Prüfung mittelst des angenäherten Platindrahtes nicht in seiner eigentlichen Beschaffenheit wahrgenommen werden kann, weil die starken entgegengesetzt elektrischen seitlichen Pole die schwächere Vertheilungswirkung des unterhalb der Spitze des Platindrahtes liegenden überbieten. Wie schon oben erwähnt, ist es gerade dieser Umstand gewesen, der mich zur Einhüllung der Krystalle in eine leitende Substanz bewogen hat.

Ein Bergkrystall [1]) wurde mit seinem unteren Ende mittelst Gummi arabicum auf einem Korke befestigt, und längere Zeit bis 190° erhitzt. Der Kork war unten in der Richtung seiner Axe mit einer Durchbohrung versehen, mittelst welcher er auf einen neben der zur Annäherung des Platindrahtes dienenden Hebelvorrichtung befindlichen horizontalen starken cylindrischen Messingdraht aufgesteckt werden konnte. Der Bergkrystall lag dann mit seiner Hauptaxe horizontal unterhalb des mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbundenen Platindrahtes, und durch Verschieben und Drehen des Messingdrahtes in der Hülse seines Trägers, sowie durch Verschieben der Schlitten der Hebelvorrichtung liess sich mit Leichtigkeit jeder Punkt einer Kante oder Fläche des Krystalles mittelst Annäherung des Platindrahtes auf seine elektrische Spannung untersuchen. Die Empfindlichkeit des Elektrometers war so gross, dass die Spannung an dem einen Pole eines Daniell'schen Elementes, dessen anderer Pol zur Erde abgeleitet war, einen Ausschlag des Goldblättchens von 39 Skalentheilen hervorbrachte ($D = 39$). [2])

Ich will der Kürze wegen nur die auf einem in halber Höhe durch den Krystall gelegten Querschnitte beobachteten elektri-

---

1) Der in meiner Abhandlung von 1866 mit Nr. IV bezeichnete und auf Tafel I unter Fig. 9 und 10 abgebildete. Die Seitenflächen sind oben mit denselben Ziffern bezeichnet, wie in jener Abhandlung.

2) In dieser Weise $D = 39$ werde ich im Folgenden kurz die Empfindlichkeit des Elektrometers bezeichnen.

schen Spannungen anführen. Es werde der linke Endpunkt einer Seite dieses Querschnittes mit *d*, die Mitte derselben mit *e*, und der rechte Endpunkt mit *f* bezeichnet. Der Punkt *f* der Fläche 1 und der Punkt *d* der Fläche 2 liegen also dicht neben der Mitte der Kante (1.2). Die folgende Tabelle gibt die auf den verschiedenen Punkten dieses Querschnittes einige Zeit nach dem Beginn des Erkaltens beobachteten elektrischen Spannungen.

	d	*e*	*f*	Kante (Mitte)
Fläche 1.	—21	—21	+42	(1.2)+50
- 2.	+62	#[1]	+13	(2.3)+ 8
- 3.	— 4	+13	#	(3.4) #
- 4.	#	#	— 7	(4.5)—11
- 5.	—40	—37	+21	(5.6)+29
- 6.	+53	#	—48	(6.1)—33

Der auf die Kante (2.3) fallende negative Pol vermag nur am linken Rande der Fläche 3 aufzutreten; auf der Kante (2.3) selbst gibt er sich nur durch die geringe Stärke der positiven Spannung kund.

Ein anderer Bergkrystall[2]) wurde ebenso behandelt, und die folgenden Spannungen beobachtet.

	d	*e*	*f*	Kante (Mitte)
Fläche 1.	=	+ 5	+50	(1.2)+44
- 2.	+44	—32	=	(2.3)—70[3])
- 3.	—68	+42	+70	(3.4)+70
- 4.	#	+37	+28	(4.5)+35
- 5.	+53	#	+45	(5.6)+22
- 6.	+13	—38	=	(6.1) =

Bei diesem Krystalle vermag auf der Kante (4.5) die ihr entsprechende negative Spannung nicht sichtbar zu werden:

---

1) Die Zeichen # und = bedeuten eine so starke elektrische Spannung, dass das Goldblättchen ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskops hinaus getrieben wurde.

2) Der in der Abh. von 1881 mit Nr. 4 bezeichnete und in Fig. 4 auf Taf. I derselben abgebildete Krystall.

3) Die Mikrometerskale enthielt beiderseits nur 50 Sktb.; blieb das Goldblättchen überhaupt noch sichtbar, so wurden die grösseren Ausschläge als 50 nur geschätzt.

dieselbe tritt aber sehr bestimmt auf, wenn der Krystall bis auf diese Kante in Kupferfeilicht eingesetzt wird.

Die beiden mitgetheilten Beobachtungsreihen werden genügen, um die Behauptung der Herren Friedel und Curie, dass auf der Oberfläche eines regelmässig erkaltenden Bergkrystalles elektrische Spannungen theoretisch nicht zu erwarten wären und auch thatsächlich sich nicht zeigten, als unbegründet zu widerlegen. Der mit seinem unteren Ende an dem sehr schlecht leitenden Korke befestigte Bergkrystall kühlte sich sicherlich noch regelmässiger ab, als der in der metallischen Pincette an zwei Punkten gefasste.

Aus allen im Vorstehenden angeführten Versuchen ergibt sich also das unumstössliche Resultat, dass die von mir angegebene thermoelektrische Vertheilung in Wirklichkeit vorhanden ist.

b) Verbreitung der elektrischen Polaritäten auf der Oberfläche der Bergkrystalle.

Oben S. 36 habe ich die eigenthümlich schief von oben nach unten gehende Richtung der elektrischen Zonen auf kurzen ringsum normal ausgebildeten Bergkrystallen beschrieben, und angegeben, wie diese Richtung bei den sogenannten rechten und linken Krystallen verschieden ist. Die Herren Friedel und Curie meinen, dass ich durch eine vorgefasste Idee über einen Zusammenhang der plagiedrischen Hemiedrie und der nicht deckbaren rechten und linken Gestalten mit den elektrischen Erscheinungen zu jenem Ausspruche gekommen sei. Diese Äusserung muss ich jedoch mit aller Bestimmtheit zurückweisen; nicht eine vorgefasste Idee, sondern die Betrachtung der auf dem Krystall Nr. XI (einem sogenannten linken) meiner ersten Abhandlung (1866) beobachteten und in das Taf. II Fig. 29 gezeichnete Netz desselben eingetragenen elektrischen Spannungen wies deutlich auf die schiefe Lage der elektrischen Zonen hin, und die Vergleichung dieser Vertheilung mit der auf Taf. I. Fig. 4 derselben Abhandlung abgebildeten Vertheilung auf einem rechten Krystalle zeigte hinlänglich den Unterschied in der Richtung der elektrischen Zonen bei linken und rechten Bergkrystallen. Eben diese schiefe, mit dem Gegensatze von rechten und linken Krystallen zusammenhängende Richtung be-

stätigen auch die in die Netze der Krystalle Nr. 1, 2 und 3 der zweiten Abhandlung (1882) eingetragenen Beobachtungen.

Jedem, der die in diese Krystallnetze eingetragenen Beobachtungen betrachtet, muss der Unterschied zwischen sogenannten rechten und linken Krystallen auffallen, und ich kann mich daher hier mit einer Hinweisung auf jene Zeichnungen vollständig begnügen; und dies um so mehr, da auch die Herren Friedel und Curie die gedrehte Lage der Zonen auf den ringsum ausgebildeten Krystallen mit kleinen Prismenflächen anerkennen: nur scheint sie ihnen rein zufällig und vielleicht aus der äusseren Form der Pyramiden und aus der daraus entstandenen Ungleichheit der Temperatur hervorgegangen zu sein. Nun, die Anzahl der in beiden Abhandlungen gegebenen zuvor angeführten Abbildungen der eben bezeichneten Krystalle dürfte hinreichen, um blosse Zufälligkeit auszuschliessen.

Dass durch die Einschiebung längerer Prismenflächen und durch eine infolge kleinerer eingefügter um 180° gedrehter Stücke bewirkte anomale Ausbildung der Pyramidenflächen die schiefe Lage mehr oder weniger undeutlich wird, ist wohl selbstverständlich.

Aus der angegebenen Verbreitung der beiden Elektricitäten auf der Oberfläche der ringsum normal ausgebildeten Krystalle folgt nicht, dass die elektrischen Axen nur Axen im geometrischen Sinne sein können. Der Bergkrystall ist in der Richtung seiner Nebenaxen hemimorph, und infolge dieser Bildung ist wohl zu erwarten, dass ebenso wie beim Turmalin jedes Bruchstück in der Richtung der hemimorphen Axen seine Pole bewahrt[1]. Dieser Satz gilt aber nicht mehr für das thermoelektrische Verhalten symmetrischer Substanzen, bei denen, wie ich an vielen Beispielen (Topas, Schwerspath, Apophyllit, Brucit, Gyps, Orthoklas, Pennin u. s. w.) gezeigt habe, die elektrische Vertheilung auf Bruchstücken eine andere sein kann, als auf dem ganzen Krystalle.

---

1) Ich selbst habe bis jetzt keine Beobachtungen an parallel mit der Hauptaxe zerschnittenen Bergkrystallen angestellt. Aus den von Herrn Friedel mit senkrecht gegen die elektrischen Axen geschnittenen Platten angestellten Versuchen ergibt sich keine Abweichung von den an vollständigen unverletzten Krystallen von mir gemachten Beobachtungen.

Ad II.

Es ist den Herren Friedel und Curie nicht gelungen, die von mir entdeckten aktinoelektrischen Spannungen zu beobachten. Sie haben die Strahlung einer Gasflamme durch eine Flussspathlinse auf den Bergkrystall geleitet, und dabei nur schwache und unregelmässige Anzeichen von Elektricität erhalten. Da keine weiteren Details von ihnen angegeben werden, so vermag ich natürlich den Grund dieses Misserfolges nicht nachzuweisen. Flussspath ist wohl nie in sehr grossen reinen Stücken zu haben, und lässt auch weniger vollkommen die Wärme durch, als Steinsalz. Weit besser wäre es gewesen, den von mir meistens benutzten Hohlspiegel oder auch selbst einfach die directe Strahlung der Flamme zu benutzen. Bei empfindlichen Krystallen reicht, wie ich in meiner Abhandlung schon erwähnt, ein in die Nähe des Bergkrystalles gehaltenes brennendes Streichhölzchen oder die Flamme eines Wachsstockes hin, um sehr beträchtliche Ausschläge im Elektrometer hervorzurufen. Die Herren Friedel und Curie sprechen selbst die Vermuthung aus, dass es ihnen vielleicht nicht gelungen, sich genügend dem von mir angewandten Verfahren zu nähern. Sie fordern den Nachweis, dass die aktinoelektrischen Erscheinungen eine von der Thermoelektricität verschiedene Ursache haben, und nicht einfach durch eine unregelmässige Erwärmung hervorgerufen werden.

Die Beweise für die Verschiedenheit der Aktinoelektricität und der Thermoelektricität habe ich in meiner Abhandlung bereits niedergelegt, und ebenso finden sich Versuche darin, welche darthun, dass eine infolge der Bestrahlung eintretende unregelmässige Erwärmung nicht die Ursache der Aktinoelektricität sein kann. Ich will indess hier dieselben nochmals zusammenstellen und durch neue Beobachtungen weiter stützen.

a) Die in meinen beiden Abhandlungen und ebenso die im vorhergehenden Abschnitte mitgetheilten Beobachtungen beweisen, dass diejenigen Kanten, welche trigonale Gestalten tragen, beim Erwärmen negativ und beim Erkalten positiv werden, während die drei anderen Kanten beim Erwärmen positiv und beim Erkalten negativ werden. Bei der Bestrahlung tritt jedoch auf den ersteren Kanten positive, auf den letzteren nega-

tive Polarität auf[1]), also dieselbe, welche auf diesen Kanten bei der Abkühlung sich zeigt. Wäre die Aktinoelektricität thermoelektrischen Ursprungs, so müssten, weil die Bestrahlung doch unbedingt eine Erhöhung der Temperatur des Krystalles hervorbringt, die Elektricitäten gerade die entgegengesetzten sein. Die Aktinoelektricität kann also nicht durch denselben Vorgang entstehen, wie die Thermoelektricität.

b) Dies Letztere geht ferner daraus hervor, dass die Aktinoelektricität in ungefähr 40 Secunden nach dem Beginn der Bestrahlung ihr Maximum erreicht, und ebenso auch wieder in einem solchen Zeitraume nach dem Aufhören der Bestrahlung verschwindet[2]), während die thermoelektrischen Spannungen sich nur sehr langsam mit der Erwärmung und Abkühlung der Masse des Krystalles entwickeln.

c) Die aktinoelektrischen Spannungen entstehen nicht durch ungleiche Erwärmungen.

In meiner Abhandlung habe ich bereits angegeben, dass für das Auftreten der Aktinoelektricität überhaupt die Richtung, in welcher die Wärmestrahlen auf den Krystall treffen, gleichgültig ist, dass die Strahlen selbst parallel mit der Hauptaxe, also senkrecht gegen die Nebenaxen gehen können[3]).

Um eine möglichst gleichförmige Bestrahlung zu erhalten, wurde jetzt ein Bergkrystall[4]), ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitte, mit seinem unteren Ende auf einem Korke befestigt, und mit diesem auf den Messingstab gesteckt, so dass seine Hauptaxe horizontal lag. In der Verlängerung der Hauptaxe stand ein Hohlspiegel, welcher die von zwei dicht hintereinander brennenden Gasflammen ausgehenden Wärmestrahlen möglichst parallel mit der Hauptaxe auf den Krystall sandte. Es wurden zwei Flammen genommen, um ein sehr grosses, nahe gleichmässig bestrahltes Feld zu erhalten. Der Krystall konnte mittelst des cylindrischen Messingstabes um seine Axe gedreht, und die an der Hebelvorrichtung angeschraubte und mit dem Goldblättchen des Elektrometers in Verbindung stehende Kugel auf die jedes Mal obere Kante desselben aufgelegt werden.

---

1) S. die Abh. S. 509 ff.
2) S. die Abh. S. 513 ff.
3) Ebend. S. 507.
4) Der in der Abh. von 1881 mit Nr. 12 bezeichnete.

In einer solchen Versuchsreihe, bei welcher $D = 55$, wurde beobachtet auf der Kante

	der Ausschlag
(1.2)	+90
(2.3)	—50
(3.4)	+54
(4.5)	—60
(5.6)	+81
(6.1)	—49

Es traten also dieselben Elektricitäten an den einzelnen Kanten auf, wie solche bei der Bestrahlung in der Richtung einer Nebenaxe sich gezeigt hatten[1]).

d) In meiner Abhandlung[2]) habe ich ferner angeführt, dass, wenn die Bestrahlung einige Minuten fortgesetzt wird, sich infolge der Erwärmung der Masse des Krystalles neben der Aktinoelektricität gleichzeitig auch die Thermoelektricität zu entwickeln beginnt. Letztere ist aber der ersteren entgegengesetzt; es beginnt also der durch die Aktinoelektricität hervorgerufene Ausschlag abzunehmen, oder, wenn man das Elektrometer entladen hat, das Goldblättchen nach der entgegengesetzten Seite zu gehen. Dabei besteht aber die Aktinoelektricität im Krystalle fort, so lange die Bestrahlung anhält. Gesetzt, die kupferne Kugel wäre an die Kante (1.2) des zuvor benutzten Krystalles angelegt, welche bei der Bestrahlung positiv wird. Hat man das Elektrometer entladen, so bleibt auf der Kugel die entsprechende Menge negativer Elektricität gebunden; während durch die entstehende schwache negative Thermoelektricität umgekehrt in der Kugel eine entsprechend schwache positive gebunden wird. Wäre die Thermoelektricität allein vorhanden, so würde in den ersten Secunden nach dem Auslöschen der bestrahlten Flamme das Goldblättchen seine Lage nicht oder nur sehr wenig ändern, indem die Erkaltung der Masse des Krystalles erst allmählig sich einstellt; infolge der durch das Verschwinden der Aktinoelektricität auf der Kugel frei werdenden negativen Elektricität zeigt dagegen das Goldblättchen einen fast ebenso grossen negativen Ausschlag, wie zuvor beim Eintritt der Bestrahlung positiven.

---

1) Ebend. Taf. II. Fig. 12. *C.*

2) Ebend. S. 510.

e) Eben diese Vorgänge lassen sich auch ohne Flamme blos durch das Auflegen einer warmen Metallkugel auf die Kante eines Bergkrystalles erhalten, wie ich gleichfalls in meiner Abhandlung[1]) schon angegeben habe. Mittelst der Hebelvorrichtung wurde eine ungefähr 70° warme Messingkugel von 25mm Durchmesser auf die mit trigonalen Flächen versehene Kante eines Bergkrystalles[2]), welcher, um ihm eine feste Lage zu geben, bis auf diese Kante in Kupferfeilicht eingesetzt war, aufgelegt. Es entstand ein Ausschlag + 45 Skth. Das Elektrometer wurde 40 Secunden nach dem Auflegen entladen und wieder isolirt. Das Goldblättchen ging jetzt nach der negativen Seite, in einer Minute bis —10. Das Elektrometer wurde wieder entladen. Wäre nun blos die negative Thermoelektricität an der Kante vorhanden gewesen, so hätte die Kugel nur gebundene positive Elektricität enthalten können, und beim Abheben der Kugel von der Kante hätte das Goldblättchen einen positiven Ausschlag von ungefähr 10 Skth. zeigen müssen. Thatsächlich entstand aber beim Abheben ein starker negativer Ausschlag von — 25 Skth., ein Beweis, dass die positive Aktinoelektricität fortbestanden, und nur in ihrer Vertheilungswirkung durch die geringere negative Thermoelektricität etwas geschwächt worden war.

Es ist dies ein ganz anderes Verhalten, als die nur thermoelektrische Spannungen aufweisenden Krystalle, z. B. der Turmalin, darbieten. Wird z. B. auf das bei steigender Temperatur negative Ende eines Turmalins die zuvor beschriebene auf 30 bis 40° erwärmte Kugel aufgelegt, so geht das Goldblättchen langsam und stetig nach der negativen Seite. Entladet man nun das Elektrometer, isolirt es wieder, und hebt die Kugel ab, so entsteht ein entsprechender positiver Ausschlag.

f) Die aktinoelektrischen Vorgänge sind, wie ich ebenfalls in meiner Abhandlung[3]) gezeigt habe, umkehrbar; d. h. bei Annäherung eines kalten Körpers an die Kante eines Bergkrystalles entstehen ebenfalls aktinoelektrische Spannungen auf diesen Kanten, nur mit entgegengesetzter Polarität, als wenn den Kanten ein warmer Körper genähert wird.

---

1) Ebend. S. 520.

2) Der in der Abh. von 1881 mit Nr. 8 bezeichnete; Kante (3.4).

3) Ebend. S. 529 ff.

Ich erhitzte bei den früheren Versuchen die bis auf die zu prüfende Kante in Kupferfeilicht eingehüllten Bergkrystalle, und näherte der freiliegenden Kante die zuvor beschriebene auf der Temperatur des Zimmers befindliche Messingkugel bis zur Berührung. Bei diesem Verfahren wirkte aber gleichzeitig die auf dieser Kante vorhandene thermoelektrische Spannung auf die Kugel, und musste bei der Beurtheilung des Resultates in Rechnung gezogen werden.

Ich habe jetzt diese umgekehrten aktinoelektrischen Vorgänge in etwas abgeänderter Weise wiederholt, indem ich die Temperaturunterschiede dadurch hervorbrachte, dass ich den Bergkrystall auf der gewöhnlichen Zimmertemperatur beliess, dagegen aber den genäherten Körper abkühlte. Als solcher diente zunächst ein hohler Messingwürfel, der auf einer Seite geschwärzt, und mit einer Mischung aus Kochsalz und Schnee gefüllt war, so dass seine Temperatur bis —7° oder —8° sank.

Bei diesem Verfahren war zwar die Störung durch die Thermoelektricität des Krystalles ausgeschlossen, dafür trat aber eine andere ein. Es waren der Krystall und die an seiner Kante stehende kupferne Kugel nebst der Leitung zum Elektrometer möglichst mit Metallschirmen bedeckt; dessenungeachtet wurde doch durch das blosse Hinstellen eines mit der Erde verbundenen Leiters, (des durch einen Kupferdraht stets zur Erde abgeleiteten Messingwürfels von der Temperatur des Zimmers), die Vertheilungswirkung der in der Zimmerluft vorhandenen Elektricität auf die Kupferkugel und ihre Leitung zum Elektrometer so geändert, dass mehr oder weniger grosse Ausschläge im Elektrometer entstanden. Als z. B. zufällig ein Bunsen'scher Brenner einige Minuten im Zimmer gebrannt hatte, rief das Hinstellen des auf Stubentemperatur befindlichen Messingwürfels, einfach durch seine Beschattung (wie ich es kurz nennen will) einen Ausschlag von 38 Skth. hervor. Werden alle Veranlassungen zu beträchtlicher Ladung der Luft im Zimmer vermieden, so lässt sich jener Ausschlag sehr vermindern; ganz zu beseitigen ist er aber ohne grossartige Vorrichtungen nicht. Wird jedoch das Elektrometer abgeleitet gehalten, während der Würfel von Stubentemperatur in die Nähe der Krystallkante gestellt wird, und dann erst isolirt, so bleibt das Goldblättchen ruhig in seiner Lage; die Änderungen in den Vertheilungswir-

kungen verlaufen eben, da nur gute Leiter in Frage kommen, augenblicklich.

Um nun die Umkehrung der aktinoelektrischen Vorgänge nachzuweisen, wandte ich ein die vorstehenden Bemerkungen berücksichtigendes Verfahren an. Der bis — 7° abgekühlte und durch einen Kupferdraht mit der Erde in steter Verbindung bleibende Messingwürfel wurde mit seiner berussten Seite der Kante eines Bergkrystalles in 3 bis 5^{mm} Abstand gegenüber auf ein gleichfalls zur Erde abgeleitetes Metallblech gestellt, während das Elektrometer abgeleitet blieb. Erst nach dem Zurückziehen der Hand vom Würfel wurde dann die Ableitung des Elektrometers aufgehoben.

Ich will die an den sechs Kanten eines Bergkrystalles in dieser Weise ausgeführten Beobachtungen mittheilen, bemerke aber, dass die angeführten Zahlenwerthe nicht streng vergleichbar sein können, weil der Würfel mit seiner berussten Fläche nicht immer in genau denselben Abstand von der Krystallkante hingestellt, und die Ableitung des Elektrometers nicht immer in gleichem Zeitintervalle nach dem Hinstellen des Würfels aufgehoben worden. Die Zahlen sollen nur dienen, um eine angenäherte Vorstellung von der Grösse der Wirkungen zu geben.

Derselbe Krystall[1]), an welchem die S. 49 beschriebenen Versuche bei Bestrahlung angestellt wurden, stand mit seiner Hauptaxe vertical. Einer seiner Kanten wurde die berusste Seite des Würfels genähert; an der gegenüberliegenden Kante stand die mit dem Elektrometer verbundene kupferne Kugel. $D = 80$.

Der — 7° kalte Würfel stand

vor der Kante	Kugel an der Kante	beobachtete Ausschläge
(4.5)	(1.2)	—28 Skth.
(5.6)	(2.3)	+15,4
(6.1)	(3.4)	—22,2
(1.2)	(4.5)	+28
(2.3)	(5.6)	—25
(3.4)	(6.1)	+14.

Die Vergleichung mit den auf S. 49 angeführten Beobachtungen zeigt, dass bei Annäherung des kalten Würfels stets die entge-

1) Krystall Nr. 12 der Abh. von 1881.

gengesetzte Spannung als beim Bestrahlen durch eine Flamme erzeugt wurden.

g) Eben diese Umkehrung der aktinoelektrischen Vorgänge gelang auch, als eine auf ungefähr 0° abgekühlte Messingkugel auf die Kante eines Bergkrystalles von der Temperatur des Zimmers aufgelegt wurde.

Als z. B. diese Kugel auf die Kante (1.2) des zuvor benutzten Krystalles gelegt wurde, entstand ein Ausschlag von — 34 Skth. Als die Kugel auf die Kante (2.3) aufgelegt wurde, entstand ein Ausschlag von + 28 Skth. u. s. w. Blieb die Kugel nachdem die entstandene Aktinoelektricität abgeleitet, war, einige Minuten liegen, so erschien auf der ersten Kante der Abkühlung entsprechend positive, und auf der zweiten negative Thermoelektricität.

h) Das Entstehen und das Verschwinden der Aktinoelektricität zeigen, wie ich nachgewiesen habe, gleichen Verlauf. Ich will hier die an der Kante eines Bergkrystalles nach dem Bestrahlen und dem Auslöschen der Flamme gemachten bereits in meiner Abhandlung[1]) mitgetheilten Beobachtungen neben einander stellen. In der ersten Columne steht die Anzahl Secunden, welche seit dem Anzünden oder Auslöschen der Flamme verflossen sind, die zweite und vierte enthalten die zu dieser Zeit beobachteten Spannungen, die dritte und fünfte die Zuwachse oder Abnahmen in je fünf Secunden. Da kurz vor dem Auslöschen der Flamme das Elektrometer entladen war, so geben die Zahlen der vierten Columne ein Maass für das Verschwinden der Aktinoelektricität. Thatsächlich sind sie die durch dieses Verschwinden in der an der Krystallkante stehenden Kugel frei werdenden Elektricitäten.

Secunden verflossen	Bei Bestrahlung	Zunahme in 5 Sec.	Nach dem Auslöschen	Zunahme in 5 Sec.
0	0		0	
5	+18,7	+18,7	—18,5	—18,5
10	+28,5	+ 9,8	—26,0	— 7,5
15	+34,5	+ 6,0	—31,0	— 5,0
20	+37,5	+ 3,0	—36,0	— 5,0
25	+39,5	+ 2,0	—38,0	— 2,0
30	+41,0	+ 1,5	—40,0	— 2,0
35			—41,0	— 1,0

1) Krystall Nr. 12 der Abh. von 1881. S. 513 ff.

Wäre die Aktinoelektricität nur eine Folge der Thermoelektricität, also erzeugt durch das Steigen und Sinken der Temperatur der Masse des Krystalles, so könnte der Verlauf der Zunahme der aktinoelektrischen Spannungen und ihres Verschwindens unmöglich derselbe sein. Die Erwärmung erfolgt durch die auffallenden Strahlen der Lampe, die Erkaltung nach dem Auslöschen dagegen durch die Ausstrahlung des Krystalles gegen die Umgebung; beide Vorgänge müssen aber nothwendig einen sehr verschiedenen Verlauf haben.

Dagegen ist die Entwickelung und ebenso das Verschwinden der aktinoelektrischen Spannungen mit der von mir über ihre Entstehung aufgestellten Ansicht in vollem Einklange. Die Wärmeschwingungen setzen den im Krystall befindlichen Äther unter Betheiligung der materiellen Moleküle des Krystalles in elektrische Schwingungen; dabei ist infolge der Theilnahme der materiellen Moleküle ein Widerstand zu überwinden, der mit der Entfernung vom ursprünglichen Zustande wächst, weshalb er durch eine gegebene Bestrahlungsintensität auch nur bis zu einer gewissen Höhe überwunden werden kann, so dass also für jede Intensität der Bestrahlung ein Maximum der aktinoelektrischen Spannung existirt. Die Zunahme der Geschwindigkeit der elektrischen Schwingungen oder der elektrischen Spannung ist in jedem Augenblicke dem Unterschiede zwischen jenem Maximum und der bereits eingetretenen elektrischen Spannung (man könnte sagen, der noch verfügbaren Kraft) proportional.

Bedeutet, bei Anwendung einer bestimmten Bestrahlung, Y das erreichbare Maximum, und y die t Secunden nach dem Beginne der Bestrahlung bereits eingetretene elektrische Spannung, so ist $\frac{dy}{dt} = a\left(Y - y\right)$, wo a eine Constante darstellt. Durch Integration erhält man, da für $t = 0$, $y = 0$ ist, $y = Y - Ye^{-at}$.

Nach dem Aufhören der Bestrahlung wirkt das Streben, in den ursprünglichen Zustand zurückzukehren; dasselbe ist der noch vorhandenen elektrischen Spannung y proportional, und die Abnahme $-\frac{dy}{dt} = ay$. Hieraus folgt, da für $t = 0$, $y = Y$,

$$y = Ye^{-at}.$$

Das Wachsen und das Verschwinden der aktinoelektrischen Spannung geschieht also nach demselben Gesetze.

Die oben S. 53 aus meiner Abhandlung mitgetheilten Versuche sind damals gar nicht zu dem Zwecke angestellt worden, um als Grundlage für eine Berechnung zu dienen; sie waren nur bestimmt, eine allgemeine Übersicht über den Verlauf der aktinoelektrischen Spannungen zu geben. Die Beobachtungen folgten in 5 Secunden auf einander, und mussten an dem fortwährend in Bewegung begriffenen Goldblättchen gemacht werden; es war also nicht möglich, den in dem betreffenden Zeitpunkte vorhandenen Ausschlag bis auf $^1/_{10}$ Skth. abzulesen. Namentlich war auch das Auge bei der zweiten Beobachtungsreihe nach dem Auslöschen der Flamme schon ermüdet, so dass, wie die Zahlen der letzten Columne ausweisen, die Messungen beim Verschwinden weniger genau ausgefallen sind.

Dessenungeachtet will ich aber die Beobachtungen beim Entstehen der thermoelektrischen Spannung nach der oben gegebenen Formel $y = Y - Ye^{-at}$ einer Berechnung unterwerfen. Es ist also $Y = 41$, und a sei angenähert zu 0,12 bestimmt. Die Berechnung nach der vorstehenden Formel liefert dann die in der dritten Columne verzeichneten Werthe.

Secunden.	Beobachtet	Berechnet	Berechnet nach der zweiten Formel
0	0	0	0
5	+ 18,7	+ 18,5	+ 18,5
10	+ 28,5	+ 28,7	+ 28,8
15	+ 34,5	+ 34,2	+ 34,6
20	+ 37,5	+ 37,3	+ 37,9
25	+ 39,5	+ 39,0	+ 39,7
30	+ 41,0	+ 39,9	+ 40,7

Die Formel $y = Y - Ye^{-at}$ lässt das Maximum erst nach unendlich langer Zeit erreichen; thatsächlich tritt es aber infolge von gewissen Gegenwirkungen schon in begrenzter Zeit ein. Dieselbe kann daher die Messungen in der Nähe des Maximums nicht genau darstellen, wie auch die Vergleichung der berechneten Werthe mit den beobachteten nachweist.

Solche Gegenwirkungen bestehen schon in der infolge der Erwärmung der Masse auftretenden Thermoelektricität, welche der Aktinoelektricität in ihrer Polarität entgegengesetzt ist. Nehmen wir z. B. an, dass das eigentliche Maximum 42 betrage, und durch die Entwickelung einer entgegengesetzten

Spannung auf 11 herabgedrückt sei (was ungefähr der Wirklichkeit entspricht), so würde sich die obige Formel umwandeln in $y = (Y + 1)\,(1 - e^{-at}) = Y - [(Y + 1)\,e^{-at} - 1]$, wo Y das beobachtete Maximum 11 bedeutet. Ebenso würde $y = (Y + 1)\,e^{-at} - 1$ die nach dem Auslöschen der Flamme zur Zeit t vorhandene Spannung ausdrücken. Setzt man $a = 0{,}116$, und berechnet die Werthe von y nach dieser zweiten Formel, so ergeben sich die in der vierten Columne der vorhergehenden Seite verzeichneten Werthe.

Nach den S. 53 mitgetheilten Beobachtungen scheint das Verschwinden der Aktinoelektricität einige Secunden mehr beansprucht zu haben, als das Wachsen bis zum Maximum. Diese geringe Verzögerung ist entweder eine Folge der durch die vorhergegangene Bestrahlung etwas erwärmten Metallschirme, welche den Krystall umgeben, oder der durch die Bestrahlung erzeugten Thermoelektricität, welche erst in einiger Zeit verschwindet.

Wie liesse sich, wenn die Aktinoelektricität nur Thermoelektricität wäre, das Maximum, welches nach 30 bis 40 Secunden eintritt, erklären, da ja doch bei weiterer Bestrahlung die Erwärmung der Masse des Krystalles, also die Bedingung für das Entstehen der Thermoelektricität, fortdauert, und auch, wie ich gezeigt habe, thatsächlich sehr allmählig wachsende aber entgegengesetzte thermoelektrische Spannungen hervorruft?

i) Die Aktinoelektricität habe ich nur an den Bergkrystallen beobachten können; an den übrigen auf ihr thermoelektrisches Verhalten untersuchten hemimorphen und symmetrischen Krystallen habe ich keine Spur derselben nachzuweisen vermocht. Dieser Umstand weist also auch in aller Bestimmtheit darauf hin, dass die Aktinoelektricität und Thermoelektricität auf verschiedenen Vorgängen beruhen.

Es existirt indess eine Substanz, auf welcher aktinoelektrische Spannungen sich zeigen müssen, der Zinnober, der ebenso wie der Bergkrystall nach den Nebenaxen hemimorph ist, und in der Richtung seiner Hauptaxe eine Drehung der Polarisationsebene des Lichtes zeigt [1]. Leider stehen mir keine hinreichend grossen

---

1) Wenn die Herren Friedel und Curie meinen, aus meiner Auffassung über die Entstehung der Aktinoelektricität im Bergkrystalle folge noth-

Krystalle zu Gebote, an welchen ich mit Hoffnung auf Erfolg die Untersuchung hätte ausführen können. Die dunkle Färbung würde kein Hinderniss sein, da auch die braun gefärbten Bergkrystalle sehr gut aktinoelektrische Spannungen zeigen.

Ad III.

Wie schon S. 38 erwähnt, stimmen die elektrischen Vorgänge bei Druckänderungen an Bergkrystallen nicht mit der von J. und P. Curie aufgestellten Regel (gleiche elektrische Polarität bei Druck und Erkaltung, und wiederum gleiche bei Nachlassen des Druckes und Erwärmung) überein. Wenn die Herren Friedel und Curie in ihrem Aufsatze annehmen, dass diese Regel auch für den Bergkrystall Geltung habe, so liegt dieser Annahme eben die unrichtige Ansicht über die Beschaffenheit der thermoelektrischen Pole auf diesem Krystalle zu Grunde. Nachdem ich nun im ersten Abschnitte nochmals nachgewiesen habe, dass die von mir angegebene Lage der elektrischen Pole die richtige ist, steht also das piezoelektrische Verhalten des Bergkrystalles mit jener Regel im bestimmten Widerspruche.

Die Herren Friedel und Curie suchen sämmtliche thermoelektrische und aktinoelektrische Vorgänge am Bergkrystalle auf die piezoelektrischen zurückzuführen. Dies ist aber nicht möglich, denn, wie ich schon früher gezeigt habe[1]), sind ausser beim Bergkrystalle, die bei dem Struvit und dem neutralen weinsauren Kali entstehenden thermoelektrischen Pole gerade die entgegengesetzten, als sie nach der Curie'schen Regel sein sollten.

Ferner entstehen, wie ich durch meine Untersuchungen gezeigt habe, auch auf vollkommen symmetrisch gebildeten Krystallen thermoelektrische Spannungen. Es sind dieselben von mir bis jetzt genauer bestimmt bei folgenden Substanzen:

---

wendig, dass auch z. B. der Turmalin nach seiner Hauptaxe eine Drehung der Polarisationsebene bewirken müsse, so beruht dieser Ausspruch auf einem Versehen der beiden Herren. Im Bergkrystalle liegen die hemimorphen Axen, um welche ich den Äther leichter in der einen Richtung als in der entgegengesetzten drehbar betrachte, senkrecht gegen die Richtung, in welcher die Strahlen gehen müssen, wenn eine Drehung ihrer Schwingungsebene eintreten soll. Die Herren Friedel und Curie lassen aber beim Turmalin diese letztere Richtung mit der Richtung der hemimorphen Axe selbst zusammenfallen.

1) Berichte der math.-phys. Classe der K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1880. S. 144. Wiedem. Annal. der Phys. u. Chem. Bd. 13. S. 640.

1) Würfelsystem: Flussspath.
2) Tetragonales System: Idokras, Apophyllit und Mellit.
3) Hexagonales System: Kalkspath, Beryll, Brucit, Apatit, Pyromorphit, Mimetesit, Phenakit, Pennin und Dioptas.
4) Rhombisches System: Topas, Schwerspath, Cölestin, Aragonit, Strontianit, Witherit, Cerussit, Prehnit und Natrolith.
5) Monoklines System: Gyps, Diopsid, Orthoklas, Skolecit, Datolith, Euklas und Titanit.
6) Triklines System: Albit, Periklin und Axinit.

Auf diesen symmetrischen Krystallen gelingt es aber, wenn jede fremde Elektricität ausgeschlossen ist, nicht, durch Druckveränderungen piezoelektrische Spannungen hervorzurufen.

Diese Spannungen treten selbst nicht an solchen Krystallbruchstücken auf, welche, eben weil sie nur Bruchstücke eines Krystallindividuums sind, an den Enden einer Axe entgegengesetzte Polaritäten zeigen. Z. B. wird ein ringsum ausgebildeter sächsischer Topas auf den an den Enden der Säulenaxe gelegenen Flächen $0P$ beim Erkalten positiv elektrisch. Wird jedoch derselbe in der Mitte zersprengt, so behalten zwar die natürlichen Endflächen $0P$ beim Erkalten ihre positive Spannung, dagegen erscheint auf den Durchgangsflächen negative. Ein solches Bruchstück zeigt also in der Richtung der Säulenaxe eine polare elektrische Vertheilung. Eine Pressung dieses Bruchstückes in der Richtung der Säulenaxe ruft aber keine piezoelektrische Spannung hervor[1].

Wenn nun die symmetrischen Krystalle thermoelektrische Spannungen zeigen (oft viel stärker als die hemimorphen), piezoelektrische Spannungen aber auf ihnen nicht entwickelt werden können, so muss nothwendig der Vorgang, durch welchen die Thermoelektricität erzeugt wird, ein anderer sein, als der, welcher die Piezoelektricität hervorruft.

---

1) Herr Friedel betrachtet in dem oben S. 39 angeführten Aufsatze von 1879 den Topas nach den auf Bruchstücken angestellten Versuchen als nach der Säulenaxe hemimorph und findet nach dieser Richtung eine elektrisch polare Axe. In meiner Abhandlung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases (Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XIV) vom Jahre 1870 habe ich aber gezeigt, dass der Topas nicht hemimorph gebildet ist und in normal ringsum ausgebildeten Krystallen nach der Säulenaxe keine polare Axe besitzt, dass vielmehr beide Enden dieser Axe dieselbe Polarität zeigen, und dass der bei halben Krystallen auf der natürlichen End- und der Durchgangsfläche erscheinende Gegensatz eben nur Folge der Verletzung des Individuums ist.

Friedrich Schur, *Die Lösung eines Paradoxons, welches bei der Construction der Flächen n^{ter} Ordnung aus gegebenen Punkten auftritt.* Vorgelegt von *Prof. Dr. Klein* *).

In einer im 23. Bde. der mathem. Annalen zu publicirenden Arbeit beschäftige ich mich mit der Aufgabe, die Fläche $(n+1)^{ter}$ Ordnung zu construiren, welche durch $\frac{1}{6}(n+2)(n+3)(n+4)-1$ gegebene Punkte geht, d. h. mit Hülfe dieser Punkte die Daten zweier die Fläche erzeugenden Bündel, nämlich eines Strahlenbündels und eines ihm reciproken Flächenbündels n^{ter} Ordnung zu bestimmen. Hierbei tritt nun, sobald $n \equiv 1$ oder $2 \pmod 4$, ein eigenthümliches Paradoxon auf, dessen Lösung ich mir schon an dieser Stelle mitzutheilen erlaube. Ist nämlich $n \equiv 0$ oder $3 \pmod 4$, so genügt obiger Aufgabe, sobald einer der gegebenen Punkte als Centrum des Strahlenbündels und $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1-\frac{1}{4}n(n+5)$ andre als Basispunkte des zu suchenden Flächenbündels n^{ter} Ordnung gewählt sind, gerade ein Bündel, dessen Construction l. c. angegeben wird.

Ist aber $n \equiv 1$ oder $2 \pmod 4$, so können nur

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1-\frac{1}{4}\Big(n(n+5)+2\Big)$$

von den gegebenen Punkten als Basispunkte des Flächenbündels gewählt werden, und es genügen dann noch ∞^1 Bündel der Aufgabe; es kann daher unter diesen eins ausgesucht werden, in welchem einem Strahle durch einen weiteren beliebigen Punkt eine Fläche durch diesen entspricht, sodass die durch das Strahlenbündel und dies ihm reciproke Flächenbündel n^{ter} Ordnung erzeugte Fläche $(n+1)^{ter}$ Ordnung scheinbar durch $\frac{1}{6}(n+2)(n+3)(n+4)$ beliebige Punkte des Raumes geht.

---

*) Zum Druck übergeben am 14. Nov. 1883.

Dies Paradoxon löst sich nun dahin auf, dass diese Fläche $(n+1)^{ter}$ Ordnung eben aus allen Punkten des Raumes besteht, d. h. dass jedem Strahle eine ihn enthaltende Fläche des Bündels entspricht; dies Bündel ist specieller Natur, da alle seine Flächen durch eine gewisse Raumcurve von der Ordnung n^2-n+1 gehen.

Ist z. B. $n=1$, ist also auf ein Strahlenbündel ein Ebenenbündel mit gegebenem Centrum so reciprok zu beziehen, dass den Strahlen durch 7 gegebene Punkte Ebenen durch diese beziehungsweise entsprechen, so hat diese Aufgabe ∞^1 Lösungen[1]. Unter den so resultirenden Ebenenbündeln gibt es aber drei in Büschel ausartende. Die Axen von zwei derselben sind Erzeugende der durch die 9 Puncte bestimmten Fläche 2. Ordnung, während die dritte durch das Centrum des Strahlenbündels geht, und es entspricht jedem Strahle dieses die ihn enthaltende Ebene. So löst sich in diesem einfachsten Falle das Paradoxon, wonach scheinbar durch 10 beliebige Punkte eine Fläche 2. Ordnung möglich wäre.

Ist ferner $n=2$, ist also auf ein Strahlenbündel ein Flächenbündel 2. Ordnung, von dessen Basispunkten fünf gegeben sind, so reciprok zu beziehen, dass den Strahlen durch 13 gegebene Punkte Flächen durch diese beziehungsweise entsprechen, so hat auch diese Aufgabe ∞^1 Lösungen, wobei übrigens die Flächen, die einem festen Strahle successive entsprechen, ein Büschel bilden. Zu diesen der Aufgabe genügenden Bündeln gehört aber auch das Flächenbündel 2. Ordnung durch die Raumcurve 3. Ordnung, welche durch die 5 gegebenen Basispunkte und das Centrum des Strahlenbündels bestimmt ist, wenn jedem Strahle dieses die ihn enthaltende Fläche zugewiesen wird. Diese Lösung kommt natürlich nicht in Betracht.

Für $n=5$ u. s. w. ist der Beweis schwieriger, sodass auf meine oben citirte Arbeit verwiesen werden muss.

---

1) S. Schroeter, Problematis etc. Journal f. r. u. a. M. Bd. 62, p. 215.

Walther Dyck, *Vorläufige Mittheilungen über die durch Gruppen linearer Transformationen gegebenen regulären Gebietseintheilungen des Raumes.* Vorgelegt von *Prof. Dr. Klein* *).

Mit 1 Tafel.

§ 1. Einleitung.

Legt man die Kugel als Trägerin der complexen Werthe ω für die geometrische Deutung der linearen Transformationen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

zu Grunde, so lassen sich von hier aus unsere Transformationen in *doppelter* Weise durch Bewegungen des Raumes versinnlichen.

(1) Einmal legen wir unsere Kugel als *Fundamentalfläche einer nichteuklidischen Massbestimmung* zu Grunde und haben dann die allgemeinste lineare Transformation als eine Schraubenbewegung vor uns, bei welcher zwei Punkte der Fundamentalkugel fest bleiben und übrigens deren Verbindungsgerade, ebenso wie ihre zugeordnete Polare, in sich verschoben wird.

(2) Indem man aber andererseits die lineare Transformation auf der ω-Kugel entstanden denkt durch eine gerade Anzahl von »Spiegelungen« nach dem Princip der reciproken Radien an gewissen Kreisen K_1, K_2, ... K_{2n} der Kugel (eine Entstehung, die noch in mannigfachster Weise abgeändert werden kann), lässt sich ihr eine Bewegung des Raumes an die Seite setzen, welche ihrerseits sich aus den Spiegelungen zusammensetzt, die nach dem Princip der reciproken Radien an den durch jene Kreise K_1, K_2, ... K_{2n} fixirten, zur Fundamentalkugel normalen Kugeln vorgenommen werden. Diese Bewegung erweist sich gleichfalls als eine für jede gegebene

*) Zum Druck übergeben am 5. December 1888.

lineare Transformation *eindeutig* bestimmte und stellt sich im allgemeinen Falle als eine Schraubenbewegung dar, bei welcher der durch die beiden festbleibenden Punkte der Fundamentalkugel gehende und auf dieser senkrecht stehende Kreis in sich verschoben wird. Auch hier hat man es also mit einer besonderen Art nichteuklidischer Massbestimmung zu thun, welche sich auf jene Fundamentalkugel bezieht und für welche die geodätischen Linien durch Orthogonalkreise zur Fundamentalkugel vertreten sind.

Die beiden Repräsentationen lassen sich sofort in einander überführen, wenn man im Raume von vier Dimensionen die im Raume von drei Dimensionen gelegene erste Darstellung durch Normalen zu diesem letzteren Raume zunächst auf einen über der »Fundamentalkugel« errichteten »Kugelraum« von drei Dimensionen projicirt und diesen wieder stereographisch in unseren gewöhnlichen dreidimensionalen Raum. Dabei ist bemerkenswerth, dass das *Innere* der Fundamentalkugel in der ersten Darstellung *doppelt* überdeckt wird, nämlich von der Projection sowohl des Innen- wie des Aussenraumes der Fundamentalkugel in der zweiten Darstellung und zwar dergestalt, dass je die zur Fundamentalkugel »symmetrischen« (d. h. durch Spiegelung nach dem Princip der reciproken Radien auseinander hervorgehenden) Punkte der Darstellung (2) in Darstellung (1) zusammenfallen. Das *Aeussere* der Fundamentalkugel in der ersten Darstellung hat in der zweiten kein Analogon im reellen Gebiete.

Die erste Darstellungsform ist von Herrn *Klein* in seiner Abhandlung »Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich« im 9. Bande der Mathematischen Annalen zu Grunde gelegt worden und in der späteren Arbeit »Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie« (Annalen Bd. 21, pag. 179) wieder herangezogen. Die letzte Art der Darstellung ist es, welche Herr *Poincaré* in seinen kürzlich erschienenen Untersuchungen »Sur les groupes Kleinéens« (Acta mathematica Bd. 3) gebraucht.

Für die eben geschilderte räumliche Darstellung der Gruppen linearer Transformationen beweist nun Herr *Poincaré* in der eben erwähnten Abhandlung folgenden schönen Satz, der, zunächst für die zweite Art der Darstellung ausgesprochen, lautet:

Jeder Gruppe linearer Substitutionen lässt sich, sofern sie nicht infinitesimale Substitutionen enthält, eine Eintheilung des Raumes in Polyeder zur Seite stellen, die im Sinne der zu Grunde gelegten Massbestimmung sämmtlich nicht unendlich klein und untereinander congruent sind. Die Seitenflächen der Polyeder sind dabei durch Orthogonalkugeln zur Fundamentalkugel und durch Stücke der Fundamentalkugel selbst gebildet. Die entstehende Eintheilung verhält sich dabei völlig symmetrisch für den Innen- wie für den Aussenraum der Fundamentalkugel.

Verwandeln wir jetzt durch die obenerwähnte Projection diese Darstellung in die Darstellungsform (2), so gehen jene Normalkugeln in *Ebenen* über und es folgt eine Eintheilung *des Innern* der Fundamentalkugel in von Ebenen und Stücken der Fundamentalkugel begrenzte Polyeder, die im Sinne der gewöhnlichen nichteuklidischen Geometrie nicht unendlich klein und zu einander congruent sind.

Hat die Darstellung (2) den Vorzug, dass bei ihr die *Conformität* der einzelnen Gebiete im Sinne der gewöhnlichen Winkelbestimmung erhalten ist, so hat in Darstellung (1) diese Gleichheit der Winkel nur im nichteuklidischen Sinne statt. Dafür aber bietet uns Darstellung (1) den Vortheil, dass wir in dem ausserhalb der Fundamentalkugel gelegenen Raume Vorkommnisse realisirt erhalten, welche in Darstellung (2) imaginär sind. Wenn sich nämlich in jener letzteren Darstellung etwa drei Kugeln, welche zur Fundamentalkugel orthogonal sind, nicht schneiden, so können wir doch in Darstellung (1) von dem reellen Schnittpunkte der drei entsprechenden Ebenen reden, welcher jetzt nur ausserhalb der Fundamentalkugel gelegen ist.

Dabei lässt sich aber der Poincaré'sche Satz von der regulären Gebietseintheilung im Innern der Fundamentalkugel (in Darstellung (1)) keineswegs im Allgemeinen auch auf das Aeussere der Kugel übertragen.

Es ist mir noch nicht gelungen, ganz allgemeine Kriteria aufzustellen, *in wie weit* wir auch im Aussenraume von einer Gebietseintheilung sprechen können. Doch werden wir die Gruppirung der Begrenzungsebenen unserer im Innern der Fundamentalkugel gelegenen Gebiete im *Aussenraume* derselben noch in einigen der nachfolgenden Beispiele speciell charakterisiren. Weiter aber sei gleich hier für die Lage gewisser in Bezug auf die Gebietseintheilung äquivalenter Punkte das Folgende bemerkt:

Bei der Iteration einer allgemeinen »loxodromischen« Substitution rückt ein Punkt, welcher auf der Verbindungsgeraden der beiden für die Substitution festbleibenden Punkte gelegen ist, gegen den einen oder anderen dieser Punkte, welche, auf der Fundamentalkugel gelegen, als »unendlich ferne« Punkte zu bezeichnen sind. Ebenso bewegt sich jeder beliebige Punkt des Raumes auf einer Spirale dem einen oder anderen der festbleibenden Punkte zu, so dass wir eine solche Substitution uns durch eine Bewegung hergestellt denken können, welche wirbelförmig von dem einen der beiden Punkte (die wir fortan als singuläre Punkte der Substitution bezeichnen wollen) ausgehend in den anderen mündet[1]. Dabei bildet die zu der Verbindungslinie der singulären Punkte zugeordnete Polare eine *in sich geschlossene* Strömungscurve. Ein Punkt nämlich auf dieser Geraden, welche als ganz im Aussenraume der Fundamentalkugel gelegen im Sinne der zu Grunde gelegten Massbestimmung *endliche* Länge besitzt, bewegt sich in seiner Geraden fort, *ohne aber dabei einer Grenzlage zuzustreben*, so dass diese Gerade bei unendlich ofter Wiederholung unserer Substitution überall-dicht von zu einander äquivalenten Punkten bedeckt wird.

Mit den im Vorstehenden bezeichneten und durch den *Poincaré*'schen Satz für jede Gruppe endlicher linearer Substitutionen als möglich erwiesenen »regulären Gebietseinteilungen des Raumes« habe ich mich seit mehreren Monaten näher beschäftigt und erlaube mir, der Gesellschaft der Wissenschaften einige Resultate vorzulegen, die zuvörderst die Entwickelung der rein geometrischen Seite der Frage im Auge haben. Es handelt sich dabei einmal um die allgemeine Discussion unserer Polyeder, für welche wir den Begriff des *Zusammenhanges* aufstellen können und für welche die Frage nach der Verschiedenartigkeit der möglichen Kanten und Eckpunkte uns unmittelbar die Anordnung der auf der Fundamentalkugel gelegenen singulären Punkte der Eintheilung überschauen lässt. Von hier aus will ich dann an einigen Beispielen die Mannigfaltigkeit der auftretenden geometrischen Gebilde bezeichnen; und zwar um so lieber, als Herr *Poincaré* auf jene Frage nach allen möglichen Gebiets-

1) Selbstverständlich sind unsere Bewegungen, da wir von »endlichen« Substitutionen sprechen, ruckweise, doch erleichtert es die Vorstellung, sich dieselben aus continuirlichen Bewegungen entstanden zu denken.

eintheilungen, wie sie durch Gruppen linearer Transformationen definirt erscheinen, nur so weit eingeht, als dieselben auf »eigentlich discontinuirliche Gruppen« (vgl. die genannten Aufsätze Herrn *Poincaré's* Acta Bd. 3, pag. 59 und Herrn *Klein's* Annalen Bd. 21, pag. 176) Bezug haben und als sie *unmittelbar* für die Theorie der Functionen einer (auf der Fundamentalkugel definirten) complexen Veränderlichen anwendbar sind. Dabei meine ich, dass gerade auch diese weiteren geometrischen Formulirungen für die Functionentheorie von wesentlichem Interesse sind und hoffe in Fortsetzung dieser Untersuchungen auch hierauf ausführlich eingehen zu können.

§ 2. Allgemeine Formulirungen.

Wir knüpfen unsere nächsten Entwickelungen an die erste Darstellung unserer Polyeder an, in welcher dieselben als von Ebenen begrenzt erscheinen. Zunächst betrachten wir dabei, wie dies ja auch schon in den Sätzen (pag. 63) des § 1 geschehen ist, die Polyedereintheilung nur soweit, als sie sich auf das *Innere* der Fundamentalkugel erstreckt. Einer gegebenen regulären Einteilung dieses Raumes liegt dann ein »*Ausgangspolyeder*« zu Grunde, welches von Ebenen und von Stücken der Fundamentalkugel begrenzt ist. Die *ebenen* Seitenflächen dieses Polyeders sind vermöge der »erzeugenden« Substitutionen der zugehörigen Gruppe einander paarweise zugeordnet, während die Stücke der Fundamentalkugel selbst nur durch die sie begrenzenden und einander zugeordneten Randkanten mit einander in Verbindung stehen.

Für ein solches »Ausgangspolyeder« können wir uns den Begriff des »*Zusammenhanges*« herstellen, indem wir uns die erwähnte Zuordnung der einzelnen Begrenzungsebenen wirklich ausgeführt denken. *Dann entsteht ein in sich geschlossener Raum mit gewissen Grenzflächen.* Als solche treten nämlich die auf der Fundamentalkugel gelegenen Stücke unserer Polyeder auf, welche vermöge der Zuordnung ihrer Randkanten jetzt in sich geschlossene Begrenzungsflächen unseres Raumes bilden. An diese Vorstellung lässt sich nun im Anschluss an die Untersuchungen von *Betti* und *Riemann* eine Definition des »*Zusammenhanges*« für unser Ausgangsgebiet ableiten aus der Anzahl der nöthigen Querschnittebenen und Querschnittcurven, welche

denselben zu einem einfach zusammenhängenden machen[1]. Ich denke auf die explicite Formulirung dieser Definition demnächst zurückzukommen.

Um nun weiter die Verschiedenartigkeit der Kanten und Eckpunkte unserer Gebietseinteilungen zu überblicken, ziehen wir neben den im *Innern* der Fundamentalkugel befindlichen Kanten und Eckpunkten auch noch diejenigen mit in Betracht, welche durch den Schnitt unserer erweitert gedachten Begrenzungsebenen und Kanten *ausserhalb* der Fundamentalkugel entstehen.

Ausser den durch den Schnitt der Polyederebenen mit der Fundamentalkugel entstehenden Kanten der Polyeder unterscheiden wir Kanten von zweierlei Art:

1. Einmal solche, um welche vermöge der Substitutionen der Gruppe *Drehungen* statthaben; sie sind mit der Gruppe vollständig bestimmt und mögen — es ordnen sich in bestimmter Weise um dieselben die durch jene Drehungen ineinander überführbaren äquivalenten Gebietstheile — als »unveränderliche Kanten« bezeichnet sein.

2. Zweitens können Kanten auftreten, um welche sich keine äquivalenten, durch Drehung ineinander überführbaren Gebiete legen. Die Anordnung und die Anzahl dieser Kanten ist durch Modification der Begrenzungsflächen der Polyeder innerhalb gewisser Grenzen variabel und sie mögen deshalb als »veränderliche Kanten« bezeichnet sein.

Die »unveränderlichen Kanten« schneiden entweder die Kugel oder sie berühren dieselbe, oder sie verlaufen ausserhalb. Im ersten Falle ist die zugehörige Drehung durch eine »elliptische« Substitution gegeben, im zweiten Falle durch eine »parabolische«, im dritten durch eine hyperbolische.

Analog dieser Einteilung der Kanten unterscheiden wir auch »unveränderliche« und »veränderliche« Eckpunkte.

Für die »unveränderlichen« Eckpunkte sind die Axen für die auf einen solchen Eckpunkt bezüglichen Drehungen durch die hindurchlaufenden »unveränderlichen« Kanten gegeben; dabei werden im Allgemeinen durch einen solchen Eckpunkt noch eine Reihe von veränderlichen Kanten hindurchlaufen (vgl. Beispiel 5).

---

1) Neuerdings kommt *Picard* (Comptes rendus vol. 97 pag. 1047) auf analoge Definitionen für gewisse Gebietseintheilungen im vierdimensionalen Raume.

Die »veränderlichen« Eckpunkte entstehen als Durchschnitte von nur »veränderlichen« Kanten und sind wie diese in Anordnung und Anzahl innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt.

Wir betrachten die »unveränderlichen Eckpunkte« genauer. Indem wir die Gesammtheit der Ebenen und Kanten der Gebietseintheilung, welche durch eine solche Ecke hindurchlaufen, mit der Fundamentalkugel schneiden, entsteht hier eine Polygoneintheilung, welche unmittelbar die Gruppe linearer Substitutionen definirt, welche sich auf den fraglichen Eckpunkt bezieht. Nun unterscheiden wir vor Allem, ob der fragliche Eckpunkt a) innerhalb, b) auf, c) ausserhalb der Fundamentalkugel gelegen ist.

a) Liegt Punkt E *innerhalb* der Fundamentalkugel, so schneiden die durch ihn hindurchgehenden Seitenflächen auf der Fundamentalkugel eine Gebietseintheilung aus, welche die *ganze Fundamentalkugel* umfasst. Sie kann also nur *endlich* sein und *die Gruppe der um E statthabenden Drehungen fällt nothwendig mit einer der Gruppen des Dieders*, *Tetraeders*, *Octaeders bez. Icosaeders zusammen*, welche (man vgl. die schon erwähnte Arbeit *Klein*'s im 9. Bande der Math. Annalen) alle endlichen Gruppen von Drehungen um einen Punkt erschöpfen.

b) Liegt Punkt E *auf* der Fundamentalkugel, so bestehe zunächst die zugehörige Gruppe nur aus den Potenzen einer einzigen Substitution. Dann hat man die bekannten Eintheilungen der Kugel in Zweiecke mit endlichem Winkel oder dem Winkel 0 oder in unendlich viele ringförmige Gebiete, je nachdem man es mit den Potenzen einer elliptischen, parabolischen oder einer hyperbolischen bez. einer allgemeinen loxodromischen Substitution zu thun hat. Besteht aber die auf den Eckpunkt E bezügliche Gruppe nicht blos aus den Potenzen einer einzigen Substitution, so zeigt eine kurze Betrachtung, dass dann nur folgende Fälle eintreten können: 1. die Gruppe entsteht durch Combination zweier Substitutionen, welche dieselben beiden Punkte E und E_1 zu singulären Punkten besitzen (Substitutionen, welche sonach mit einander vertauschbar sind), oder 2. sie entsteht durch Combination einer auf den Punkt E bezüglichen parabolischen Substitution, mit einer elliptischen Substitution von der Periode 2 (»*Diedergruppe*« von unendlich hoher Ordnung), *oder aber* 3. *man hat es mit einer der bei dem Geschlechte $p = 1$ auftretenden sehr bekannten Gruppen zu thun*, *welche die Kugel entweder in Pa-*

rallelogramme, oder in abwechselnd congruente und symmetrische Dreiecke mit den Winkeln bez. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ *zerlegen.*

c) Liegt endlich der Punkt E *ausserhalb* der Fundamentalkugel und fragt man hier nach der Eintheilung derselben, wie sie den auf den Punkt E bezüglichen Drehungen entspricht, so sind hier alle Eintheilungen in unendlich viele congruente Gebiete möglich, für welche die singulären Punkte der Eintheilung auf dem Berührungskreise des von E aus an die Fundamentalkugel gezogenen Tangentialkegels liegen, mit anderen Worten, zu einem solchen Punkte E können als Gruppen der auf ihn bezüglichen Drehungen alle Gruppen linearer Transformationen gehören, für welche die singulären Punkte sämmtlich auf einem Kreise angeordnet sind, also alle die durch geeignete Transformation sich in Gruppen linearer Substitutionen *mit reellen Coefficienten* überführen lassen.

§ 3. Beispiele.

Es soll sich jetzt noch darum handeln, die ganze Mannigfaltigkeit der möglichen Gebietseintheilungen, wie sie den Gruppen linearer Transformationen entsprechen, zu bezeichnen und ich thue dies, indem ich, die allgemeinen Ueberlegungen abbrechend, specielle Beispiele — und zwar möglichst einfache — als charakteristische Typen herausgreife.

Dabei sind es vor Allen wie bei den ebenen Gebietseintheilungen wieder die als *regulär-symmetrisch* zu bezeichnenden Eintheilungen, denen eine besondere Uebersichtlichkeit innewohnt und die darum für eine erste gestaltliche Orientirung besonders geeignet erscheinen. Schildern wir diese zunächst in der zweiten Form der Darstellung, so gehen wir dabei von einem ersten Polyeder aus, welches jetzt von *Kugeln* begrenzt erscheint, die auf der Fundamentalkugel — und dafür sei gleich eine Ebene angenommen — senkrecht stehen. An dieses erste Polyeder legen sich dann weitere »symmetrische«, die durch Spiegelung nach dem Princip der reciproken Radien an den Begrenzungsflächen des ersten hervorgehen, an diese wieder Gebiete, die zum ersten congruent sind u. s. w. Wir müssen, um das *Ausgangspolyeder* für unsere Gruppe zu haben, zwei dieser zu einander symmetrischen Polyeder zusammennehmen, für

welche jetzt die Seitenflächen einander paarweise zugeordnet erscheinen. Dabei übersehen wir sofort, dass um die sämmtlichen so auftretenden Kanten *Drehungen* statthaben, d. h. dass wir es dabei nur mit *unveränderlichen* Kanten zu thun haben.

In den folgenden Beispielen legen wir als Ausgangspolyeder ein *Tetraeder* mit seinem symmetrischen zu Grunde. In unserer jetzt gewählten Darstellung ist dann zu unterscheiden, ob die vier Kugeln, welche die Seitenflächen desselben bilden, sich zu je dreien in reellen Punkten schneiden oder nicht.

Erstes Beispiel. Nehmen wir erstens an, alle vier Eckpunkte des Tetraeders seien reell, dann liegen von den 8 Schnittpunkten unserer Kugeln zu je dreien 4 innerhalb, 4 (symmetrisch zu den ersten) ausserhalb der Fundamentalkugel, oder aber sie rücken im Grenzfalle paarweise auf die Fundamentalkugel.

Unsere Eintheilung ist dann sicher von der Art, dass die Fundamentalkugel als eine »Grenzkugel« der Eintheilung erscheint, auf welche sich von beiden Seiten die Tetraeder (im Sinne einer gewöhnlichen Maassbestimmung kleiner und kleiner werdend) zusammenziehen, so dass diese Kugel überall dicht von den »singulären Punkten« der Eintheilung (vgl. oben pag. 64) bedeckt erscheint[1]. Die auf die einzelnen Eckpunkte bezüglichen *Untergruppen* der Gesammtgruppe fallen mit den schon oben pag. 67 unter a. aufgezählten Gruppen der regulären Körper zusammen, sofern die Eckpunkte innerhalb der Fundamentalkugel gelegen sind, und im Falle eine Ecke des Tetraeders *auf* die Fundamentalkugel selbst rückt, mit den gleichfalls oben (pag. 67) unter b. aufgezählten Fällen. Dieser begrenzten Zahl von Möglichkeiten, nach welchen wir die Eckpunkte unseres Ausgangstetraeders bestimmen können, entspricht es, *dass es nur eine* e n d l i c h e *Anzahl solcher Gebietseintheilungen gibt,* deren Aufzählung sich durch eine leichte Discussion — es handelt sich um die Bestimmung der »Kantenwinkel« des Tetraeders — ermöglicht.

Es sei mir gestattet, aus der Zahl der möglichen Fälle vier specielle Beispiele herauszugreifen. Wir bestimmen die 6 Kantenwinkel des Tetraeders wie folgt:

---

1) Auf solche Vorkommnisse bezieht sich die Bemerkung von *Klein* auf p. 176 der schon erwähnten Abhandlung im 21. Annalenbande, welche *Poincaré* p. 57 ff. seiner Abhandlung im 3. Bande der Acta weiter ausführt.

$$(1.)\qquad \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2};$$

$$(2.)\qquad \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2};$$

$$(3.)\qquad \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3};$$

$$(4.)\qquad \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2};$$

wo man noch bezüglich der gegenseitigen Anordnung dieser 6 Kantenwinkel die Figuren 1—4 der beigefügten Tafel vergleiche.

Dann erkennen wir im Falle (1.) sofort, dass die Gruppe der um jeden einzelnen Eckpunkt statthabenden Drehungen mit der *Gruppe des Icosaeders* zusammenfällt, so dass sich um jeden dieser Eckpunkte 120 abwechselnd congruente und symmetrische Tetraeder lagern. Beispiel (2.) lässt ebenso jedesmal 48 Tetraeder, der Gruppe des Octaeders entsprechend, sich um jeden Eckpunkt lagern.

In (3.) ist ein Fall charakterisirt, in welchem sämmtliche Eckpunkte des Tetraeders auf der Fundamentalkugel selbst gelegen sind und wobei sich um jeden einzelnen dieser Eckpunkte jedesmal unendlich viele Tetraeder gruppiren, der bei $p = 1$ auftretenden Gruppe $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ entsprechend.

Die Anordnung (4.) endlich charakterisirt einen Fall, in welchem alle 4 Endpunkte des Ausgangstetraeders *verschiedene* Untergruppen der Gesammtheit liefern. Wie wir unmittelbar durch Vergleichung der einzelnen in einem Endpunkte anstossenden Kantenwinkel erschliessen, ergibt Endpunkt A eine Icosaedergruppe, um ihn gruppiren sich also 120 abwechselnd congruente und symmetrische Tetraeder; Eckpunkt C erweist sich analog als zu einer Octaedergruppe gehörig; Eckpunkt B besitzt die Anordnung einer Diedergruppe vom Typus $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$; Eckpunkt D endlich erweist sich als auf der Fundamentalkugel gelegen; um ihn finden unendlich viele Drehungen vom Charakter der bei $p = 1$ auftretenden Gruppe $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ statt.

Noch sei erwähnt, in welcher Weise sich alle diese jetzt erwähnten Gebietseintheilungen in unsere Darstellungform (1) übertragen. Dann hat *nur im Inneren* der Fundamentalkugel

eine brauchbare Gebietseintheilung in von Ebenen begrenzte im Sinne der nichteuklidischen Massbestimmung congruente Tetraeder statt. *Das Aeussere der Fundamentalkugel aber wird überall dicht von den Ebenen unserer Eintheilung durchsetzt*, wie wir schon daraus unmittelbar erschliessen, dass die Grenzlagen für alle unsere Ebenen Tangentialebenen an die Fundamentalkugel sind in den auf dieser Kugel überall dicht vertheilten singulären Punkten der Gebietseintheilung.

Zweites Beispiel. Wir nehmen jetzt an zweiter Stelle an, dass (an die Darstellungsform 2 anknüpfend) nicht alle Tripel unserer 4 Kugeln (Seitenflächen des Tetraeders) sich in reellen Punkten schneiden, wo dann also in der Darstellungsform 1 unser von Ebenen begrenztes Tetraeder die entsprechenden Eckpunkte im Äusseren der Fundamentalkugel aufweist. Dann haben wir für die auf einen solchen imaginären Schnittpunkt bezüglichen Drehungen die oben p. 68 in (*c*) allgemein charakterisirte Gesammtheit von Transformationsgruppen zur Verfügung, die in unseren specielleren Fällen der Tetraedereintheilungen jetzt nur dahin eingeschränkt ist, dass wir es mit »regulärsymmetrischen« Eintheilungen in Kreisbogen*dreiecke* zu thun haben.

Es lässt sich auch hier (analog wie bei *a*) die ganze Mannigfaltigkeit der möglichen Eintheilungen leicht angeben und übersichtlich anordnen. Es sei mir wieder gestattet, aus der Gesammtheit einzelne Beispiele herauszugreifen, deren Schilderung der kürzeren Sprechweise wegen hier an Darstellung 1 geknüpft sei.

Zuvörderst legen wir ein Tetraeder als Ausgangspolyeder zu Grunde, dessen sämmtliche vier Eckpunkte *ausserhalb* der Fundamentalkugel liegen und dessen sämmtliche Kanten dabei die Kugel durchsetzen. Die auf diese Kanten bezüglichen Substitutionen sind sonach *elliptische* von bez. den Perioden $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_6$, wie sie mit den 6 Kantenwinkeln des Tetraeders correspondiren. Fragen wir nach der Gebietseinteilung, welche durch »Spiegelung« dieses Tetraeders entsteht und betrachten wir insbesondere diese Eintheilung für die Fundamentalkugel selbst, so haben wir hier zuvörderst 4 getrennte Kreisbogendreiecke, mit den 4 Eckpunkten unseres Tetraeders correspondirend. Ihre Reproduction durch »Spiegelung« ergibt die Gruppen der Drehungen, welche um jeden dieser 4 Eckpunkte

statthaben. Dabei bedecken diese Reproductionen jedesmal das Innere des Kreises, in welchem der von dem jedesmaligen Eckpunkte an die Fundamentalkugel gelegte Tangentialkegel diese letztere berührt, *und haben diesen Kreis zur natürlichen Grenze.* Bei den Spiegelungen unseres ersten Tetraeders haben wir aber von den ursprünglichen 4 Eckpunkten aus unendlich viele neue gewonnen, deren jede auf der Fundamentalkugel eine der eben geschilderten regulären Eintheilungen mit Grenzkreis veranlasst, deren keine aber, wie dies aus der Erzeugung unmittelbar folgt, mit einer anderen collidirt.

So erscheint schliesslich die Fundamentalkugel von unendlich vielen, jedesmal durch eine Grenzcurve abgeschiedenen Gebietseintheilungen überdeckt, und dabei sind diese Gebietseintheilungen, den vier Ecken des ursprünglichen Tetraeders entsprechend von viererlei Art.

Fig. 5, in welcher die Fundamentalkugel stereographisch auf die Ebene projicirt ist, stellt den besonders einfachen Fall einer solchen Eintheilung vor, in welchem die 6 Kanten eines regulären Tetraeders die Kugel gerade *berühren*; dann hat man zuvörderst auf der Kugel die (stark schraffirten) 4 Ausgangsdreiecke mit den Winkeln 0 und es tritt der specielle Fall ein, dass die (mit Doppellinien angegebenen) Grenzcurven unserer 4 ersten Eintheilungen sich paarweise berühren. Die Fortsetzung dieser Eintheilung über die ganze Kugel hin ist dann unmittelbar aus der Figur abzulesen. Wir bezeichnen noch, bezüglich der Frage nach einer etwaigen im Aeusseren der Fundamentalkugel statthabenden Eintheilung, den Umstand, dass eine solche hier in der That *im Innern aller der soeben genannten Kegel*, welche von den Tetraedereckpunkten an die Kugel gelegt sind, statthat; dass aber ausserhalb derselben eine solche sicher nicht eintritt, wie ja schon die Tangentialebenen unserer Kegel, die wir in der Grenzlage erhalten, den Aussenraum überall-dicht überdecken.

Man sieht sofort, wie die somit geschilderte Gebietseintheilung der Typus ist, zu dem wir stets geführt werden, wenn wir ein Ausgangspolyeder gegeben haben, dessen Ecken sämmtlich ausserhalb der Fundamentalkugel liegen, während dessen Kanten die Kugel schneiden (oder im Grenzfalle berühren). Weiter aber ergibt sich von hier aus gleich eine *Verallgemeinerung*, *für welche die Kugel gleichfalls in unendlich viele Gebiete zerlegt*

wird, die jetzt aber jedesmal durch eine nichtanalytische Grenzcurve von einander getrennt erscheinen. Ich knüpfe dieselbe an das soeben erwähnte specielle Beispiel an, weil dasselbe hinreichend die allgemeinen Verhältnisse zu bezeichnen gestattet.

Drittes Beispiel. Wir gehen von dem im vorigen Beispiele genannten regulären Tetraeder aus, dessen Kanten die Kugel berühren, denken uns die 4 Schnittkreise von Tetraeder und Kugel markirt und schneiden nun jede der Ecken des Tetraeders mit 3 Ebenen ab, welche jedesmal 2 der ebenerwähnten Kreise berühren und dabei übrigens — damit sich in unserem Beispiele alle Verhältnisse möglichst einfach gestalten — durch einen Punkt auf der Mittellinie der Tetraederecke hindurchgehen. Fig. 6 veranschaulicht unmittelbar eine solche Ecke. Jetzt haben wir ein Polyeder begrenzt von viermal drei Vierecken und von vier Neunecken. Die letzteren schneiden die Fundamentalkugel in den vier erwähnten Kreisen. Jedes der begrenzenden Vierecke schneidet seinerseits die Fundamentalkugel in einem Kreise, welcher 2 der vorgenannten berührt. Dieses Polyeder, dessen Ecken sämmtlich ausserhalb der Kugel liegen, wiederholen wir durch Spiegelung an sämmtlichen Seiten. Dann entstehen, von den vier Ausgangspolygonen, die wir auf der Kugel jedem der Eckpunkte des ursprünglichen Tetraeders entsprechend unterscheiden können, und deren eines in Fig. 7 vorliegt, ausgehend, zunächst vier Gebietseintheilungen, *die durch eine nichtanalytische Grenzcurve eingeschlossen sind.* Fig. 7 gibt die ersten Wiederholungen eines der Ausgangspolygone. Dabei zeigt Fig. 6 sofort, wie die einzelnen Punkte jener nichtanalytischen Grenzcurve sich ihrerseits wieder auf den Berührungskreisen der Kegel anordnen, die wir von den Eckpunkten unserer Polyeder an die Fundamentalkugel legen. Diese Kreise sind in Fig. 6 durch die strichpunktirten Linien markirt. Die ganze Fundamentalkugel nun ist überdeckt von *unendlich vielen* derartigen ineinander- aber niemals übereinander greifenden Bereichen[1]).

Viertes Beispiel. Wir gehen wieder zu dem Tetraeder zu-

---

1) Ich habe die beiden letzten Beispiele näher ausgeführt, weil gerade bezüglich solcher Eintheilungen der Sachverhalt bei *Poincaré* (in der erwähnten Abhandlung pag. 69 und 70) nicht correct dargestellt ist. *Poincaré* spricht von einer *endlichen* Anzahl von Bereichen, deren jeder die *ganze Gruppe* charakterisirt.

rück, dessen Eckpunkte sämmtlich ausserhalb der Fundamentalkugel gelegen sind und nehmen nun auch noch an, dass die 6 Kanten die Kugel nicht schneiden, so zwar, dass diese Kugel von den 4 Seitenflächen in 4 *getrennten* Kreisen geschnitten wird. Fragen wir nach der Eintheilung, wie sie durch die Spiegelung unseres Tetraeders auf der Fundamentalkugel entsteht, so übersieht man hier sofort, *dass die Kugel eine einheitliche Eintheilung trägt*, für welche sämmtliche singulären Punkte discret vertheilt sind. Die letzteren sind dabei angeordnet auf den unendlich vielen Berührungskreisen der Kegel, die wir von den Eckpunkten aller unserer Tetraeder an die Kugel legen.

Fünftes Beispiel. Eine der eben geschilderten analoge Eintheilung, die gleich hier erwähnt sein mag, erhält man, wenn man das obige Tetraeder als Ausgangspolygon betrachtend, die Fortsetzung nicht wie soeben durch Spiegelung bewerkstelligt (wo erst zwei zu einander symmetrische Tetraeder das Ausgangspolyeder ergeben), sondern wenn man durch eine *hyperbolische* Substitution je zwei der Seitenflächen des Tetraeders einander zuordnet. *Auch hier trägt dann die Kugel eine einheitliche Eintheilung* mit völlig getrennt liegenden singulären Punkten. Während aber für unsere obige Eintheilung die sämmtlichen auftretenden Kanten der einzelnen Tetraeder »unveränderliche« Kanten waren, haben wir es hier auch mit *veränderlichen* zu thun. Von den 6 Kanten eines jeden Tetraeders sind nämlich nur zwei einander gegenüber liegende als Drehungsaxen für die beiden zugehörigen hyperbolischen Substitutionen *unveränderliche* Kanten, nicht aber die vier anderen.

Sechstes Beispiel. Noch erwähnen wir zum Schlusse des auch schon von Herrn *Poincaré* (Comptes rendus Bd. 93, pag. 582) berührten Vorkommnisses, dass eine auf der Fundamentalkugel verstandene Gebietseintheilung gewisse kreisförmige Stücke derselben freilassen kann, dem Umstande entsprechend, dass bei einer hyperbolischen Substitution das *Innere* desjenigen Kreises, welcher über der Verbindungslinie der beiden bei der Substitution festbleibenden Punkte errichtet ist, niemals in das *Aeussere* desselben übergeführt wird. Hat man also ein Ausgangspolygon auf der Kugel, welches nur in dem *einen* dieser beiden Theile, etwa *ausserhalb* jenes Kreises, liegt, so wird die von ihm aus sich fortsetzende Gebietseintheilung sich niemals in das *Innere* dieses Kreises erstrecken können. Auf den Raum (und die Dar-

Fig. 1.

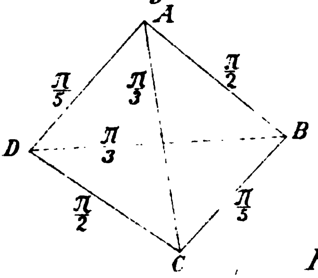


Fig. 2.

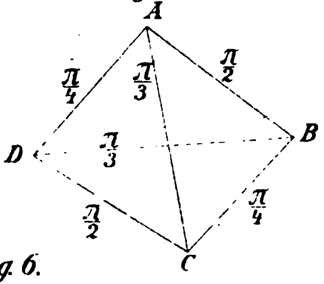


Fig. 6.

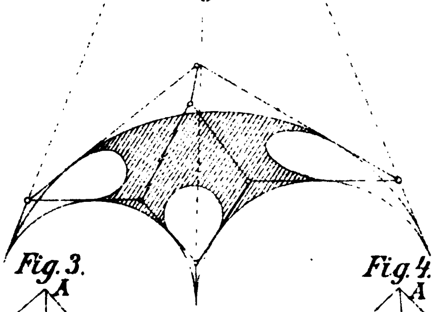


Fig. 3.

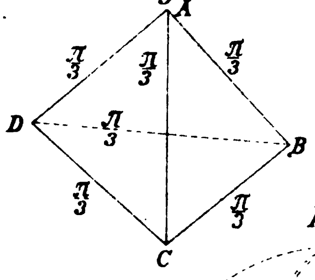


Fig. 4.

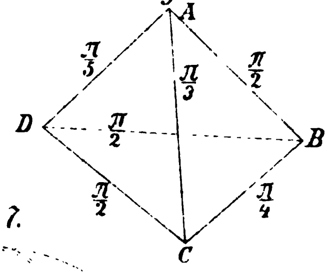


Fig. 7.

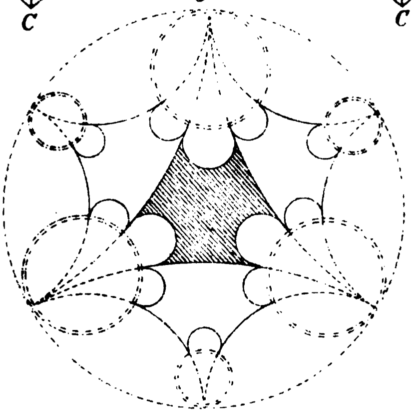
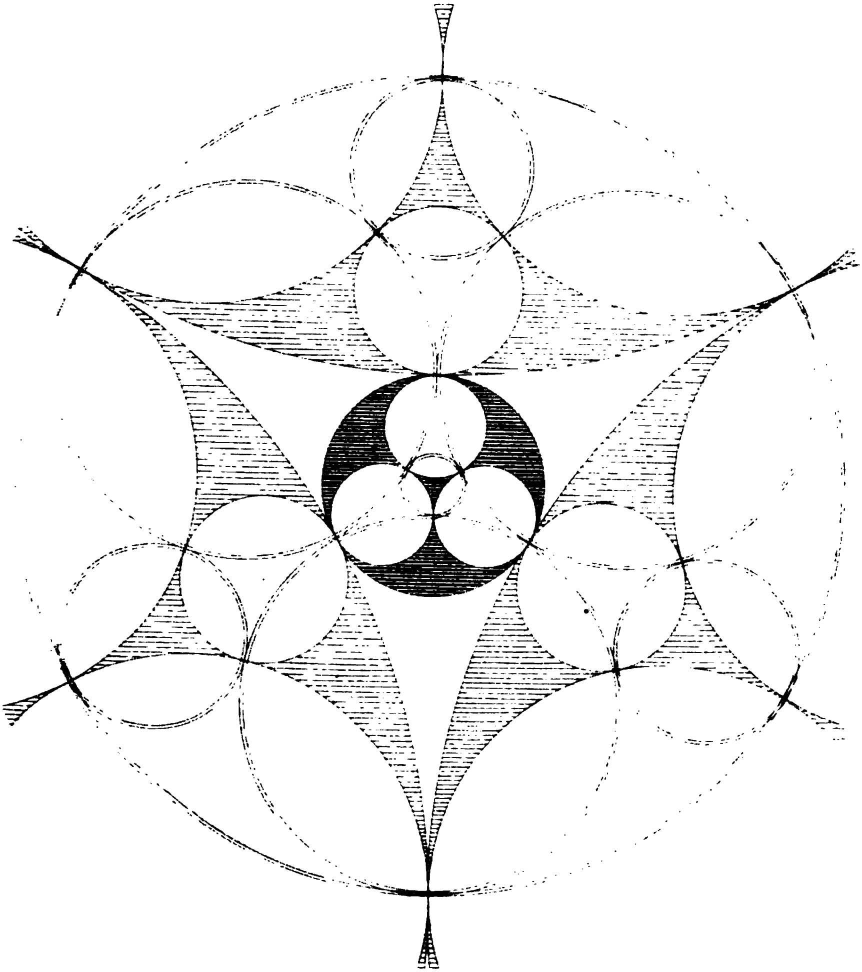


Fig. 5.



stellungsform (1.) unserer Substitutionen) übertragen, werden dann gewisse Kugelabschnitte, deren Ebenen jedesmal durch die beiden festbleibenden Punkte der hyperbolischen Substitution gelegt sind, von der Gebietseintheilung unberührt bleiben.

§ 4. Schlussbemerkungen.

Im Vorstehenden handelt es sich um das Studium regulärer Gebietseintheilungen *unter Zugrundelegung einer reellen Kugel als Fundamentalfläche unserer Massbestimmung.*

Ziehen wir einmal diese Kugel auf einen Punkt (etwa den unendlich fernen Punkt) des Raumes zusammen, dann kommen wir zu Transformationen des Raumes in sich, welche jenen einen Punkt ungeändert lassen. Die zugehörigen Gebietseintheilungen sind durch die Untersuchungen von *Sohncke*[1]) gegeben und für physikalische Fragen verwerthet worden.

Lassen wir andererseits die Fundamentalkugel imaginär werden, so ergeben sich *endliche* Gruppen von Bewegungen für unsere jetzt *elliptische Massbestimmung* im Raume. Herr *Klein* hat auf ihren Charakter und die Art ihrer Aufzählung bereits in der schon mehrfach erwähnten Abhandlung im 9. Annalenbande hingewiesen. Sie bieten überdies eine innige Beziehung zu den im Raume von vier Dimensionen auftretenden regulären Körpern dar.

Schliesslich sei noch besonders hervorgehoben, *dass durch unsere Raumeintheilungen* (vgl. die Beispiele 2 und 3) *die Möglichkeit einer geometrischen Verknüpfung von ganz heterogenen Gebietseintheilungen gegeben ist*, die auf der Fundamentalkugel durch den Schnitt mit unserem »Ausgangspolyeder« entstehen. In wie weit dieser Zusammenhang auch für die analogen *functionentheoretischen* Fragen verfolgt werden kann, die sich an die Functionen einer auf der Fundamentalkugel gedeuteten complexen Variabeln anschliessen, und in welcher Richtung diese Eintheilungen für die Theorie der (im Raume gedeuteten) Functionen dreier reeller Variablen von Belang sind, muss ein weiterer Verfolg der Untersuchungen lehren, die ich hier nur in einer ersten und vorläufigen Notiz gekennzeichnet habe.

1) Man vergleiche *Sohncke*, Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur (Leipzig, Teubner) wo auch die weitere einschlägige Literatur sich findet.

W. Braune, *Ueber die Intercostalvenen des menschlichen Körpers* *).

Ich erlaube mir der Gesellschaft einen Theil der Bearbeitung des menschlichen Venensystems vorzulegen, welche in Form eines Atlas in der nächsten Zeit im Verlage von Veit & Comp. hier erscheinen wird.

Ich hatte schon früher, im Jahre 1870 (31. October), der Gesellschaft über einen Saugapparat am Oberschenkel des Menschen berichtet, der, von den Fascien in der Gegend des Foramen ovale gebildet, bei den Bewegungen des Beines, wie sie z. B. beim Gehen erfolgen, in Thätigkeit gesetzt wird, und der Vorwärtsbewegung des Venenblutes dient. Die Wirkung dieses Apparates zeigte sich äusserlich in der Erscheinung der Venenanordnung insofern, als von allen Seiten Venenstämme an diese Stelle herantreten, und wie die Richtung ihrer Ventile zeigt, ihren Inhalt dahin entleeren.

Aehnliche Verhältnisse fanden sich bei späteren Untersuchungen an der menschlichen Hand, und auch an anderen Regionen des Körpers. Ueberhaupt zeigt sich die Anlage derartiger Saugapparate am menschlichen Körper sehr weit verbreitet. Ueberall da, wo Muskeln und Fascien bei ihrer Spannung die von ihnen umschlossenen Hohlräume erweitern, kommt eine Saugwirkung zu Stande, und diese macht sich nicht nur für die *Circulation im Venensysteme*, sondern auch für die im *Systeme der Lymphgefässe* geltend, und wirkt bestimmend auf die Form dieser Gefässramificationen ein.

Die scheinbar regellose Anordnung vieler Lymphbahnen und der Venen wird zu einer sehr regelmässigen, wenn man auf diese Saugapparate achtet. Durch dieselben werden, um nur einige Beispiele aufzuführen, die Gegenden des unteren Halsabschnittes, der Achselhöhle, der Fossa ovalis des Oberschenkels

---

*) Vorgetragen in der Sitzung am 11. Juni 1883.

zu Sammelstellen der Venenstämme sowie der Lymphgefässe. Und es lässt sich erwarten, dass ebenso, wie die Oberschenkelvene als Endvene (im Sinne der *Cohnheim*'schen Endarterien) für das Venengebiet des Schenkels angesehen werden kann, auch die Lymphgefässe des Schenkels, der unteren Bauchdecken und der Genitaliengegend ihre Passage durch den Schenkelkanal nehmen.

Es muss der späteren Bearbeitung vorbehalten bleiben, diese Verhältnisse eingehend zu behandeln. Hier möchte ich vorläufig nur ein Bruchstück dieser grösseren Arbeit, einige Verhältnisse der *Intercostalvenen*, besprechen.

Die letzten und vollständigsten Angaben über die hier in Frage stehende Venengruppe geben die Werke von *Henle* (Gefässlehre 2. Auflage 1876), *Luschka* (Anatomie der Brust des Menschen, Tübingen 1863 S. 206 u. ff.) und *M. G. Breschet* (Sur la système veineux).

Nach dem *Henle*'schen Schema (a. a. O. S. 336, Fig. 136) münden die Intercostalvenen mit ihren vorderen Enden bis auf die vier letzten sämmtlich in die verticalen Canäle der doppelt angelegten Venae mammariae internae. Die vier unteren zeigen freistehende isolirte vordere Enden, wohl um anzudeuten, dass sie nur einen Abfluss nach der Wirbelsäule zu, in die Vena azygos und hemiazygos haben. Ein kurzer verticaler Verbindungscanal, der die Vena anonyma dextra mit der Vena intercostalis dextra nahe ihrem Vertebralende verbindet, nimmt die zwei obersten Venae intercostales dextrae auf, während die der linken Seite in das Stück der Vena hemiazygos accessoria einmünden, das sich mit Vena anonyma sinistra verbindet. Die Vertebralenden der Intercostalvenen nehmen sämmtlich einen starken Ramus dorsalis auf, der das Blut von den inneren und äusseren venösen Spinalplexus bringt. Diese Rami dorsales sind stärker als der Stamm, in den sie einmünden, und könnten demnach als Hauptstämme, nicht als Aeste der Intercostalvenen bezeichnet werden. Nach Vereinigung mit dem Ramus dorsalis empfängt jede Vena intercostalis noch Aeste von der Vorderfläche der Wirbelkörper und Knochenvenen aus dem Inneren derselben. Die Mündungen der unteren Intercostalvenen in die Vena azygos und hemiazygos sind nach Henle *nie*, *oder nur ganz ausnahmsweise mit Klappen* versehen, die Mündungen der oberen Intercostalvenen aber scheinen nach ihm öfter Klappen

zu besitzen als nicht. Jede Intercostalvene begleitet *einfach* die Arterie an deren oberem Rande. Als Vena intercostalis suprema, S. 345 (a. a. O.), bezeichnet *Henle* eine Vene, die einfach mit dem vorderen oder intercostalem Ast der Arterie gleichen Namens verläuft, von der sie nur durch den Zusammenhang mit der Azygos und Hemiazygos abweicht.

Nach *Luschka* (a. a. O. S. 209 u. ff.) entsprechen die Intercostalvenen ihren Hauptästen nach dem Laufe der bezüglichen Arterien. »Sie nehmen das Blut nicht allein aus den Weichtheilen der Intercostalräume und der nach aussen von diesen liegenden Musculatur auf, sondern auch aus den mächtigen Geflechten, welche die Aussenseite des Rückgrates umspinnen und den Wirbelcanal durchziehen.« Vena intercostalis suprema nennt *Luschka* eine Vene, welche, neben der gleichnamigen Arterie gelegen, das Blut aus den zwei bis drei oberen Intercostalräumen aufnimmt, und in die Vena anonyma einmündet. »Die linke Vena intercostalis suprema zeigt meist ein anderes Verhalten als die rechte; sie tritt meist in den folgenden vier Intercostalvenen zu einem Stämmchen der Hemiazygos superior zusammen, welches hinter der Aorta in die Azygos einmündet.«

»Die Venae intercostales inferiores bieten in ihrem Verhalten einen häufigen Wechsel und in der Regel auch nicht auf beiden Seiten gleiche Anordnung dar. Die rechtsseitigen acht unteren senken sich gewöhnlich *gesondert* in die Azygos ein, während die übrigen meist zu einem gemeinsamen Stämmchen sich vorher vereinigt haben.«

Von denen der linken Seite gelangen nach *Luschka* meist die vier unteren in die Hemiazygos; die fünf oberen bilden mit der Intercostalis suprema einen gemeinsamen Stamm, Hemiazygos superior. Die übrigen treten dann gesondert in die Azygos.

»Mögen die Intercostalvenen aber wie immer angeordnet sein, an jeder derselben hat man zwei Hauptäste, einen vorderen und einen hinteren Ast, zu unterscheiden. Der Ramus anterior s. intercostalis ist bedeutend dünner als der Dorsalis und nimmt das Blut hauptsächlich aus den Bestandtheilen des betreffenden Zwischenrippenraumes auf. Der Ramus dorsalis, welcher sich mit dem vorigen unter einem fast rechten Winkel zwischen je zwei Rippenwurzeln verbindet, ist kurz und dick.

Er nimmt das Blut aus den Plexus vertebrales dorsales und den Sinus canalis vertebralis.«

In diesen Angaben ist, soweit ich die Literatur übersehe, Alles enthalten, was von den Intercostalvenen bekannt ist. Nach denselben verhalten sich die Intercostalvenen in ihrem Verlaufe und ihrer Verästelung im Wesentlichen wie die Intercostalarterien, die sie begleiten. Die Beschreibung, wie sie *Arnold*, Anatomie des Menschen, II. Bd. 1. Abtheilung, 1847, S. 591 u. ff. gab, enthält schon einen Haupttheil dieser späteren Publicationen.

Meine Befunde ergänzen und modificiren die bisherigen Anschauungen.

Nach meinen Untersuchungen bilden die Intercostalvenen, etwa soweit wie die wahren Rippen reichen, bis zur sechsten, eventuell siebenten Intercostalvene, den Körpersegmenten entsprechend, *Venencirkel*, oder Schaltstücke, welche ihren Inhalt sowohl *nach den Venae mammariae internae*, wie nach den Systemen der *Azygos und Hemiazygos entleeren*, sie tragen an ihren Einmündungsstellen *entgegengesetzt gerichtete Klappen*, stellen also nicht nur Aeste des Azygos- und Hemiazygossystems dar, sondern auch Aeste der Mammariae internae, die mit einander zusammenhängen, und von ihrem neutralen Mittelstücke aus ausserdem noch Abflüsse *nach der Vena axillaris absenden*.

Die Venen der Costae spuriae, soweit dieselben durch ihre Knorpelansätze aneinander gekoppelt sind, also etwa die 7., 8. und 9. Intercostalvene, haben keine Abflüsse nach der Achselhöhle mehr, entleeren sich aber gleichfalls unter dem Einflusse der Klappen sowohl nach der Wirbelsäule hin, wie nach dem Sternum zu; ihre vorderen Abflüsse aber bilden paarige Sammelstämme, welche die Arteria musculophrenica zwischen sich fassen und zur Mammaria interna ziehen.

Die zwei bis drei untersten Intercostalvenen, den Costae fluctuantes entsprechend, haben keinen Abfluss nach vorn; es sieht aus, als ob durch die Bewegungen der vorderen frei beweglichen Rippenenden ihre Verbindungen unter einander nicht zur Entwicklung kommen konnten.

Die Caliber der Intercostalvenen nehmen von oben nach abwärts gleichmässig zu.

Die Intercostalvenen entsprechen also in ihrer Form und Verbindung den Verhältnissen der Rippen; nur kommen bei

ihnen Abweichungen der Zahl nach vor, so dass mitunter eine bis zwei Venen weiter nach abwärts noch Verbindungen mit der Achselhöhle oder mit den Venae mammariae internae zeigen können.

Es folgt nun die Beschreibung des Einzelnen. Die Intercostalvenenstämme sind, wie angegehen wird, im Wesentlichen *einfach* angelegt, jedoch zeigen sie wiederholt Spuren einer doppelten Anlage. Man findet hier und da spitzwinkelig abgehende Aeste, welche nach einer Strecke wieder in den Hauptstamm zurückführen und so eine langausgezogene Masche bilden, die ein Stück der Arterie zwischen sich fasst.

Die queren Verbindungsvenen dagegen, die rechtwinkelig über die Innenfläche der Rippen laufen, sind fast stets *paarig* angelegt, ebenso wie die Vena intercostalis suprema accessoria, welche, wenn vorhanden, zu beiden Seiten der gleichnamigen Arterie einen Theil des Blutes der oberen Intercostalräume direct zu der Vena subclavia führt.

Die Frage nach dem Auftreten der paarigen Venen und nach den Ursachen dieser Anlage lässt sich bis jetzt auch nach den Befunden am Thorax noch nicht beantworten. Wenn sich auch an den Extremitäten überall da, wo die Muskeln schützende Hohlräume bilden, wie im Lig. intermusculare internum des Oberschenkels, der Hauptsache nach einfache Venenrohre finden, und zwischen den Muskeln, die bei ihrer Contraction die daselbst gelegenen Theile drücken, paarige Venen auftreten, so dass man auf die Meinung geführt wird, dass die Druckverhältnisse der Umgebung von bestimmendem Einfluss auf diese Bildung ist, so finden sich doch an anderen Körperstellen, da wo man gleichen Druck erwarten sollte, bald paarige Venen, bald einfache. In der Schädelhöhle sind die Venen des Hirnmantels *einfach* angelegt, die der Arteria meningea media entsprechenden Venen dagegen meistens doppelt. Dasselbe findet sich in der Thoraxwand. Die Intercostalvenen selbst sind im Wesentlichen einfach, ihre quer über die Rippen laufenden Verbindungen meist doppelt angelegt, ebenso wie die Vena intercostalis suprema accessoria doppelte Anlage zeigt.

Die *Lage* der Intercostalvenen zu den Arterien verhält sich so, wie wir es bei den Venen auch an anderen Stellen des Körpers wiederfinden. Die Intercostalvenen liegen wie gedeckt und gegen von aussen kommenden Druck gesichert, zwischen

Rippe und Arterie im Sulcus costalis hart unter der Rippe, so wie wir es bei der Passage der Vena iliaca sehen, die am Psoaswall gedeckt durch die darüber liegende Arteria iliaca die Beckenhöhle durchzieht. Die Hauptstämme der Intercostalvenen liegen am unteren Rande jeder Rippe, daneben die Arterie, weiter entfernt von der Rippe der Nerv. Während man an anderen Körperstellen die Venen in Begleitung der Nerven findet, liegt hier, wie bei der Femoralis und der Subclavia, die Arterie dazwischen, so dass es aussieht, als ob das Venenblut den geschützten Winkel unter der Rippe förmlich ausgesucht hätte, oder als ob hier ein Ort des geringsten Druckes das Venenblut angezogen und endlich zur Bildung einer Vene geführt habe.

Am oberen Rande der Rippen finden sich auch Venen, aber unbeständig in der Länge und von viel kleinerem Caliber als die am unteren Rande. Diese Stämmchen am oberen Rippenrande hängen vielfach mit den Stämmen im unteren Sulcus zusammen, und können mitunter, jedoch nur selten so stark im Caliber werden, dass sie den Hauptstamm bilden.

So weit als die Rippen mit ihren vorderen knorpligen Enden directe Verbindungen mit dem Brustbeine eingehen, so weit zeigen auch die Intercostalvenen Abzüge und Verbindungen mit den längs des Brustbeinrandes laufenden Venae mammariae internae. Sie bilden somit quere Verbindungscanäle zwischen den verticalen Venenläufen an der vorderen und hinteren Körperwand, also keine eigentlichen Ramificationen, wie man gewöhnlich meint.

Während aber die Venen der hinteren Körperwand, nämlich die Azygos mit der Hemiazygos propria und accessoria s. superior (*Arnold*, a. a. O. S. 594; *Luschka*, a. a. O. S. 240) nur durch ein oder zwei und mehr Querläufe mit einander in Verbindung stehen, sind die Venae mammariae an der vorderen Thoraxwand durch querverlaufende Venen mit einander verbunden, die sich an jedem Thoraxsegment wiederholen, und namentlich an der Vorderfläche des Proc. xyphoideus besonders stark ausgebildet sind.

Die von *Luschka* (a. a. O. S. 212) erwähnte Vena anastomotica transversa ist also nicht eine besondere Einzelbildung, wenn sie auch auffallend stark ist, sondern nur eine Theilerscheinung des ganzen Systems querer Verbindungen, die sich regelmässig wiederholen. Die Intercostalvenen bilden also ge-

schlossene Ringe, oder Venencirkel, die nach verschiedenen Seiten hin ihren Inhalt entleeren können, je nachdem die Druckverhältnisse sich gestalten. Und zwar liegen an beiden Einmündungsstellen Ventile, die entgegengesetzt gerichtet sind, so dass nur nach der Azygos oder nach der Mammaria hin das Blut ausfliessen kann, aber nicht von der Mammaria zur Azygos, resp. Hemiazygos, oder umgekehrt zu fliessen vermag. Diese Klappen am Vertebralende liegen meist lateral von der Mündung der Rami dorsales, so dass man von der Azygos die letzteren und die Spinalplexus meist füllen kann, ohne die Intercostales selbst zu erreichen. Es sind dies ganz ähnliche Venenanlagen wie der Circulus venosus ischiadicus und obturatorius am Oberschenkel, wie auch ferner der Sinus cavernosus in der Schädelhöhle, der sich nach der Gesichtsfläche wie nach dem Foramen jugulare entleeren kann, wie auch ferner die Venenzirkel, die sich an den Venen der Bauchdecken und an den Venen der Hohlhand und des Hohlfusses finden.

Ausserdem aber besitzen alle Intercostalvenen bis herab zur sechsten, eventuell siebenten, ausnahmsweise selbst achten Rippe, seitliche Abflüsse nach der Achselhöhle, von starkem Caliber, die sich schliesslich mit einander zu einem oder mehreren Stämmen vereinigen, ehe sie in die Vena axillaris einmünden. Die zahlreichen, nach der Achselvene hinführenden Ventile in diesen Venen zeigen, dass es sich hier um *Abflüsse* aus der Brusthöhle handelt, dass also der Saugraum der Achsel bei gewissen Verhältnissen geringeren Druck haben kann, als die Thoraxhöhle.

Es scheint nicht zweifelhaft, dass man im Stande ist, durch gewisse Bewegungen des Armes den Saugapparat in der Achselhöhle in Action zu setzen, so dass er das Blut der Intercostalvenen nach aussen führt, also stark blutleerend auf die Brusthöhle, namentlich auch auf die Pleuren einwirkt, deren Venenästchen in die Intercostalvenen sich ergiessen.

So weit als die Muskelwälle des Latissimus dorsi und Pectoralis major deutlich vorspringen, so weit also das Sauggebiet der Achselhöhle reicht, so weit finden sich auch regelmässig seitliche Abflussrohre an den Intercostalvenen angebracht. Die 7. 8. 9. 10. 11. 12. Intercostalvenen haben für gewöhnlich keine Abflüsse nach der Achselvene, wenigstens keine directen, können aber durch Querleitungen, die nach den oberen Inter-

costalvenen führen, mitunter indirect ihren Inhalt durch jene in die Achselhöhle mit entleeren.

Die 8. und 9. mitunter auch die 10. Intercostalvenen hängen durch paarige Stämme, die in dem Falz des Zwerchfellmuskels am Rippenbogen liegen, mit den Mammariae internae zusammen, während ihr Vertebralende in die Azygos und Hemiazygos einmündet und vor dem Eintritt der Dorsaläste mit Klappen versehen ist.

Diese paarigen Sammelstämme der drei Intercostalvenen an den gekoppelten Costae spuriae mögen Venae musculophrenicae heissen, da sie die gleichnamige Arterie zwischen sich fassen. Sie bilden mit der Vena epigastrica superior den Anfang der Mammaria interna und hängen selbst mit den Zwerchfellvenen und auch hier und da mit den Venen der vorderen Bauchwand zusammen. Nur an den zwei, resp. drei unteren Rippen fehlen diese Verbindungen nach vorn, was wohl damit in Zusammenhang zu bringen ist, dass die unteren Rippen nicht gekoppelt sind, wie die übrigen, sondern durch die freie Lage ihrer vorderen Enden selbständige Bewegungen machen und ihre Intercostalräume auch am vorderen Ende ziemlich beträchtlich vergrössern können. Dem entsprechend verhalten sich hier die Zwerchfellursprünge anders als an den nächst höheren mit einander verbundenen Rippenknorpeln. Sie bilden nicht eine so dichte zusammenhängende Muskelfleischlage, sondern beginnen sehnig, so dass eine Aponeurose vorhanden ist, von der die Fleischfasern entspringen, die sich bei den Bewegungen der Rippen faltet und spannt, und Bewegungen der vorderen Rippenenden in ziemlicher Breite gestattet.

Die hier liegenden Venen erhalten sehr mächtige Zuflüsse vom Zwerchfell und von den Muskelmassen der Bauchdecken, so dass sie ein sehr mächtiges Caliber trotz ihres kurzen Verlaufes erreichen. An den Einmündungsstellen dieser Aeste tragen die Intercostalvenen Klappen, welche ein Zurückstauen des Inhaltes nach dem Zwerchfell und den Bauchdecken zu unmöglich machen.

Ist die Voraussetzung richtig, dass die Venenbildungen abhängig sind von den Druckverhältnissen der Umgebung, so musste sich auch erwarten lassen, dass die Fascien des Halses und die Schlüsselbeine mit ihren Muskeln ihren saugenden Einfluss auf die Bildung der Venen an der oberen Thoraxapertur

geltend machen. Dies findet sich denn auch. An verschiedenen Stellen finden sich Abflüsse der oberen Intercostalvenen von ziemlichem Caliber nach den grossen Halsvenen, so dass das Bild namentlich der obersten Intercostalvene dadurch ein sehr wechselndes wird. Diese relativ sehr kurze Vene wird, wenn der Abzug nach der Mammaria vorn sehr stark ist, ein schwaches Vertebralende zeigen, und umgekehrt; kann aber an einzelnen Strecken fadendünn werden, wenn die Abzüge nach den Venae anonymae event. subclaviae hin, sich sehr stark ausgebildet haben.

Sehr bestimmt zeigen sich die *Caliber*-Verhältnisse an den übrigen Intercostalvenen. Entsprechend der Form des Kegelmantels, wie sie die Wandung des Truncus bildet, nehmen die Massen der musculösen Wandungen von oben nach abwärts zu. Ein gleiches Zunehmen des Calibers von oben nach unten zeigen die Venen. Die 12. Vena intercostalis hat demnach trotz ihres kurzen Verlaufes an der Rippe das grösste Caliber, führt also die grösste Menge Blut von allen Intercostalvenen der Vena cava durch die Azygos zu.

Carl Neumann, *Ueber eine neue und einfache Methode zur Untersuchung der Stetigkeit, respective Unstetigkeit mehrdeutiger Functionen* *).

Während man bisher bei den Stetigkeitsuntersuchungen mehrdeutiger Functionen zunächst die verschiedenen Werthe der Functionen von einander zu *separiren*, und sodann diese Werthe *einzeln* auf ihre Stetigkeit zu untersuchen bemüht gewesen ist, soll im Folgenden eine Methode dargelegt werden, mittelst deren man die in Rede stehenden Werthe *gleichzeitig*, und *ohne* vorgängige Separation, der genannten Untersuchung zu unterwerfen vermag.

§ 1.

Die Wurzeln einer Gleichung $f(z) = s$.

Die Function $f(z)$ sei auf irgend einem Theil $\mathfrak{Z}$ der z-Ebene *eindeutig und stetig*. Gleiches gilt alsdann von der Function

$$(1.) \qquad f(z) - s_1 ,$$

falls man unter s_1 eine *Constante* versteht. Demgemäss werden die Nullpuncte dieser Function (1.) auf $\mathfrak{Z}$ niemals ein Curven- oder Flächen-Element stetig erfüllen können, sondern stets *vereinzelt* liegen. Uebrigens sind dieselben im Allgemeinen von verschiedener Ordnung.

Bezeichnet man nun einen Nullpunct erster Ordnung kurzweg als *elementaren* Nullpunct, und betrachtet man einen Nullpunct μter Ordnung als eine Vereinigung von μ elementaren Nullpuncten, so wird bekanntlich die Anzahl M_1 *sämmtlicher*

*) Vorgelegt und zum Druck gegeben in der Sitzung am 10. December 1883.

auf $\mathfrak{Z}$ vorhandenen elementaren Nullpuncte der Function (1. den Werth haben:

$$(2.)\qquad M_1 = \int_{\mathfrak{Z}} \frac{df(\mathfrak{z})}{2\pi i[f(\mathfrak{z}) - s_1]} ,$$

die Integration positiv erstreckt über alle Randpuncte $\mathfrak{z}$ der Fläche $\mathfrak{Z}$. Dabei wird [was sich stets durch eine geringe Deformation des Randes von $\mathfrak{Z}$ erreichen lässt] vorausgesetzt, *dass kein Nullpunct hart am Rande von $\mathfrak{Z}$ liegt.* Sonst nämlich würde das Integral keinen Sinn haben, und gleichzeitig auch die Zahl M_1 unbestimmt werden; denn es würde zweifelhaft sein, ob ein hart am Rande von $\mathfrak{Z}$ liegender Nullpunct als ein innerhalb oder ausserhalb $\mathfrak{Z}$ liegender Punct aufzufassen ist.

Aus der Voraussetzung nun, dass die Function (1.) am Rande von $\mathfrak{Z}$ nirgends verschwindet, folgt sofort, dass für alle Puncte $\mathfrak{z}$ dieses Randes die Formel stattfindet:

$$(3.)\qquad \text{mod}\,[f(\mathfrak{z}) - s_1] > A ,$$

wo A eine positive und von 0 verschiedene Constante vorstellt. Dabei sei noch Folgendes bemerkt: Führt man neben der Constanten s_1 noch irgend welche andere Constante s_2 in die Betrachtung ein, so ergiebt sich aus der identischen Gleichung

$$[f(\mathfrak{z}) - s_1] = [f(\mathfrak{z}) - s_2] + (s_2 - s_1)$$

sofort:

$$\text{mod}\,[f(\mathfrak{z}) - s_1] < \text{mod}\,[f(\mathfrak{z}) - s_2] + \text{mod}\,(s_2 - s_1) ,$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$\text{mod}\,[f(\mathfrak{z}) - s_2] > \text{mod}\,[f(\mathfrak{z}) - s_1] - \text{mod}\,(s_2 - s_1) ,$$

oder, mit Rücksicht auf (3.):

$$\text{mod}\,[f(\mathfrak{z}) - s_2] > A - \text{mod}\,(s_2 - s_1) .$$

Diese letzte Formel aber gewinnt, falls man die neue Constante s_2 der Bedingung

$$(4.)\qquad \text{mod}\,(s_2 - s_1) < \frac{A}{2}$$

unterwirft, die einfachere Gestalt:

$$(5.)\qquad \text{mod}\,[f(\mathfrak{z}) - s_2] > \left(A - \frac{A}{2}\right) = \frac{A}{2} .$$

Diese Formel (5.) zeigt, dass die der *neuen* Constanten s_2 entsprechende Funtion

(9.) $$f(z) - s_2$$

in den Randpuncten $\mathfrak{z}$ der Fläche $\mathfrak{Z}$ nirgends verschwindet. Demgemäss wird also die Anzahl M_2 all' derjenigen elementaren Nullpuncte, welche diese *neue* Function (9.) innerhalb $\mathfrak{Z}$ besitzt, dargestellt sein durch die mit (2.) analoge Formel:

(10.) $$M_2 = \int_{\mathfrak{Z}} \frac{df(\mathfrak{z})}{2\pi i [f(\mathfrak{z}) - s_2]} \cdot$$

Diese Formel (10.) gilt, zufolge ihrer so eben gegebenen Begründung, für *jedwede* der Bedingung (4.) entsprechende Constante s_2, und bleibt also in Kraft, falls man dieses s_2 innerhalb des Spielraumes (4.) beliebig variiren lässst. Bei einer solchen Variation von s_2 wird also der Werth des Integrales (10.) von Augenblick zu Augenblick durch eine *ganze Zahl* dargestellt sein. Andererseits aber übersieht man sofort, dass der Werth des Integrals bei einer solchen innerhalb des Spielraumes (4.) bleibenden Variation von s_2 nur in *stetiger* Weise sich ändern kann *). Demgemäss ist also die in Rede stehende ganze Zahl während dieser Variation fortdauernd *ein und dieselbe.*

Das Integral (10.) bleibt also *constant*, falls man das s_2 innerhalb des Spielraumes (4.) beliebig variiren, z. B. identisch mit s_1 werden lässt. Somit folgt aus (10.) und (2.):

(11.) $$M_2 = M_1;$$

und man gelangt daher, indem man s und $(s + \Delta s)$ respective für s_1 und s_2 substituirt, zu folgendem Satz:

Versteht man unter $f(z)$ eine Function, die auf irgend einem Theil $\mathfrak{Z}$ der z-Ebene eindeutig und stetig ist, ferner unter s eine beliebig gegebene Constante, und setzt man voraus, dass unter den Nullpuncten der Function

(I.) $$f(z) - s$$

keiner hart am Rande von $\mathfrak{Z}$ liegt, so wird die Anzahl der innerhalb $\mathfrak{Z}$ befindlichen elementaren Nullpuncte der Function (I.) *bei*

*) Denn so lange die Formel (4.) erfüllt bleibt, bleibt die Formel (5.) ebenfalls in Kraft.

einer beliebigen Variation der Constanten s u n g e ä n d e r t *bleiben, falls man nur diese Variation* Δs *der Bedingung unterwirft:*

$$\mathrm{mod}\,(\Delta s) < \varrho\ ,$$

und dabei die (positive) Grösse ϱ *hinreichend klein macht.*

Man kann diesen Satz offenbar auch anwenden auf irgend einen *Theil* der Fläche $\mathfrak{Z}$. Und diese Anwendung mag folgendermassen bewerkstelligt werden.

Es sei c irgend einer von den Nullpuncten, welche die Function (I.) innerhalb $\mathfrak{Z}$ besitzt, und μ die Ordnungszahl dieses Nullpunctes c; so dass also derselbe eine Vereinigung von μ elementaren Nullpuncten repräsentirt. Man beschreibe nun um c als Centrum eine Kreisperipherie, deren Radius *beliebig klein*, mindestens aber so klein ist, dass alle übrigen Nullpuncte der Function (I.) *ausserhalb* der Peripherie liegen.

Die in Rede stehende Function (I.):

$$f(z) - s$$

besitzt alsdann innerhalb dieser Peripherie im Ganzen μ elementare Nullpuncte. Und diese Anzahl μ der innerhalb der Peripherie vorhandenen elementaren Nullpuncte wird [zufolge des vorhergehenden Satzes] bei einer beliebigen Variation der Constanten s *ungeändert* bleiben, falls man nur diese Variation Δs der Bedingung unterwirft:

$$\mathrm{mod}\,(\Delta s) < \varrho\ ,$$

und dabei das ϱ hinreichend klein macht. Während übrigens die μ elementaren Nullpuncte der Function $[f(z) - s]$ in c vereinigt sind, wird eine solche Vereinigung bei den Nullpuncten der variirten Function $[f(z) - (s + \Delta s)]$ im Allgemeinen nicht mehr stattfinden. Beachtet man also, dass der Radius der construirten Peripherie *beliebig klein* sein kann, und bezeichnet man diesen beliebig kleinen Radius mit ε, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Es sei $\mathfrak{Z}$ *ein endlicher Theil der z-Ebene, und c ein gegebener Punct innerhalb* $\mathfrak{Z}$. *Ferner repräsentire*

$$f(z) - s$$

eine mit der Constanten s behaftete Function von z, die auf $\mathfrak{Z}$ *eindeutig und stetig ist, und in c einen Nullpunct* μ*ter Ordnung, d. i.*

eine Vereinigung von μ elementaren Nullpuncten besitzt. Alsdann ist die Anzahl derjenigen elementaren Nullpuncte, welche die v a - r i i r t e *Function*

(I.a) $$f(z) - (s + \Delta s)$$

innerhalb eines um c beschriebenen kleinen Kreises besitzt, ebenfalls $= \mu$. *Und zwar wird man diese μ elementaren Nullpuncte $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ der variirten Function durch gehörige Verkleinerung von Δs beliebig nahe an den Punct c heranzuziehen im Stande sein.*

Bezeichnet nämlich ε einen ad libitum gegebenen Kleinheitsgrad, so werden $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ in den Spielraum

$$\begin{aligned}\text{mod }(c_1 - c) &< \varepsilon\,,\\ \text{mod }(c_2 - c) &< \varepsilon\,,\\ &\cdots\\ \text{mod }(c_\mu - c) &< \varepsilon\,,\end{aligned}$$

hineingedrängt werden können; und zwar wird solches dadurch erreichbar sein, dass man die Variation Δs der Bedingung unterwirft:

$$\text{mod }(\Delta s) < \varrho\,,$$

und dabei das (positive) ϱ hinreichend klein macht.

Denkt man sich also die ursprüngliche Constante s durch einen *festen Punct* in der s-Ebene, andererseits die variirte Constante $(s + \Delta s)$ durch einen *variablen* Punct in dieser Ebene dargestellt, so sind $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ Functionen von $(s + \Delta s)$, welche im Puncte s *stetig* zu nennen sind. Demgemäss kann man den Satz kürzer so aussprechen:

Ist die mit der Constanten s behaftete Function

(I.b) $$f(z) - s$$

auf der z-Ebene im Bereich des Punctes c eindeutig und stetig, und besitzt sie in c selber einen Nullpunct μter Ordnung, d. i. eine Vereinigung von μ elementaren Nullpuncten, so werden diese μ elementaren Nullpuncte bei irgend welcher Aenderung von s in Bewegung gerathen, also Functionen von s sein.

Und zwar sind diese Functionen, bezogen auf die s-Ebene, im Puncte s s t e t i g, *falls man nämlich unter dem Puncte s den* A n f a n g s w e r t h *von s versteht.*

Solches constatirt, kehren wir zurück zur Betrachtung eines *beliebigen* Theils $\mathfrak{Z}$ der z-Ebene, indem wir wiederum annehmen, die Function $f(z)$ sei auf $\mathfrak{Z}$ eindeutig und stetig. Gleiches gilt alsdann auch von der mit einer beliebigen Constante s behafteten Function

$$f(z) - s.$$

Die Nullpuncte dieser letztern Function innerhalb $\mathfrak{Z}$ mögen bezeichnet werden mit z_1, z_2, z_3, ...; wobei zu bemerken ist, dass z.B. z_1 im Allgemeinen einen Nullpunct höherer Ordnung, also eine Vereinigung von μ_1 elementaren Nullpuncten vorstellen wird. Ebenso werden z_2, z_3, ... Vereinigungen von μ_2, μ_3, ... elementaren Nullpuncten vorstellen. Dabei bezeichnen μ_1, μ_2, μ_3, ... irgend welche Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, ...

All' diese $(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots)$ elementaren Nullpuncte gerathen, falls man s *ändert, in Bewegung*, und sind also *Functionen* von s. Und all' diese Functionen sind, zufolge des vorhergehenden Satzes, *stetige* Functionen von s. Also der Satz:

Ist die Function $f(z)$ auf irgend einen e n d l i c h e n Theil $\mathfrak{Z}$ der z-Ebene eindeutig und stetig, und setzt man diese Function gleich einer Constanten s, so werden die elementaren Wurzeln z der so entstehenden Gleichung

$$\text{(II.)} \qquad f(z) = s$$

s t e t i g e Functionen von s sein. Selbstverständlich gilt dieser Satz nur insoweit, als die Function $f(z)$ überhaupt charakterisirt ist, also nur insoweit, als jene Wurzeln z innerhalb $\mathfrak{Z}$ bleiben.

Wir gehen über zu dem Fall, dass die Function $f(z)$ auf $\mathfrak{Z}$ eindeutig, aber nur *bis auf einzelne Pole* stetig ist. Bezeichnet man diese Pole mit α_1, α_2, α_3, ... und andrerseits die *Nullpuncte* von $f(z)$ mit β_1, β_2, β_3, ..., so ist also $f(z)$ auf der Fläche

$$\mathfrak{Z}_\alpha = \mathfrak{Z} - [(\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + \cdots],$$

und andrerseits $\frac{1}{f(z)}$ auf der Fläche

$$\mathfrak{Z}_\beta = \mathfrak{Z} - [(\beta_1) + (\beta_2) + (\beta_3) + \cdots]$$

überall *eindeutig und stetig*. Dabei soll unter $\mathfrak{Z}_\alpha$ dasjenige Flächenstück verstanden sein, welches von $\mathfrak{Z}$ nach Absonderung

der Bereiche von α_1, α_2, α_3, . . . noch übrig bleibt, und $\mathfrak{Z}_\beta$ die analoge Bedeutung haben mit Bezug auf β_1, β_2, β_3, . . . Demgemäss ist der Satz (II.) innerhalb $\mathfrak{Z}_\alpha$ unmittelbar anwendbar auf die Wurzeln z der Gleichung

$$f(z) = s;$$

und andrerseits innerhalb $\mathfrak{Z}_\beta$ anwendbar auf die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{s}.$$

Man gelangt daher zu folgendem Resultat:

Ist die Function $f(z)$ auf einem endlichen Theil $\mathfrak{Z}$ der z-Ebene eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, und setzt man diese Function gleich einer Constanten s, so werden die elementaren Wurzeln z der so entstehenden Gleichung

(IIa.) $$f(z) = s$$

stetige Functionen von s sein, soweit s endlich bleibt, und andrerseits stetige Functionen von $\frac{1}{s}$ sein, soweit $\frac{1}{s}$ endlich bleibt.

Oder einfacher ausgedrückt: Jene elementaren Wurzeln z sind Functionen von s, die auf der gewöhlichen einblättrigen s-Kugelfläche überall stetig sind. Selbstverständlich gilt dieser Satz wiederum nur insoweit, als die Function $f(z)$ überhaupt charakterisirt ist, also nur insoweit, als jene Wurzeln z innerhalb $\mathfrak{Z}$ bleiben.

Wir wollen schliesslich den Fall in Betracht ziehen, dass $f(z)$ *auf der ganzen z-Kugelfläche* eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig ist. Alsdann ist $f(z)$, als Function von z selber betrachtet, auf jedem *endlichen* Theil der Horizontal-Ebene, andererseits aber als Function von $\frac{1}{z}$ aufgefasst, auf jedem *endlichen* Theil der Antipodenebene mit den genannten Eigenschaften versehen. Bezeichnet man also die Wurzeln der Gleichung

$$f(z) = s$$

kurzweg mit z, und bringt man den vorhergehenden Satz (IIa.) in Anwendung, so ergiebt sich sofort, dass diese Wurzeln z, so weit sie *endlich* bleiben, Functionen von s repräsentiren, die auf der gewöhnlichen einblättrigen s-Kugelfläche *stetig* sind,

und dass andererseits die reciproken Werthe $\frac{1}{z}$ dieser Wurzeln, so weit sie *endlich* bleiben, ebenfalls auf jener s-Kugelfläche *stetig* sind.

Bezeichnet man nun aber den Werth der Function $f(z)$ für $z = \infty$ mit s':

$$f(\infty) = s',$$

so sind die in Rede stehenden Wurzeln z auf der s-Kugelfläche allenthalben *endlich*, mit alleiniger Ausnahme des Punctes s'. Demgemäss sind also jene Wurzeln z auf der s-Kugelfläche, mit Ausnahme des Punctes s', überall *stetig*, in diesem Puncte s' aber theils stetig, theils derart unstetig, dass ihre reciproken Werthe im Bereich des Punctes *stetig* bleiben. Mit andern Worten: Jene Wurzeln z sind auf der s-Kugelfläche bis auf den Punct s' *stetig*, in s' aber theils *stetig*, theils *polarunstetig*. Also der Satz:

Ist die Function $f(z)$ auf der gewöhnlichen einblättrigen z-Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig), und bezeichnet man die elementaren Wurzeln der Gleichung*

(III.) $$f(z) = s$$

kurzweg mit z, so sind diese z auf der gewöhnlichen einblättrigen s-Kugelfläche, bis auf einen einzigen Punct s', stetig, in diesem Punct s' aber theils stetig, theils polarunstetig. Dieser Punct s' bestimmt sich mittelst der Formel $f(\infty) = s'$.

§ 2.

Die Wurzeln einer Gleichung $F(s, z) = 0$.

Es sei $F = F(s, z)$ eine gegebene Function der beiden complexen Argumente s und z. Ferner sei irgend ein endlicher Theil der s-Ebene mit $\mathfrak{S}$, und irgend ein endlicher Theil der z-Ebene mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet. Und jene Function F mag folgenden Bedingungen entsprechen:

(1.) I. Bei festgehaltenem s soll $F(s, z)$ auf $\mathfrak{Z}$ eindeutig und stetig sein, falls nur jenes festgehaltene s auf $\mathfrak{S}$ liegt.
II. Umgekehrt soll $F(s, z)$ bei festgehaltenem z auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig sein, falls nur das festgehaltene z auf $\mathfrak{Z}$ liegt.

---

*) Eine diesen Bedingungen entsprechende Function $f(z)$ ist bekanntlich stets eine *rationale* Function von z.

Versteht man also unter s_1 einen innerhalb $\mathfrak{S}$ beliebig gegebenen Punct, so ist

$$(2.)\qquad F(s_1, z)$$

innerhalb $\mathfrak{Z}$ eindeutig und stetig, also daselbst nur mit vereinzelten Nullpuncten behaftet. Und zwar wird die Anzahl M_1 aller innerhalb $\mathfrak{Z}$ vorhandenen elementaren Nullpuncte den Werth besitzen:

$$(3.)\qquad \mathsf{M}_1 = \int_{\mathfrak{Z}} \frac{d\,F(s_1, \mathfrak{z})}{2\pi i\, F(s_1, \mathfrak{z})},$$

die Integration positiv erstreckt über alle Randpuncte $\mathfrak{z}$ der Fläche $\mathfrak{Z}$. Dabei wird vorausgesetzt, *dass kein Nullpunct hart am Rande von $\mathfrak{Z}$ liegt*, eine Voraussetzung, die, falls sie nicht von Hause aus schon erfüllt sein sollte, leicht durch eine kleine Deformation der Randcurve realisirbar sein wird.

Dieser Voraussetzung entsprechend, gilt für sämmtliche Randpuncte $\mathfrak{z}$ der Fläche $\mathfrak{Z}$ die Formel:

$$(4.)\qquad \text{mod}\, F(s_1, \mathfrak{z}) > A,$$

wo A eine positive, von 0 verschiedene Constante vorstellt. Markirt man nun innerhalb $\mathfrak{S}$ irgend einen zweiten Punct s_2, so ergiebt sich aus der identischen Gleichung:

$$F(s_1, \mathfrak{z}) = F(s_2, \mathfrak{z}) - [F(s_2, \mathfrak{z}) - F(s_1, \mathfrak{z})]$$

sofort:

$$\text{mod}\, F(s_1, \mathfrak{z}) < \text{mod}\, F(s_2, \mathfrak{z}) + \text{mod}\, [F(s_2, \mathfrak{z}) - F(s_1, \mathfrak{z})],$$

oder, anders geschrieben:

$$\text{mod}\, F(s_2, \mathfrak{z}) > \text{mod}\, F(s_1, \mathfrak{z}) - \text{mod}\, [F(s_2, \mathfrak{z}) - F(s_1, \mathfrak{z})],$$

oder, mit Rücksicht auf (4.):

$$(5.)\qquad \text{mod}\, F(s_2, \mathfrak{z}) > A - \text{mod}\, [F(s_2, \mathfrak{z}) - F(s_1, \mathfrak{z})].$$

Um den Modul rechter Hand näher zu untersuchen, beschreiben wir *innerhalb* $\mathfrak{S}$ und um s_1 *als Centrum* zwei Kreisperipherien (σ) und (Σ), der Art, das (σ) kleiner als (Σ) ist, und nehmen an, dass der Punct s_2 innerhalb (σ) liegt. Aldann ergeben sich mittelst der Voraussetzungen (1.) sofort die Formeln:

$$F(s_1, \mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Sigma)} \frac{F(\Sigma, \mathfrak{z})\, d\Sigma}{\Sigma - s_1},$$

$$F(s_2, \mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Sigma)} \frac{F(\Sigma, \mathfrak{z})\, d\Sigma}{\Sigma - s_2},$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$(6.)\qquad F(s_2, \mathfrak{z}) - F(s_1, \mathfrak{z}) = \frac{s_2 - s_1}{2\pi i}\int\limits_{(\Sigma)} \frac{F(\Sigma, \mathfrak{z})\, d\Sigma}{(\Sigma - s_1)(\Sigma - s_2)},$$

wo die Integrationen sämmtlich positiv erstreckt sind über alle Puncte Σ der Peripherie (Σ).

Sind nun ϱ und P die Radien der Peripherien (σ) und (Σ), und beachtet man, dass s_1 und s_2 innerhalb (σ) liegen, so ergiebt sich sofort: $\mathrm{mod}\,(\Sigma - s_1) > \mathrm{P} - \varrho$, mithin:

$$(\alpha.)\qquad \frac{1}{\mathrm{mod}\,(\Sigma - s_1)} < \frac{1}{\mathrm{P} - \varrho},$$

und ebenso:

$$(\beta.)\qquad \frac{1}{\mathrm{mod}\,(\Sigma - s_2)} < \frac{1}{\mathrm{P} - \varrho}.$$

Desgleichen wird:

$$(\gamma.)\qquad \mathrm{mod}\,(s_2 - s_1) < 2\varrho,$$

und ferner:

$$(\delta.)\qquad \mathrm{mod}\,(d\Sigma) = d\Pi,$$

falls nämlich $d\Pi$ das Längenelement der Peripherie (Σ) bezeichnet. Ueberdies ergiebt sich auf Grund der Voraussetzungen (1.), dass die Function

$$F(\Sigma, \mathfrak{z})$$

für alle Lagen, welche die Puncte Σ und $\mathfrak{z}$ respective auf der Peripherie (Σ) und am Rande von $\mathfrak{Z}$ anzunehmen im Stande sind, *endlich* bleibt, oder genauer ausgedrückt, dass für all' jene Lagen

$$(\varepsilon.)\qquad \mathrm{mod}\, F(\Sigma, \mathfrak{z}) < M$$

ist, wo M eine *endliche* positive reelle Constante vorstellt. — Mit Rücksicht auf $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$, $(\varepsilon.)$ folgt nun aus (6.)

$$(7.)\qquad \mathrm{mod}\,[F(s_2, \mathfrak{z}) - F(s_1, \mathfrak{z})] < \frac{2\varrho}{2\pi}\,\frac{M\cdot 2\pi\mathrm{P}}{(\mathrm{P} - \varrho)^2}.$$

Der hier auf der rechten Seite stehende Ausdruck kann offenbar durch Verkleinerung von ϱ *beliebig klein*, z. B. kleiner als $\frac{A}{2}$ gemacht werden. Alsdann erhält man:

$$(8.)\qquad \mathrm{mod}\,[F(s_2, \mathfrak{z}) - F(s_1, \mathfrak{z})] < \frac{A}{2}.$$

Und mit Rücksicht hierauf folgt aus (5.)

$$(9.)\qquad \operatorname{mod} F(s_2, \mathfrak{z}) > \left(A - \frac{A}{2}\right) = \frac{A}{2}.$$

Man kann also, wie hieraus hervorgeht, um s_1 als Centrum eine Kreisperipherie (σ) von Radius ϱ beschreiben, und diesen Radius ϱ so klein machen, dass für jedweden innerhalb (σ) liegenden Punct s_2 und für jedweden Randpunct $\mathfrak{z}$ der Fläche $\mathfrak{Z}$ die Formel (9.) stattfindet, wo A eine positive und von 0 verschiedene Constante vorstellt.

Diese Formel (9.) zeigt, dass die dem festen Puncte s_2 entsprechende Function

$$(10.)\qquad F(s_2, \mathfrak{z})$$

in den Randpuncten $\mathfrak{z}$ der Fläche $\mathfrak{Z}$ nirgends verschwindet. Demgemäss wird also die Anzahl M_2 all' derjenigen elementaren Nullpuncte, welche diese neue Function (10.) innerhalb $\mathfrak{Z}$ besitzt, dargestellt sein durch folgende mit (3.) analoge Formel:

$$(11.)\qquad \mathsf{M}_2 = \int_{\mathfrak{Z}} \frac{d\,F(s_2, \mathfrak{z})}{2\pi i\, F(s_2, \mathfrak{z})}.$$

Diese Formel (11.) bleibt, zufolge ihrer Begründung, in Kraft für einen innerhalb (σ) beliebig variirenden Punct s_2, und zeigt also, dass der Werth des Integrals während einer solchen Variation stets eine *ganze Zahl* ist. Andererseits aber bemerkt man, dass während einer solchen Variation der Werth des Integrals nur in *stetiger Weise* sich ändern kann*). Demgemäss bleibt die den Werth des Integrals ausdrückende ganze Zahl stets *dieselbe*.

Das Integral (11.) bleibt also *constant*, falls man s_2 innerhalb (σ) beliebig variiren, z. B. identisch werden lässt mit s_1. Somit folgt aus (11.) und (3.):

$$(12.)\qquad \mathsf{M}_2 = \mathsf{M}_1.$$

Also der Satz: *Es sei $\mathfrak{S}$ irgend ein endlicher Theil der s-Ebene, und $\mathfrak{Z}$ irgend ein endlicher Theil der z-Ebene. Ist nun die Function $F(s, z)$ auf den Flächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Z}$ eindeutig und stetig, versteht man ferner unter s irgend einen festen Punct innerhalb $\mathfrak{S}$, und setzt man voraus, dass die Function*

$$(I.)\qquad F(s, z)$$

*) Denn so lange der Punct s_2 innerhalb des Kreises (σ) bleibt, bleibt die Formel (9.) in Kraft; wie solches aus der Construction jenes Kreises oder vielmehr aus der über seinen Radius ϱ getroffenen Bestimmung sich ergeben hat.

keinen hart am Rande von $\mathfrak{Z}$ liegenden Nullpunct hat, so wird die Anzahl der innerhalb $\mathfrak{Z}$ liegenden elementaren Nullpuncte dieser Function bei einer beliebigen Variation des Punctes s ungeändert bleiben, falls man nur diese Variation Δs der Bedingung unterwirft:

$$\mathrm{mod}\,(\Delta s) < \varrho,$$

und dabei das ϱ hinreichend klein macht.

Gestützt auf diesen Satz, kann man ebenso vorwärts gehen, wie im vorhergehenden Paragraph vom Satze (I.) aus. An Stelle des dortigen Satzes (II.) ergiebt sich alsdann, wie leicht zu übersehen, folgender:

Es seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Z}$ irgend zwei endliche Theile der s- und z-Ebene. Ferner sei $F(s, z)$ eine Function, welche, so lange s und z respective auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Z}$ bleiben, auf jeder dieser beiden Flächen eindeutig und stetig ist. Bezeichnet man alsdann für jedwedes s die elementaren Wurzeln der Gleichung

$$\text{(II.)}\qquad F(s, z) = 0$$

mit z, so sind diese z stetige Functionen von s. Selbstverständlich bleibt dieser Satz nur so weit in Kraft, als die Charakterisirung der Function $F(s, z)$ reicht, also nur insoweit, als die Puncte s und z innerhalb der gegebenen Flächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Z}$ bleiben.

Von hier aus in analoger Weise weitergehend, wie im vorhergehenden Paragraph, gelangt man schliesslich zu einem Satze (III.), der dem dortigen Satze (III.) parallel steht, und folgendermassen lautet:

Ist $F(s, z)$, als Function von z betrachtet, auf der einblättrigen z-Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, besitzt ferner umgekehrt $F(s, z)$, als Function von s betrachtet, auf der einblättrigen s-Kugelfläche ebenfalls die genannten Eigenschaften), und bezeichnet man für jedwedes s die elementaren Wurzeln der Gleichung*

$$\text{(III.)}\qquad F(s, z) = 0$$

mit z, so werden diese z Functionen von s sein, welche auf der einblättrigen s-Kugelfläche, bis auf einzelne Pole, stetig sind.

Nimmt man für $F(s, z)$ eine Function, welche die zu Anfang dieses Satzes genannten Bedingungen nur auf gewissen

*) Eine Function $F(s, z)$, die all' diesen Bedingungen entpricht, ist bekanntlich stets eine *rationale* Function der beiden Argumente s und z.

Theilen der z- und s-Kugelfläche erfüllt, so bleibt der Satz, wie man leicht übersieht, nach wie vor in Kraft, selbstverständlich nur insoweit, als die in Betracht kommenden Werthe von z und s innerhalb jener Theile verbleiben. Und der Satz erlangt auf diese Weise eine Gestalt, in welcher er die meisten der früheren Sätze als specielle Fälle umfasst.

Nimmt man ferner für $F(s, z)$ eine Function, welche die zu Anfang des Satzes (III.) genannten Bedingungen mit Bezug auf eine mehrblättrige Riemann'sche z-Kugelfläche und die einblättrige s-Kugelfläche, respective mit Bezug auf irgend zwei *Theile* dieser Flächen erfüllt, so wird der Satz, wie man leicht übersieht, gleichfalls in Kraft bleiben. U. s. w.

Wir kehren zurück zum Satze (III.) Jede *rationale* Function der beiden Argumente s und z

$$F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right)$$

genügt den in jenem Satz (III.) gestellten Anforderungen. Für jedwedes s sind daher die elementaren Wurzeln z der Gleichung

$$F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$$

Functionen von s, die auf der einblättrigen s-Kugelfläche, *bis auf einzelne Pole, stetig*, aber nicht eindeutig sind. Vielmehr erhält man für jedweden Punct s der s-Kugelfläche m Wurzeln z.

Bekanntlich können nun immer nur *einzelne* Puncte s existiren, in denen zwei oder mehrere der zugehörigen Wurzeln z einander gleich sind. Bezeichnet man diese einzelnen Puncte s mit $s_1, s_2, s_3, \cdots s_q$, und zieht man auf der s-Kugelfläche irgend eine von s_1 über $s_2, s_3, \cdots$ bis s_q laufende Linie λ, so kann man bekanntlich eine m-blättrige Riemann'sche s-Kugelfläche construiren, welche in den Puncten $s_1, s_2, s_3, \cdots s_q$ ihre Windungspuncte, ferner in der Linie λ ihre Uebergangslinien hat, und auf welcher alle m Wurzeln z der Gleichung

$$F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$$

in *eindeutiger* Weise sich ausbreiten lassen. Auf dieser m-blättrigen s-Kugelfläche werden also dann die in Rede stehenden

Wurzeln nicht blos *bis auf einzelne Pole stetig*, sondern auch *überall eindeutig* sein. Also der Satz:

Denkt man sich z als Function von s gegeben mittelst einer Gleichung von der Form:

$$\text{IV.} \qquad F(s, z) = 0 ,$$

so lassen sich sämmtliche Werthe dieser Function $z = \varphi(s)$ in e i n d e u t i g e r W e i s e *ausbreiten auf einer gewissen m-blättrigen Riemann'schen s-Kugelfläche. Und namentlich wird alsdann diese Function $z = \varphi(s)$ auf der genannten Fläche,* b i s a u f e i n z e l n e P o l e , s t e t i g *sein.*

Hieraus folgt alsdann weiter, dass die Function $z = \varphi(s)$ im Bereich eines jedweden Punctes g der genannten Fläche in eine convergente Reihe von folgender Form entwickelbar ist:

$$z = \sigma^{\mu}(A_0 + A_1\sigma + A_2\sigma^2 + \cdots) ,$$

wo σ einen der beiden Ausdrücke repräsentirt:

$$\sigma = (s - g)^{\frac{1}{m}} ,$$

$$\sigma = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{g}\right)^{\frac{1}{m}} ,$$

und zwar nach Belieben den ersten oder zweiten, falls g weder 0 noch ∞ ist, hingegen nur den ersteren, falls $g = 0$, und nur den letztern, falls $g = \infty$ ist. Dabei bezeichnet m die Anzahl der im Puncte g mit einander zusammenhängenden Blätter, ferner μ eine positive oder negative ganze Zahl [die Ordnungszahl der Function $z = \varphi(s)$ im Puncte g], während endlich A_0, A_1, A_2, $\cdots$ constante Coefficienten vorstellen.

Auf diese Weise ergeben sich die von *Thomae* über die Entwicklung nach Potenzreihen, respective über die Umkehrung solcher Reihen erhaltener Resultate [Thomae, El. Th. d. analyt. Functionen, Halle, 1880, p. 107—112] in vollständiger Strenge, und zugleich auf einem Wege, der, wie mir scheint, bedeutend einfacher ist, als der dortige.

Carl Neumann, *Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen**).

Die Function

$$\vartheta(U_1, U_2, \cdots, U_p)$$

mag zur Abkürzung mit $\vartheta(U_\sigma)$ bezeichnet werden. Ueberhaupt mag festgehalten werden an den von mir in meinen Vorlesungen**) gebrauchten Bezeichnungen. So z. B. sollen unter $w_1(z)$, $w_2(z)$, $\cdots$ $w_p(z)$ die p Normalintegrale erster Gattung verstanden werden, also dieselben Functionen, welche Riemann mit u_1, u_2, $\cdots$ u_p bezeichnet hat. Dabei soll übrigens die der Betrachtung zu Grunde gelegte Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eine *ganz willkürlich gegebene* sein, von beliebig vielen Blättern, mit beliebig vielen und beliebig gelegenen Windungspuncten, u. s. w.

Alsdann gilt, wie Riemann in den Artikeln 17—22 seiner berühmten Abhandlung über die Theorie der Abel'schen Functionen gezeigt hat (Ges. Werke pg. 120—126), folgendes

Theorem. — *Denkt man sich p Constanten G_1, G_2, $\cdots$ G_p der Art gewählt, dass die Function*

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - G_\sigma) \tag{A.}$$

nicht identisch $= 0$ ist, so wird dieselbe auf der Fläche $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $b_\varkappa$, eindeutig und stetig, in jenen Curven aber mit folgendem Quotienten behaftet sein:

$$\text{längs } b_\varkappa: \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} = e^{2G_\varkappa - w_\varkappa(\lambda) - w_\varkappa(\varrho)} \tag{B.}$$

---

*) Vorgelegt und zum Druck gegeben in der Sitzung am 10. Decbr. 1881.

**) Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie. Leipzig, 1865.

Dabei bezeichnen λ und ϱ irgend zwei am linken und rechten Ufer der Curve $b_\varkappa$ einander gegenüberliegende Puncte.

Ferner wird alsdann diese Function $F(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ im Ganzen p elementare Nullpuncte: $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_p$ besitzen. Diese Nullpuncte sind ihrer Lage nach unbekannt. Jedoch weiss man, dass zwischen ihnen und den gegebenen Constanten $G_1, G_2, \cdots G_p$ die Relationen stattfinden:

$$\text{(C.)}\quad w_\sigma(\eta_1) + w_\sigma(\eta_2) \cdots + w_\sigma(\eta_p) \equiv G_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \cdots p\,.$$

Man weiss hingegen z. B. nicht, ob diese Nullpuncte durch die vorstehenden Relationen (C.) eindeutig bestimmt sind. Möglicherweise existiren also, ausser diesen Nullpuncten, noch irgend welche andere Puncte, die ebenfalls den Relationen (C.) Genüge leisten.

Dabei sind, wie schon bemerkt wurde, unter $w_1(z)$, $w_2(z)$, ... $w_p(z)$ genau dieselben Functionen zu verstehen, welche Riemann a. a. O. mit $u_1, u_2, \ldots u_p$ bezeichnet hat. Auch ist dabei vorausgesetzt, die additiven Constanten dieser Functionen seien in solcher Weise fixirt worden, dass die a. a. O. von Riemann mit $k_1, k_2, \ldots k_p$ bezeichneten Constanten sämmtlich $= 0$ sind.

Die genannten Artikel 17—22 der Riemann'schen Abhandlung, deren Hauptresultat durch das so eben ausgesprochene Theorem repräsentirt ist, bieten dem Verständniss keine erhebliche Schwierigkeit dar. Alsdann aber findet beim Uebergang zu den folgenden Artikeln 23, 24 etc. ein *plötzlicher Sprung* statt; wie Jeder bemerkt haben wird, der dem Studium der Riemann'schen Abhandlung mit gebührender Sorgfalt sich hingegeben hat.

Jener plötzliche Sprung würde beseitigt, und eine legitime und continuirliche Schlussfolge hergestellt werden, falls es nur gelingen wollte, zu zeigen,

(D.) *dass die Nullpuncte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ der Function $F(z)$, durch passende Wahl der Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$, in beliebig vorgeschriebene Lagen hineingedrängt werden können.*

Versucht man aber diesen noch fehlenden Satz (D.) zu beweisen, so wird man, selbst bei Anwendung der von Riemann später 1865 in seiner Abhandlung über das Verschwinden der

Thetafunctionen (Ges. Werke p. 198) dargelegten Methoden, auf mancherlei Schwierigkeiten stossen.

So z. B. wird bei dem Beweise, den ich in meinen Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie (Leipzig, bei Teubner 1865, p. 484—486) für den Satz (D.) zu geben versucht habe, stillschweigend vorausgesetzt, dass die Nullpuncte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ der Function $F(z)$ bei einer Aenderung der Constanten G_1, $G_2, \ldots G_p$ sich immer nur *stetig* verschieben können. Solches aber wirklich darzuthun, dürfte seine Schwierigkeit haben, namentlich in *den* Fällen, wo bei einer Aenderung jener Constanten die Nullpuncte theilweise zur Coincidenz kommen, um sodann später, bei einer weiteren Aenderung jener Constanten, sich wieder von einander zu trennen. Und genau derselben Schwierigkeit begegnet man auch dann, wenn man den Satz (D.) mittelst derjenigen Methoden zu begründen sucht, welche von Riemann selber in seiner Abhandlung über das Verschwinden der Thetafunctionen exponirt sind.

Aber selbst hiervon abgesehen, stellen einer einwurfslosen Begründung des Satzes (D.) noch *andere* Schwierigkeiten sich entgegen. Nimmt man nämlich an, *es sei bereits* bewiesen, dass die Nullpuncte, bei einer Aenderung der Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$, nur in *stetiger* Weise sich verschieben*), es seien also die Nullpuncte der Function

$$(\alpha.)\qquad F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - G_\sigma)$$

von denen der Function

$$(\beta.)\qquad F_1(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - [G_\sigma + dG_\sigma])$$

nur unendlich wenig verschieden, und es seien demgemäss die Nullpuncte der erstern Function mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$, und die der letztern mit $\eta_1 + d\eta_1, \eta_2 + d\eta_2, \ldots\ldots \eta_p + d\eta_p$ bezeichnet, so ergeben sich allerdings, mittelst des Theorems (C.), die Formeln:

$$(\gamma.)\qquad w_\sigma(\eta_1) + w_\sigma(\eta_2) \ldots + w_\sigma(\eta_p) \equiv G_\sigma,$$

$$(\delta.)\quad w_\sigma(\eta_1 + d\eta_1) + w_\sigma(\eta_2 + d\eta_2) \ldots + w_\sigma(\eta_p + d\eta_p) \equiv G_\sigma + dG_\sigma,$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p;$$

woraus durch Subtraction folgt:

---

*) Auch wird solches zu beweisen in der That *möglich* sein mittelst der von mir in dem vorhergehenden Aufsatz (diese Berichte, p. 85) angegebenen neuen Methode.

$$(\varepsilon.)\quad \varphi_\sigma(\eta_1)\,d\eta_1 + \varphi_\sigma(\eta_2)\,d\eta_2 \ldots + \varphi_\sigma(\eta_p)\,d\eta_p = dG_\sigma,$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p,$$

falls nämlich zur Abkürzung

$$(\zeta.)\qquad \frac{dw_\sigma(z)}{dz} = \varphi_\sigma(z)$$

gesetzt wird. *Da aber (wie oben hervorgehoben wurde) in Frage steht, ob die Nullpuncte von $F(z)$ durch die Formeln (C.) eindeutig bestimmt sind, so überträgt sich dieser Zweifel offenbar auch auf die Formeln (γ.), (δ.) und (ε.). Es steht also z. B. in Frage, ob die unendlich kleinen Zuwüchse $d\eta_1$, $d\eta_2$, ... $d\eta_p$ durch die p Gleichungen (ε.) eindeutig bestimmt sind.* Und um diese Frage zu erledigen, würde die Determinante

$$(\eta.)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(\eta_1) & \varphi_1(\eta_2) & \ldots & \varphi_1(\eta_p) \\ \varphi_2(\eta_1) & \varphi_2(\eta_2) & \ldots & \varphi_2(\eta_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_p(\eta_1) & \varphi_p(\eta_2) & \ldots & \varphi_p(\eta_p) \end{vmatrix}$$

zu untersuchen sein. In der That würden jene $d\eta_1$, $d\eta_2$, ... $d\eta_p$ durch die p Gleichungen (ε.) eindeutig bestimmt sein, falls sich nachweisen liesse, dass diese Determinante stets von 0 verschieden ist. Dies aber ist weder beweisbar, noch überhaupt richtig; denn die Determinante verschwindet z. B., wenn zwei der Puncte η_1, η_2, ... η_p mit einander coincidiren.

Hiermit dürften die Schwierigkeiten, welche einem befriedigenden Beweise des Satzes (D.) sich entgegenstellen, und auf welche, meines Wissens, bis jetzt von keinem Autor näher eingegangen ist, einigermassen angedeutet sein.

Nach vielen vergeblichen Anstrengungen zur Ueberwindung dieser Schwierigkeiten, habe ich mich schliesslich veranlasst gefunden, den Satz (D.) vorläufig ganz fallen zu lassen, und den Uebergang von den Riemann'schen Artikeln 17—22 zu den folgenden Artikeln 23, 24 etc. auf einem *andern* Wege zu versuchen. Dieser Weg, bei welchem der Satz (D.) nicht zu Anfang, sondern erst *im weiteren Verlauf* der anzustellenden Betrachtungen zum Beweise gelangt*), soll im Folgenden dargelegt werden.

---

*) Es ergiebt sich nämlich die Richtigkeit des Satzes (D.) mittelst des Theoremes (23.), pg. 118.

§ 1.

Specielle Betrachtungen für den Fall $p = 3$.

Wir setzen $p = 3$, verstehen also unter

$$\vartheta(U_\sigma) \text{ die Function } \vartheta(U_1, U_2, U_3).$$

Uebrigens werden die Resultate, zu denen wir für $p = 3$ gelangen, später sofort auf den Fall eines *beliebigen* p übertragbar sein.

(1.) *Es seien irgend drei Constanten A_1, A_2, A_3 gegeben, von solcher Beschaffenheit, dass $\vartheta(A_\sigma)$, mithin auch $\vartheta(-A_\sigma)$ von Null verschieden ist.*

Markirt man also auf $\mathfrak{R}$ einen festen Punct x in willkürlicher Weise, so wird

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(x) + A_\sigma])$$

im Puncte $z = x$ den *von Null verschiedenen* Werth $\vartheta(-A_\sigma)$ annehmen, mithin zur Kategorie derjenigen Functionen gehören, die *nicht identisch Null* sind, und die also dem Theorem p. 99 sich ohne Weiteres subordiniren. Zufolge dieses Theorems besitzt daher $F(z)$ auf $\mathfrak{R}$ im Ganzen drei elementare Nullpuncte η, η', η'', die zu den in $F(z)$ enthaltenen Constanten $[w_\sigma(x) + A_\sigma]$ in der Beziehung stehen:

$$w_\sigma(\eta) + w_\sigma(\eta') + w_\sigma(\eta'') \equiv w_\sigma(x) + A_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, 3;$$

somit ergiebt sich der Satz:

Entsprechen drei Constanten A_1, A_2, A_3 der Bedingung) $\vartheta(A_\sigma) \neq 0$, oder, was dasselbe, der Bedingung $\vartheta(-A_\sigma) \neq 0$, so können dieselben stets in folgender Weise dargestellt werden:*

$$(2.)\quad A_\sigma \equiv -w_\sigma(x) + w_\sigma(\eta) + w_\sigma(\eta') + w_\sigma(\eta''), \quad \sigma = 1, 2, 3,$$

*wo von den vier Puncten x und η, η', η'' der erste **ad libitum** zu wählen ist.*

---

*) Ebenso wie das Zeichen $=$ zur Bezeichnung der *Gleichheit* dient, ebenso soll andererseits das Zeichen $\neq$ zur Bezeichnung der *Ungleichheit* dienen.

Es seien jetzt B_1, B_2, B_3 und C_1, C_2, C_3 *beliebig* gegebene Constanten. Welche Werthe dieselben auch haben mögen, stets werden die Ausdrücke

$$\vartheta(B_\sigma + z) \quad \text{und} \quad \vartheta(B_\sigma + C_\sigma + z)$$

durch Vergrösserung von z *beliebig gross* gemacht werden können. Denkt man sich nun dieses z so gross gemacht, dass beide Ausdrücke $\neq 0$ sind, so ist [zufolge des Satzes (2.)]:

$$B_\sigma + z \equiv w_\sigma(\eta) + w_\sigma(\eta') + w_\sigma(\eta'') - w_\sigma(\varkappa), \qquad \sigma = 1, 2, 3,$$

und ebenso:

$$B_\sigma + C_\sigma + z \equiv w_\sigma(\mathrm{H}) + w_\sigma(\mathrm{H}') + w_\sigma(\mathrm{H}'') - w_\sigma(\mathrm{K}), \quad \sigma = 1, 2, 3,$$

wo η, η', η'', $\varkappa$ und H, H', H'', K passend zu wählende Puncte vorstellen. Aus den beiden letzten Formeln folgt durch Subtraction:

$$C_\sigma \equiv [w_\sigma(\mathrm{H}) + w_\sigma(\mathrm{H}') + w_\sigma(\mathrm{H}'') + w_\sigma(\varkappa)] - [w_\sigma(\eta) + w_\sigma(\eta') + w_\sigma(\eta'') + w_\sigma(\mathrm{K})], \quad \sigma = 1, 2, 3;$$

so dass man also, unter nachträglicher Abänderung der Buchstaben, zu folgendem Satz gelangt:

Drei ganz b e l i e b i g *gegebene Constanten* C_1, C_2, C_3 *sind stets in folgender Form darstellbar:*

$$(3.) \qquad C_\sigma \equiv [w_\sigma(c) + w_\sigma(c') + w_\sigma(c'') + w_\sigma(c''')] - [w_\sigma(d) + w_\sigma(d') + w_\sigma(d'') + w_\sigma(d''')], \quad \sigma = 1, 2, 3,$$

wo c, c', c'', c''' *und* d, d', d'', d''' *passend zu wählende Puncte vorstellen.*

§ 2.

Fortsetzung.

Wir wollen jetzt insbesondere solche Constanten A_1, A_2, A_3 untersuchen, die der Bedingung

$$(4.) \qquad \vartheta(A_\sigma) = \vartheta(-A_\sigma) = Null$$

entsprechen. Dabei werden mehrere Fälle zu unterscheiden sein, je nach der Beschaffenheit der mit A_1, A_2, A_3 behafteten Ausdrücke:

$$(5.)\quad \begin{aligned}
\Phi &= \vartheta(w_\sigma(c) - w_\sigma(\gamma) - A_\sigma)\,,\\
\Phi_1 &= \vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) - A_\sigma)\,,\\
\Phi_2 &= \vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1)\\
&\qquad - w_\sigma(\gamma_2) - A_\sigma)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi_n &= \vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) \cdots + w_\sigma(c_n) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) \ldots\\
&\qquad - w_\sigma(\gamma_n) - A_\sigma)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

hier sollen $c, c_1, c_2, \cdots c_n, \cdots$ und $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n, \cdots$ irgend welche Puncte auf der Fläche $\mathfrak{R}$ vorstellen, die auf dieser Fläche beliebig verschiebbar sind.

Was zuvörderst den Ausdruck Φ betrifft, so wird *entweder* irgend ein Lagensystem der beiden Puncte c, γ existiren, für welches $\Phi \neq 0$ ist. *Oder aber* es wird Φ stets $= 0$ sein, welche Lagen man jenen beiden Puncten auch zuertheilen mag. In solcher Weise ergeben sich zwei Hauptfällle, die angedeutet werden können durch die Formeln:

$$(6.)\quad \begin{aligned}
&\text{I.}\ \ \Phi \neq 0\,,\\
&\text{II.}\ \ \Phi \text{ stets} = 0\,.
\end{aligned}$$

Der *letzte* Fall kann von Neuem in zwei Fälle zerlegt werden, je nach der Beschaffenheit des Ausdruckes Φ_1. *Entweder* wird nämlich irgend ein Lagensystem der vier Puncte c, c_1, γ, γ_1 existiren, für welches $\Phi_1 \neq 0$ ist. *Oder aber* es wird Φ_1 stets $= 0$ sein, welche Lage man jenen vier Puncten auch zuertheilen mag. Demgemäss ergeben sich jetzt im Ganzen drei Fälle, die angedeutet werden können durch die Formeln:

$$(7.)\quad \begin{aligned}
&\text{I.}\ \ \Phi \neq 0\,,\\
&\text{II.}\ \ \Phi \text{ stets} = 0\,,\quad \Phi_1 \neq 0\,,\\
&\text{III.}\ \ \Phi \text{ stets} = 0\,,\quad \Phi_1 \text{ stets} = 0\,.
\end{aligned}$$

Der letzte dieser Fälle kann seinerseits von Neuem in zwei Fälle zerlegt werden, je nach der Beschaffenheit von Φ_2; wodurch sich alsdann im Ganzen vier Fälle ergeben:

$$(8.)\quad \begin{aligned}
&\text{I.}\ \ \Phi \neq 0\,,\\
&\text{II.}\ \ \Phi \text{ stets} = 0\,,\quad \Phi_1 \neq 0\,,\\
&\text{III.}\ \ \Phi \text{ stets} = 0\,,\quad \Phi_1 \text{ stets} = 0\,,\quad \Phi_2 \neq 0\,,\\
&\text{IV.}\ \ \Phi \text{ stets} = 0\,,\quad \Phi_1 \text{ stets} = 0\,,\quad \Phi_2 \text{ stets} = 0\,.
\end{aligned}$$

Zerlegt man jetzt den letzten Fall von Neuem in zwei Fälle, je nach der Beschaffenheit von Φ_3, so erhält man im Ganzen fünf Fälle:

$$
(9.)\quad
\begin{array}{ll}
\text{I.} & \Phi \neq 0, \\
\text{II.} & \Phi \text{ stets} = 0,\ \Phi_1 \neq 0, \\
\text{III.} & \Phi \text{ stets} = 0,\ \Phi_1 \text{ stets} = 0,\ \Phi_2 \neq 0, \\
\text{IV.} & \Phi \text{ stets} = 0,\ \Phi_1 \text{ stets} = 0,\ \Phi_2 \text{ stets} = 0,\ \Phi_3 \neq 0, \\
\text{V.} & \Phi \text{ stets} = 0,\ \Phi_1 \text{ stets} = 0,\ \Phi_2 \text{ stets} = 0,\ \Phi_3 \text{ stets} = 0.
\end{array}
$$

All diese Formeln (6.), (7.), (8.), (9.) sind nur andeutender Natur, und, ohne grosse Weitläufigkeit, wohl auch schwerlich präciser ausdrückbar. Es ist eben im Gedächtniss zu behalten, dass z. B. durch »$\Phi \neq 0$« angedeutet sein soll, es existire irgend ein Lagensystem der beiden Puncte c, γ, für welches Φ nicht verschwindet; und dass andrerseits durch »Φ stets $= 0$« angedeutet werden soll, es existire kein derartiges Lagensystem der Puncte c, γ, so dass also Φ stets verschwindet, welche Lage man den beiden Puncten auch zuertheilen mag. — Analoge Bedeutungen haben die Formeln »$\Phi_1 \neq 0$« und »Φ_1 stets $= 0$« mit Bezug auf die vier Puncte c, c_1, γ, γ_1. — U. s. w. U. s. w. Im Folgenden werden übrigens statt der Buchstaben c, c_1, $\cdots$ γ, γ_1, $\cdots$ zuweilen die Buchstaben z, z_1, $\cdots$ ζ, ζ_1, $\cdots$ gebraucht werden.

Durch die Eintheilung (6.) sind offenbar alle überhaupt nur denkbaren Fälle erschöpft. Gleiches gilt von der Eintheilung (7.), ebenso von (8.) und von (9.). Wenn man also z. B. die in (9.) angegebenen fünf Fälle der Reihe nach discutirt, wie das im Folgenden geschehen soll, so werden hiemit alle überhaupt möglichen Fälle erschöpft sein.

I. Fall: $\Phi \neq 0$, das ist:

$$(\text{A.})\qquad \vartheta(w_\sigma(c) - w_\sigma(\gamma) - A_\sigma) \neq 0 .$$

Alsdann wird die Function

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - w_\sigma(\gamma) - A_\sigma)$$

im Puncte $z = c$ *nicht verschwinden* [wie unmittelbar aus (A.) folgt], mithin zur Kategorie derjenigen Functionen gehören, die dem Theorem pg. 99 sich subordiniren. Zufolge dieses Theorems besitzt daher $F(z)$ auf $\mathfrak{R}$ im Ganzen drei elementare Nullpuncte. Einer derselben liegt in γ; denn für $z = \gamma$ geht $F(z)$ in $\vartheta(-A_\sigma)$ über, und dieses $\vartheta(-A_\sigma)$ ist $= 0$ [zufolge der Voraussetzung (4.)].

Bezeichnet man die beiden übrigen Nullpuncte mit η und η', so finden, zufolge des citirten Theorems, die Formeln statt:

$$w_\sigma(\gamma) + w_\sigma(\eta) + w_\sigma(\eta') \equiv w_\sigma(\gamma) + A_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, 3;$$

woraus folgt:

(A.*) $$A_\sigma \equiv w_\sigma(\eta) + w_\sigma(\eta'), \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

II. Fall: Φ stets $= 0$, $\Phi_1 \neq 0$, das ist:

(B.) $$\vartheta(w_\sigma(z) - w_\sigma(\zeta) - A_\sigma) \text{ stets } = 0,$$

(B.') $$\vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) - A_\sigma) \neq 0.$$

Alsdann hat die Function

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) + w_\sigma(c_1) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) - A_\sigma)$$

im Puncte $z = c$ einen *nicht verschwindenden* Werth [wie sofort aus (B.') folgt]. Sie subordinirt sich also dem Theorem pg. 99, und besitzt daher auf $\mathfrak{R}$ im Ganzen drei elementare Nullpuncte, von denen übrigens zwei sofort angebbar sind, nämlich in γ und γ_1 liegen [wie aus (B.) folgt].

Bezeichnet man also den dritten Nullpunct mit η, so werden für γ, γ_1 und η, zufolge des citirten Theorems, die Formeln stattfinden:

$$w_\sigma(\gamma) + w_\sigma(\gamma_1) + w_\sigma(\eta) \equiv - w_\sigma(c_1) + w_\sigma(\gamma) + w_\sigma(\gamma_1) + A_\sigma,$$
$$\sigma = 1, 2, 3;$$

woraus folgt:

(B.*) $$A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(\eta), \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Erläuterung. — Wir haben soeben behauptet, dass *zwei* Nullpuncte der Function $F(z)$ unmittelbar angebbar seien, nämlich in γ und γ_1 liegen. Diese Behauptung würde hinfällig werden, falls γ und γ_1 miteinander coincidiren sollten; so dass also unsere Betrachtung der *allgemeinen* Gültigkeit zu entbehren scheint.

Nimmt man aber an, die Prämisse (B.') sei erfüllt für zwei miteinder coincidirende Puncte γ, γ_1, es sei also der Ausdruck

(α.) $$\vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) - 2\,w_\sigma(\gamma) - A_\sigma) \neq 0,$$

so wird der Ausdruck

(β.) $$\vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma + d\gamma) - A_\sigma)$$

von jenem Ausducke (α.) nur *unendlich wenig verschieden*, mithin ebenfalls $\neq 0$ sein. Dabei ist unter $(\gamma + d\gamma)$ ein beliebiger Nachbarpunct von γ zu verstehen.

Die Prämisse (B.') *wird also, falls sie für zwei miteinander coincidirende Puncte* γ, γ_1 *erfüllt ist, stets auch für zwei* n i c h t *coindicirende Puncte* γ, γ_1 *in Kraft sein.* Und hieraus folgt, dass die vorhin angestellten Ueberlegungen *ausnahmslos* gültig sind.

III. Fall: Φ stets $= 0$, Φ_1 stets $= 0$, $\Phi_2 \neq 0$. Die beiden letzten dieser Formeln lauten:

$$\text{(C.)} \quad \vartheta(w_\sigma(z) + w_\sigma(z_1) - w_\sigma(\zeta) - w_\sigma(\zeta_1) - A_\sigma) \text{ stets} = 0,$$

$$\text{(C.')} \quad \vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) - w_\sigma(\gamma_2) - A_\sigma) \neq 0,$$

wobei die drei Puncte γ, γ_1, γ_2 als *von einander verschieden* angesehen werden können [zufolge der vorhergehenden Erläuterung].

Alsdann hat die Function

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) + w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) - w_\sigma(\gamma_2) - A_\sigma)$$

im Puncte $z = c$ einen *nicht verschwindenden* Werth [wie aus (C'.) folgt]. Sie subordinirt sich also dem Theorem pg. 99, und besitzt daher drei elementare Nullpuncte, die übrigens sofort angebbar sind, nämlich in γ, γ_1, γ_2 liegen [wie aus (C.) folgt].

Nach dem genannten Theorem finden daher die Formeln statt:

$$w_\sigma(\gamma) + w_\sigma(\gamma_1) + w_\sigma(\gamma_2) \equiv - w_\sigma(c_1) - w_\sigma(c_2) + w_\sigma(\gamma) + w_\sigma(\gamma_1) + w_\sigma(\gamma_2) + A_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, 3;$$

woraus folgt:

$$\text{(C.*)} \qquad A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2), \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

IV. Fall: Φ stets $= 0$, Φ_1 stets $= 0$. Φ_2 stets $= 0$, $\Phi_3 \neq 0$. Die beiden letzten dieser Formeln lauten:

$$\text{(D.)} \quad \vartheta(w_\sigma(z) + w_\sigma(z_1) + w_\sigma(z_2) - w_\sigma(\zeta) - w_\sigma(\zeta_1) - w_\sigma(\zeta_2) - A_\sigma) \text{ stets} = 0,$$

$$\text{(D'.)} \quad \vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) + w_\sigma(c_3) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) - w_\sigma(\gamma_2) - w_\sigma(\gamma_3) - A_\sigma) \neq 0,$$

wobei die vier Puncte γ, γ_1, γ_2, γ_3 stets als *von einander verschieden* angesehen werden können [zufolge der Erläuterung auf p. 107].

Alsdann hat die Function

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) + w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) + w_\sigma(c_3) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) - w_\sigma(\gamma_2) - w_\sigma(\gamma_3) - A_\sigma)$$

im Puncte $z = c$ einen *nicht verschwindenden* Werth [wie aus (D'.) folgt]. Sie subordinirt sich also dem Theorem pg. 99, und besitzt daher *drei* elementare Nullpuncte. Dies aber steht im Widerspruch mit der Thatsache, dass die Function $F(z)$ in den *vier* Puncten γ, γ_1, γ_2, γ_3 zu Null wird [wie solches unmittelbar aus (D.) sich ergiebt].

Die Annahme dieses IV. Falles führt also zu einem Widerspruch. Folglich ist der IV. Fall *unmöglich.*

V. Fall: Φ, Φ_1, Φ_2 und Φ_3 sind stets $= 0$. Die letzte dieser Formeln lautet:

$$\text{(E.)}\quad \vartheta(w_\sigma(z) + w_\sigma(z_1) + w_\sigma(z_2) + w_\sigma(z_3) - w_\sigma(\zeta) - w_\sigma(\zeta_1) - w_\sigma(\zeta_2) - w_\sigma(\zeta_3) - A_\sigma) \text{ stets } = 0.$$

Sind nun B_1, B_2, B_3 *willkürlich* gewählte Constanten, so wird man die acht Puncte z, z_1, z_2, z_3, ζ, ζ_1, ζ_2, ζ_3 [zufolge des Satzes (3.)] stets so placiren können, dass sie, in Verbindung mit den gegebenen Constanten A_1, A_2, A_3, den Formeln entsprechen:

$$B_\sigma + A_\sigma \equiv w_\sigma(z) + w_\sigma(z_1) + w_\sigma(z_2) + w_\sigma(z_3) - w_\sigma(\zeta) - w_\sigma(\zeta_1) - w_\sigma(\zeta_2) - w_\sigma(\zeta_3),\quad \sigma = 1, 2, 3;$$

wodurch die Formel (E.) übergeht in

$$\vartheta(B_\sigma) \text{ stets } = 0;$$

was *nicht möglich* ist, weil B_1, B_2, B_3 ganz *willkürlich* gewählte Constanten vorstellen.

Der V. Fall führt also zu einem Widerspruch, und ist daher *unmöglich.*

Von den fünf Fällen, die auf Grund der Voraussetzung (4.):

$$\vartheta(A_\sigma) = 0$$

discutirt sind, und die zusammengenommen *alle überhaupt denkbaren Fälle erschöpfen*, haben sich also die beiden letzten als unmöglich herausgestellt, während die drei ersten zu den Formeln ($A.$*), ($B.$*), ($C.$*) hinführten:

(A.*) $$A_\sigma \equiv w_\sigma(\eta) + w_\sigma(\eta'), \quad \sigma = 1, 2, 3;$$

(B.*) $$A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(\eta), \quad \sigma = 1, 2, 3;$$

(C.*) $$A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2), \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Demgemäss gelangt man zu folgendem Satz:

Entsprechen drei Constanten A_1, A_2, A_3 der Bedingung $\vartheta(A_\sigma) = 0$, so können dieselben stets in folgender Weise dargestellt werden:

(10.) $$A_\sigma \equiv w_\sigma(c) + w_\sigma(c'), \quad \sigma = 1, 2, 3,$$

wo c und c' passend zu wählende Puncte vorstellen.

§ 3.

Allgemeine Sätze über die Thetafunctionen.

Dass die in den vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate sofort auf den Fall eines *beliebigen* p übertragbar sind, unterliegt keinem Zweifel. Man gelangt in solcher Weise, von (2.) und (10.) aus, zu folgenden Sätzen:

Erster Satz. — *Entsprechen die Constanten A_1, A_2, ... A_p der Bedingung*

(11.) $$\vartheta(A_\sigma) \neq 0,$$

so sind dieselben stets darstellbar in der Form:

$$A_\sigma \equiv -w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_p), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p;$$

wo von den Puncten c und c_1, c_2, ... c_p der erste ad libitum *gewählt werden darf.*

Zweiter Satz. — *Entsprechen die Constanten A_1, A_2, ... A_p der Bedingung*

(12.) $$\vartheta(A_\sigma) = 0,$$

so sind dieselben stets darstellbar in der Form:

$$A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_{p-1}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo c_1, c_2, ... c_{p-1} passend zu wählende Puncte vorstellen.

Wir gehen über zur Begründung zweier verwandten Sätze.

Sind p Constanten $A_1, A_2, \ldots A_p$ beliebig gegeben, so sind nur zwei Fälle denkbar. Entweder nämlich wird die mit diesen Constanten behaftete Function

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - A_\sigma)$$

identisch Null sein, für jedwedes z. Oder sie wird *nicht* identisch Null sein.

Ist, um mit dem letztern Fall zu beginnen, die Function $F(z)$ *nicht* identisch Null, so wird dieselbe dem Theorem pg. 99 sich subordiniren, mithin im Ganzen p elementare Nullpuncte: $c_1, c_2, \ldots c_p$ besitzen, welche den Formeln entsprechen:

$$A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_p), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Ist andrerseits die Function $F(z)$ *identisch Null*, so wird, falls man unter z_0 irgend welche feste Lage des Punctes z versteht, stets die Gleichung stattfinden:

$$\vartheta(w_\sigma(z_0) - A_\sigma) = 0,$$

mithin auch die Gleichung:

$$\vartheta(A_\sigma - w_\sigma(z_0)) = 0.$$

Hieraus aber folgt durch Anwendung des Satzes (12.):

$$A_\sigma - w_\sigma(z_0) \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_{p-1}),$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ passsend zu wählende Puncte vorstellen.

Demgemäss gelangt man zu folgenden beiden Sätzen:

Dritter Satz. — *Sind die Constanten $A_1, A_2, \ldots A_p$ von solcher Beschaffenheit, dass die Function*

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - A_\sigma) \tag{13.}$$

nicht identisch Null ist, so sind dieselben stets in folgender Form darstellbar:

$$A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_p), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_p$ passend zu wählende Puncte vorstellen.

Vierter Satz. — *Sind die Constanten $A_1, A_2, \ldots A_p$ von solcher Beschaffenheit, dass die Function*

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - A_\sigma) \tag{14.}$$

identisch verschwindet, für jedwedes z, so sind dieselben in folgender Form darstellbar:

$$A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_p), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo einer der Puncte $c_1, c_2, \ldots c_p$ ad libitum gewählt werden darf; so dass also unendlich viele den Formeln

$$A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_p), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

entsprechende Punctsysteme $c_1, c_2, \ldots c_p$ existiren werden.

Sind also z. B. irgend welche feste Puncte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ gegeben, von solcher Lage, dass die Function

$$(15.) \quad F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \ldots + w_\sigma(\alpha_p)])$$

identisch verschwindet, für jedwedes z, so wird stets ein zweites Punctsystem $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ existiren, welches zu jenem ersten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ in der Beziehung steht:

$$(16.) \quad w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \ldots + w_\sigma(\alpha_p) \equiv w_\sigma(\beta_1) + w_\sigma(\beta_2) \ldots + w_\sigma(\beta_p), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Dass dieses zweite Punctsystem so gewählt werden kann, dass es von dem ersten *verschieden* ist, unterliegt keinem Zweifel. Denn zufolge des letzten Satzes darf *einer* der Puncte $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ *ad libitum* gewählt werden.

§ 4.

Ueber reguläre Functionen.

Bevor wir in unseren eigentlichen Betrachtungen weiter fortschreiten, mag zuvörderst an einige bekannte Sätze erinnert werden.

Ist eine Function $f = f(z)$ auf der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ *regulär* *), so wird bekanntlich die Anzahl ihrer elementaren *Pole* ebenso gross sein, wie die Anzahl ihrer elementaren *Nullpuncte*, und auch ebensogrosss sein wie die Anzahl ihrer elementaren *A-Puncte*. Dabei sind unter diesen

*) Ich nenne eine Function $f(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ *regulär*, wenn sie daselbst *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig* ist. Jede solche auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function $f(z)$ ist daher die Wurzel einer Gleichung, deren Coefficienten *rationale* Functionen von z sind.

letztern die elementaren Nullpuncte der Function $(f - A)$ zu verstehen, wobei A selber eine *willkührlich* zu wählende Constante vorstellt.

Dieses System der A-Puncte, welches für $A = 0$ in das der Nullpuncte, und für $A = \infty$ in das der Pole übergeht, mag hinfort kurzweg als ein System von *Niveaupuncten* bezeichnet werden.

Ueberdies mag die Gesammtheit aller auf $\mathfrak{R}$ regulären Functionen in verschiedene *Ordnungen* eingetheilt werden, je nach der Anzahl der jedesmaligen Pole. Ist z. B. $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function, und q die Anzahl ihrer elementaren Pole, so soll $f(z)$ eine reguläre Function *qter Ordnung* genannt werden. Für eine solche Function $q$ter Ordnung besteht daher jedwedes Niveaupunctsystem aus q Puncten. D. h. sie besitzt auf $\mathfrak{R}$ q elementare Pole, ebenso q elementare Nullpuncte, und ebenso allgemein q elementare A-Puncte.

Dies vorausgeschickt, gelten nun folgende Sätze:

Erstens. — *Ist $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function qter Ordnung, und repräsentiren $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ irgend zwei Niveaupunctsysteme dieser Function, so werden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ stets den Formeln Genüge leisten:*

$$(17.a)\quad w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \cdots + w_\sigma(\alpha_q) \equiv w_\sigma(\beta_1) + w_\sigma(\beta_2) \cdots + w_\sigma(\beta_q), \quad \sigma = 1, 2 \cdots p.$$

Zweitens. — *Sind umgekehrt auf $\mathfrak{R}$ irgend welche Puncte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ markirt, die den Formeln*

$$(17.b)\quad w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \cdots + w_\sigma(\alpha_q) \equiv w_\sigma(\beta_1) + w_\sigma(\beta_2) \cdots + w_\sigma(\beta_q), \quad \sigma = 1, 2, \cdots p$$

Genüge leisten, so existirt stets eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function qter Ordnung, für welche $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ zwei Systeme von Niveaupuncten vorstellen.

Drittens. — *Denkt man sich auf $\mathfrak{R}$ irgend zwei von einander verschiedene Punctsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ markirt, welche den Formeln Genüge leisten:*

$$(17.c)\quad w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \cdots + w_\sigma(\alpha_p) \equiv w_\sigma(\beta_1) + w_\sigma(\beta_2) \cdots + w_\sigma(\beta_p), \quad \sigma = 1, 2, \cdots p,$$

so wird die Determinante

$$(17.\text{d})\quad \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_2) & \cdots & \varphi_1(\alpha_p) \\ \varphi_2(\alpha_1) & \varphi_2(\alpha_2) & \cdots & \varphi_2(\alpha_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_p(\alpha_1) & \varphi_p(\alpha_2) & \cdots & \varphi_p(\alpha_p) \end{vmatrix}$$

nothwendig $= 0$ *sein. Dabei steht* $\varphi_\sigma(z)$ *zur Abkürzung für* $\frac{dw_\sigma(z)}{dz}$.

Ich habe diese drei Sätze hier nur *historisch* mitgetheilt, ohne auf den Beweis derselhen [der mittelst des *Abel*'schen Theorems, oder auch auf andere Weise sich leicht ergiebt] näher einzugehen. Ein genaueres Eingehen auf den in Rede stehenden Beweis behalte ich mir vor für eine ausführlichere Publication über diesen Gegenstand.

§ 5.

Weitere allgemeine Sätze über die Thetafunctionen.

Denkt man sich auf der Fläche $\mathfrak{R}$ irgend ein festes Punctsystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ gegegeben, von solcher Lage, dass die Function

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \cdots + w_\sigma(\alpha_p)])$$

identisch versehwindet, für jedwedes z, so wird stets ein von von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ verschiedenes Punctsystem $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ existiren, welches zu jenem ersten System in der Beziehung steht:

$$w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \cdots + w_\sigma(\alpha_p) \equiv$$
$$w_\sigma(\beta_1) + w_\sigma(\beta_2) \cdots + w_\sigma(\beta_p), \quad \sigma = 1, 2, \cdots p;$$

wie solches bereits vorhin [in (15.), 16.)] bewiesen wurde. Hieraus aber folgt [unter Anwendung des Satzes (17.c, d)] sofort, dass die Determinante

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$$

$= 0$ ist. Setzt man also nachträglich $c_1, c_2, \ldots c_p$ für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, so erhält man den Satz:

Fünfter Satz. — *Sind irgend welche festen Puncte* $c_1, c_2, \ldots c_p$ *gegeben, von solcher Lage, dass die Function*

(18.) $F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \dots + w_\sigma(c_p)])$

identisch verschwindet, für jedwedes z, so wird die Determinante

$$\Delta(c_1, c_2, \dots c_p) = \begin{vmatrix} \varphi_1(c_1) & \varphi_1(c_2) & \dots & \varphi_1(c_p) \\ \varphi_2(c_1) & \varphi_2(c_2) & \dots & \varphi_2(c_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_p(c_1) & \varphi_p(c_2) & \dots & \varphi_p(c_p) \end{vmatrix}$$

nothwendig $= 0$ *sein. Dabei steht* $\varphi_\sigma(z)$ *für* $\frac{dw_\sigma(z)}{dz}$.

An diesen letzten Satz schliessen sich weitere Ueberlegungen an. Sind nämlich die festen Puncte $c_1, c_2, \dots c_p$ so gewählt, dass die Determinante

(A.) $$\Delta(c_1, c_2, \dots c_p) \neq 0$$

ist, *so kann die Function*

(B.) $F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \dots + w_\sigma(c_p)])$

niemals identisch verschwinden; denn sonst müsste [zufolge des vorhergehenden Satzes] $\Delta(c_1, c_1, \dots c_p) = 0$ sein, was der gegenwärtigen Voraussetzung (A.) widerspricht. Die Function $F(z)$ wird daher dem Theorem pg. 99 sich subordiniren, mithin p elementare Nullpuncte $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p$ besitzen, welche den Formeln entsprechen:

(C.) $$w_\sigma(\eta_1) + w_\sigma(\eta_2) \dots + w_\sigma(\eta_p) \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \dots + w_\sigma(c_p),$$
$$\sigma = 1, 2, \dots p.$$

Und hieraus folgt sofort, dass $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p$ mit $c_1, c_2, \dots c_p$ *identisch* sind. Denn wären diese Punctsysteme von einander *verschieden*, so würde aus den Formeln (C.), [unter Anwendung des Satzes (17. c, d)] folgen, dass $\Delta(c_1, c_2, \dots c_p) = 0$ sei, was der gegenwärtigen Voraussetzung (A.) widerspricht.

Alles zusammengefasst, gelangen wir daher zu folgendem einfachen und wichtigen Resultat:

Sechster Satz. — *Sind irgend welche festen Puncte* $c_1, c_2 \dots c_p$ *gegeben, von solcher Lage, dass*

(19.) $$\Delta(c_1, c_2, \dots c_p) \neq 0$$

ist, so wird die Function

(20.) $F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \dots + w_\sigma(c_p)])$

niemals identisch verschwinden. Und gleichzeitig werden alsdann die p Nullpuncte dieser Function durch $c_1, c_2, \ldots c_p$ dargestellt sein.

Entsprechen also $c_1, c_2, \ldots c_p$ der Voraussetzung (19.), *so wird z. B.* $\vartheta(-[w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots w_\sigma(c_{p-1})])$ *nothwendig* $= 0$ *sein, mithin*

$$\vartheta(w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots w_\sigma(c_{p-1})) \tag{21.}$$

ebenfalls $= 0$ *sein.*

§ 6.

Fortsetzung.

Bevor wir weitergehen, ist zunächst die Determinante $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p)$ einer näheren Untersuchung zu unterwerfen.

Jede der p Functionen $\varphi_\sigma(z) = \frac{dw_\sigma(z)}{dz}$ ist bekanntlich eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function. Auch kann keine derselben *identisch* $= 0$ sein. Denn wäre $\varphi_\sigma(z)$ identisch $= 0$, so würde $w_\sigma(z)$ eine Constante sein; was der Definition von $w_\sigma(z)$ [nach welcher z. B. $w_\sigma(z)$ in der Curve a_σ die Differenz πi besitzen soll] widerspricht. Die Function $\varphi_\sigma(z)$ kann daher, weil sie auf $\mathfrak{R}$ regulär und nicht identisch $= 0$ ist, auf $\mathfrak{R}$ nur in *einzelnen* Puncten verschwinden. Diese einzelnen Nullpuncte der Function $\varphi_\sigma(z)$ mögen $c_\sigma', c_\sigma'', c_\sigma''', \ldots$ heissen. Und ebenso mögen die einzelnen Nullpuncte von $\varphi_\tau(z)$ mit $c_\tau', c_\tau'', c_\tau''', \ldots$ benannt werden.

Repräsentirt nun c irgend welchen Punct, der von den $c_\sigma', c_\sigma'', c_\sigma''', \ldots$ und $c_\tau', c_\tau'', c_\tau''', \ldots$ *verschieden* ist, ist mithin $\varphi_\sigma(c) \neq 0$ und $\varphi_\tau(c)$ ebenfalls $\neq 0$, so wird die Function

$$F(z) = \begin{vmatrix} \varphi_\sigma(c) & \varphi_\sigma(z) \\ \varphi_\tau(c) & \varphi_\tau(z) \end{vmatrix}$$

nicht identisch $= 0$ sein können. Denn *wäre* sie identisch $= 0$, so würde der Ausdruck

$$\varphi_\sigma(c)\,\varphi_\tau(z) - \varphi_\tau(c)\,\varphi_\sigma(z)$$

d. i.

$$\varphi_\sigma(c)\,\frac{dw_\tau(z)}{dz} - \varphi_\tau(c)\,\frac{dw_\sigma(z)}{dz}$$

identisch $= 0$ sein; woraus durch Integration folgen würde, dass

$$\varphi_\sigma(c)\,w_\tau(z) - \varphi_\tau(c)\,w_\sigma(z)$$

eine *Constante* ist; was der Definition der Functionen $w_1(z)$, $w_2(z)$, ... $w_p(z)$ [nach welcher zwischen denselben keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfinden kann] widerspricht.

Die Function

$$F(z) = \begin{vmatrix} \varphi_\sigma(c) & \varphi_\sigma(z) \\ \varphi_\tau(c) & \varphi_\tau(z) \end{vmatrix}$$

wird daher, weil sie *nicht* identisch $= 0$, überdies aber [ebenso wie $\varphi_\sigma(z)$ und $\varphi_\tau(z)$] eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function von z ist, auf $\mathfrak{R}$ nur in *einzelnen* Puncten verschwinden können. Man gelangt somit zu dem Satz:

Zwei Puncte $c_\varkappa$ und c_ι können auf der Fläche $\mathfrak{R}$ stets so placirt werden, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_\sigma(c_\varkappa) & \varphi_\sigma(c_\iota) \\ \varphi_\tau(c_\varkappa) & \varphi_\tau(c_\iota) \end{vmatrix}$$

$\neq 0$ *ist. Hält man sodann den einen der beiden Puncte f e s t, während man den andern v a r i a b e l macht, so wird die Determinante immer nur für e i n z e l n e Lagen dieses variablen Punctes verschwinden.*

Diese Determinante ist eine aus der gegebenen Determinante $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p)$ beliebig herausgehobene Subdeterminante *zweiter* Ordnung. Mittelst des soeben gefundenen Satzes lässt sich nun in analoger Weise Analoges darthun für die Subdeterminanten *dritter* Ordnung, u. s. w. u. s. w.; so dass man schliesslich zu folgendem Resultat gelangt:

Die p Puncte $c_1, c_2, \ldots c_p$ können auf der Fläche $\mathfrak{R}$ stets in solcher Weise placirt werden, dass die Determinante

$$(22.) \quad \Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) = \begin{vmatrix} \varphi_1(c_1) & \varphi_1(c_2) & \ldots & \varphi_1(c_p) \\ \varphi_2(c_1) & \varphi_2(c_2) & \ldots & \varphi_2(c_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_p(c_1) & \varphi_p(c_2) & \ldots & \varphi_p(c_p) \end{vmatrix}$$

$\neq 0$ *ist. Hält man alsdann $(p - 1)$ dieser Puncte f e s t, während man den p^{ten} v a r i a b e l macht, so wird die Determinante immer nur für e i n z e l n e Lagen dieses variablen Punctes verschwinden können.*

Denkt man sich nun in der That $c_1, c_2, \ldots c_p$ in solcher Weise gewählt, dass

(A.) $\Delta = \Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) \neq 0$

ist, so gilt [zufolge (21.)] die Formel:

(B.) $\vartheta = \vartheta(w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_{p-1})) = 0.$

Hält man jetzt $c_2, c_3, \ldots c_p$ *fest*, macht hingegen c_1 *variabel*, so kann ein Verschwinden der Determinante Δ [zufolge (22.)] nur eintreten für gewisse *einzelne* Lagen $c_1', c_1'', c_1''', \ldots$ des Punctes c_1. Verbietet man also dem Puncte c_1 diese speciellen Lagen $c_1', c_1'', c_1''', \ldots$, so bleibt die Formel (A.) in Kraft, mithin auch die Formel (B.).

Die Formel (B.) gilt also für jede Lage des Punctes c_1, mit Ausnahme der Lagen $c_1', c_1'', c_1''', \ldots$ Hieraus aber folgt [weil das ϑ eine stetige Function von c_1 ist], dass die Formel für diese Ausnahmslagen *ebenfalls gilt*.

Nachdem in solcher Weise constatirt ist, dass die Formel (B.), unter Festhaltung der Puncte $c_2, c_3, \ldots c_p$, gültig ist für *jedwede* Lage von c_1, wollen wir jetzt diesen variablen Punct c_1 in irgend einer beliebigen Lage fixiren, und c_2 in Bewegung versetzen. Alsdann ergiebt sich in analoger Weise, dass die Formel (B.), unter Festhaltung von c_1 und $c_3, c_4, \ldots c_p$, gültig ist für *jedwede* Lage von c_2. U. s. w. U. s. w. Man gelangt in solcher Weise zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Versteht man unter $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ beliebige Puncte auf der Fläche $\mathfrak{R}$, so wird der Ausdruck*

(23.) $\vartheta(w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_{p-1}))$

stets $= 0$ sein, welche Lage man jenen Puncten auf der Fläche $\mathfrak{R}$ auch zu Theil werden lassen mag.

Diesem Theorem kann sofort folgender Zusatz beigefügt werden:

Zusatz. — *Markirt man auf $\mathfrak{R}$ irgend welche Puncte $c_1, c_2, \ldots c_{p-2}$, und setzt man:*

(24.) $G_\sigma = w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_{p-2}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$

so wird die mit diesen Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$ behaftete Function

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) + G_\sigma)$$

identisch $= 0$ sein.

Ferner gewährt das Theorem (23.) die Mittel zur Vervollständigung des früheren Theorems pg. 99, wie sogleich gezeigt werden soll.

Es seien $G_1, G_2, \ldots G_p$ gegebene Constanten von solcher Beschaffenheit, dass die Function

A.) $$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - G_\sigma)$$

nicht identisch verschwindet. Die Function $F(z)$ besitzt alsdann, zufolge des Theorems pg. 99, p elementare Nullpuncte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$; und diese genügen den Formeln:

B.) $$G_\sigma \equiv w_\sigma(\eta_1) + w_\sigma(\eta_2) \ldots + w_\sigma(\eta_p), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Leicht lässt sich nun zeigen, dass ausser jenen Nullpuncten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ *kein weiteres* die Formeln (B.) befriedigendes Punctsystem $\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_p'$ existiren kann. Denn existirte ein solches, fänden also die Formeln statt:

$$G_\sigma \equiv w_\sigma(\eta_1') + w_\sigma(\eta_2') \ldots + w_\sigma(\eta_p'), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

so würde die Function $F(z)$, falls man diese Werthe der G_σ substituirt, die Gestalt annehmen:

$$F(z) = E\,\vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(\eta_1') + w_\sigma(\eta_2') \ldots + w_\sigma(\eta_p')]),$$

wo E einen endlichen und nicht verschwindenden Factor vorstellt. Zufolge des Theorems (23.) würde daher $F(z)$ z. B. verschwinden für $z = \eta_1'$, ebenso für $z = \eta_2'$, u. s. f. Dies aber widerspricht der Thatsache, dass $F(z)$ ausser den p Nullpuncten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ keine weiteren Nullpuncte besitzen kann. Wir haben somit folgendes

Theorem. — *Sind die Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$ von solcher Beschaffenheit, dass die Function*

(25.) $$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - G_\sigma)$$

nicht identisch verschwindet, so existirt stets ein, und immer nur ein einziges den Bedingungen

$$G_\sigma \equiv w_\sigma(\eta_1) + w_\sigma(\eta_2) \ldots + w_\sigma(\eta_p), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

entsprechendes Punctsystem $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$.

Dieses so bestimmte Punctsystem repräsentirt die p Nullpuncte der Function $F(z)$.

Die im dritten Paragraph enthaltenen Sätze lassen sich mittelst der Theoreme (23.) und (25.) wesentlich erweitern und vervollständigen. So z. B. kann man sagen:

Entsprechen irgend welche Constanten $A_1, A_2, \ldots A_p$ *der Bedingung:*

$$(26.)\qquad \vartheta(A_\sigma) = 0,$$

so sind dieselben stets in der Form darstellbar:

$$(27.)\quad A_\sigma \equiv w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_{p-1}),\quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ *passend zu wählende Puncte repräsentiren. Und versteht man, umgekehrt, unter* $A_1, A_2, \ldots A_p$ *irgend welche Grössen, die der Darstellung* (27.) *fähig sind, so werden dieselben stets der Bedingung* (26.) *Genüge leisten.* In der That ist der erste Theil dieses Satzes nur eine Wiederholung des zweiten Satzes pg. 110; während der zweite Theil direct aus den Theorem (23.) sich ergiebt.

Setzt man ferner

$$(\alpha.)\quad A_\sigma = w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_{p-1}),\quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ *willkürlich gewählte* Puncte vorstellen, so ist nach dem Theorem (23.)

$$\vartheta(A_\sigma) = 0,$$

mithin

$$\vartheta(-A_\sigma) \text{ ebenfalls} = 0.$$

Hieraus aber folgt, mittelst des Satzes (26.), (27.), dass die Constanten $(-A_1)$, $(-A_2)$, $\ldots (-A_p)$ in die Form versetzbar sind:

$$(\beta.)\quad -A_\sigma \equiv w_\sigma(d_1) + w_\sigma(d_2) \ldots + w_\sigma(d_{p-1}),\quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo $d_1, d_2, \ldots d_{p-1}$ passend zu wählende Puncte vorstellen; so dass man also schliesslich durch Addition der Formeln ($\alpha.$), ($\beta.$) zu folgendem Satz gelangt:

Sind $(p-1)$ *Puncte* $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ *beliebig gegeben, so werden stets* $(p-1)$ *andere Puncte* $d_1, d_2, \ldots d_{p-1}$ *existiren, die zu jenen in der Beziehung stehen:*

$$(28.)\quad [w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_{p-1})] + [w_\sigma(d_1) + w_\sigma(d_2) \ldots + w_\sigma(d_{p-1})] \equiv 0,\quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Es sei ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ irgend ein Niveaupunctsystem einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function p^{ter} Ordnung $f(z)$, und β_1 ein auf $\mathfrak{R}$ *willkürlich* markirter Punct. Alsdann werden stets $(p-1)$ andere Puncte $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_p$ existiren, welche mit β_1 zusammengenommen ein zweites Niveaupunctsystem von $f(z)$ repräsentiren; so dass also [zufolge des Satzes (17.a)] die Relationen stattfinden:

$$\sum_{j=1}^{j=p} [w_\sigma(\beta_j) - w_\sigma(\alpha_j)] \equiv 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

d. i. die Relationen:

$$w_\sigma(\beta_1) - \sum_{j=1}^{j=p} w_\sigma(\alpha_j) \equiv -[w_\sigma(\beta_2) + w_\sigma(\beta_3) \ldots + w_\sigma(\beta_p)], \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Hieraus aber folgt mittelst des Theorems (23.) sofort:

$$\vartheta\Big(w_\sigma(\beta_1) - \sum_{j=1}^{j=p} w_\sigma(\alpha_j)\Big) = 0 \,.$$

Beachtet man also, dass β_1 *willkürlich* markirt wurde, so gelangt man zu folgendem Satz:

Repräsentiren $\alpha_1, \alpha_2, \cdots c_p$ irgend ein Niveaupunctsystem einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function p^{ter} Ordnung, so wird die Function

$$(29.)\quad F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \cdots + w_\sigma(\alpha_p)])$$

identisch verschwinden, nämlich Null sein für jedwede Lage des Punctes z.

In analoger Weise ergiebt sich, wie leicht zu übersehen, auch folgender Satz für Functionen $(p-1)$ter Ordnung:

Repräsentiren $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{p-1}$ ein Niveaupunctsystem einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function $(p-1)$ter Ordnung, so wird die Function

$$(30.)\quad F(z, \zeta) = \vartheta(w_\sigma(z) - w_\sigma(\zeta) - [w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \cdots + w_\sigma(\alpha_{p-1})])$$

identisch verschwinden, nämlich Null sein für jedwede Lage der beiden Puncte z und ζ.

Desgleichen ergiebt sich für reguläre Functionen $(p-2)$ter Ordnung folgender Satz:

Repräsentiren $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{p-2}$ ein Niveaupunctsystem einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function $(p-2)$ter Ordnung, so wird die Function

$$(31.)\quad F(z, \zeta, \zeta_1) = \vartheta(w_\sigma(z) - w_\sigma(\zeta) - w_\sigma(\zeta_1) - [w_\sigma(\alpha_1) + w_\sigma(\alpha_2) \cdots + w_\sigma(\alpha_{p-2})])$$

identisch verschwinden, nämlich Null sein für jedwede Lage der Puncte z, ζ und ζ_1.

U. s. w. U. s. w.

W. Hankel, *Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten* *).

Im Laufe der letzten Jahre habe ich mich mit den bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten beschäftigt, und ich lege heute der Gesellschaft eine Abhandlung (die 17. in der Reihe meiner elektrischen Untersuchungen) vor, in welcher die Resultate der darauf bezüglichen Beobachtungen und Messungen zusammengestellt sind. In dem kurzen Berichte, welchen ich jetzt darüber geben will, muss ich mich jedoch darauf beschränken, die elektrischen Vorgänge bei den verschiedenen Gasentwickelungen im Allgemeinen zu charakterisiren.

Der Gedanke, dass bei chemischen Zersetzungen, namentlich bei Gasentwickelungen, Elektricität auftreten könne, ist zuerst im Jahre 1769 von *Volta* ausgesprochen worden; indess hatten seine damaligen Versuche, solche aufzufinden, keinen Erfolg. Nach der Construction seines Condensators kam er wieder auf diesen Gegenstand zurück; neue Versuche wurden jedoch erst im Jahre 1782 auf einer Reise nach Paris im Verein mit *de la Place* und *Lavoisier* angestellt.

Seit jener Zeit ist meines Wissens keine eingehende Untersuchung über diese Elektricitätsentwickelung veröffentlicht worden; ein Umstand, der sich wohl durch die geringe Empfindlichkeit der früheren Elektrometer erklärt. Dagegen bot das von mir construirte Elektrometer alle Hülfsmittel, um selbst die oft sehr geringen Elektricitätsmengen mit voller Genauigkeit wahrzunehmen und zu messen.

Der Inhalt der einzelnen Abschnitte meiner Abhandlung ist nun in der Kürze folgender:

---

*) Vorgetragen in der Sitzung am 23. April 1883.

I. Elektrometer.

Bei meinem Elektrometer hängt das Goldblättchen in der Mitte zwischen zwei Messingscheiben, welche vermittelst eines geeigneten Commutators mit den Polen einer aus Zink-Kupfer-Wasser-Elementen gebildeten, und in der Nähe der Mitte zur Erde abgeleiteten *Volta*'schen Säule verbunden sind. Die Messung der dem Goldblättchen zugeführten Elektricität geschah stets auf die Weise, dass der Ausschlag beobachtet wurde, welcher durch Umlegen des Commutatorbügels (Verwechselung der Polaritäten in den Messingscheiben) entstand.

Das Elektrometer wurde so justirt, dass das Goldblättchen desselben, wenn es durch einen mit den eisernen Gasröhren des Hauses verbundenen Kupferdraht zur Erde abgeleitet war, beim Umlegen des Commutatorbügels keinen Ausschlag gab. Dies liess sich, obwohl das Goldblättchen durch die genannte Ableitung eine elektrische Spannung von nahe — 0,21 (die Spannung zwischen Zink und Kupfer = + 1 gesetzt) erhält, erreichen, wenn der negative Pol der *Volta*'schen Säule gerade so weit verstärkt wurde, dass die Vertheilungswirkung seines Ueberschusses über den positiven Pol auf das Goldblättchen gerade die negative Ladung des letzteren aufhob. Da das Blättchen genau in der Mitte zwischen beiden Scheiben hing, also zu beiden in gleichen Beziehungen stand, so blieb auch beim Umlegen des Commutatorbügels der unelektrische Zustand des Goldblättchens erhalten und es trat keine Aenderung seiner Lage ein. Der Ausschlag, welcher dann durch Zuführung fremder Elektricität erfolgte, mass also nur diese letztere; die ursprüngliche, durch die Ableitung zur Erde bedingte Spannung hatte darauf keinen Einfluss.

II. Elektrische Vorgänge bei von Metallen abfallenden Wassertropfen.

Die Anordnung der späteren Versuche über die bei Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten machte es nöthig, zuvor die elektrischen Vorgänge genauer zu erörtern, welche beim Abfallen der Wassertropfen von Metallen sich zeigen.

Ein trichterförmiges, isolirt aufgestelltes Glasgefäss war unten in eine so feine Spitze ausgezogen, dass in dasselbe ein-

gegossenes Wasser nur in Tropfen (4 bis 8 in der Secunde) von dieser Spitze abfiel; die Tropfen sammelten sich in einer unterhalb befindlichen Platinschaale.

Wird nun in das Wasser des Trichters ein Metallstück eingetaucht, welches durch einen an den Gasröhren des Hauses befestigten Kupferdraht mit der Erde in leitender Verbindung steht, so erhält das Wasser und also auch der an der unteren Spitze des Trichters sich bildende Tropfen infolge dieser Ableitung eine elektrische Spannung, die sich, wenn die Spannung des eben genannten Kupferdrahtes gegeben ist, nach den in meinen Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte *) aufgeführten Zahlenwerthen berechnen lässt. Taucht Platin in das Wasser, so erhält das Wasser eine negative Spannung; taucht Kupfer ein, so ist die ebenfalls negative Spannung viel geringer; taucht Zink ein, so nimmt dagegen das Wasser eine positive Spannung an, deren absoluter Werth etwas grösser ist als der negative beim Platin.

Ist die unterhalb des Trichters stehende Platinschaale isolirt und durch einen Metalldraht mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden, so wird durch die herabfallenden Tropfen der Schaale und dem Elektrometer eine der Spannung des Wassers entsprechende elektrische Ladung (negativ bei Platin und Kupfer, positiv bei Zink) zugeführt, die mit der Anzahl der in der Schaale angesammelten Tropfen wächst.

Wird das in das Wasser des isolirten Trichters eintauchende Metall durch einen Draht mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden, und dann diese Leitung mit einem an den eisernen Gasröhren des Hauses befestigten Kupferdraht ableitend berührt, so bleibt nach dem Zurückziehen des Kupferdrahtes in dem vom Goldblättchen bis zum Wasser des Trichters reichenden isolirten Leiter eine elektrische Ladung zurück, welche durch die elektrische Spannung des ableitenden Drahtes bedingt ist. Ist diese letztere gegeben, so lässt sich, wie ich schon vorhin bemerkt, der elektrische Zustand der einzelnen Theile der zuvor beschriebenen Leitung aus meinen Maassbestimmungen berechnen.

Wenn Platin in das Wasser taucht, erhält das Wasser eine negative Ladung; wird nun diese negative Ladung des Wassers

---

*) Abh. der K. S. Ges. d. Wiss. Bd. XI.

durch Fortführung seitens der von der Spitze des Trichters abfallenden Tropfen immer geringer, so muss der absolute Werth der Spannung an allen Punkten des Leiters in gleichem Grade sich ändern, während die Unterschiede zwischen seinen verschiedenen Theilen bestehen bleiben. Würde z. B. das Wasser des Trichters durch die fallenden Tropfen gänzlich entladen, so müsste der elektrische Zustand des Goldblättchens um den vollen Betrag der verschwundenen Spannung nach der positiven Seite hin sich ändern, beim Umlegen des Commutatorbügels also ein positiver Ausschlag angezeigt werden.

Ist Zink in das Wasser eingetaucht und durch einen Draht mit dem Goldblättchen verbunden, so besitzt das Wasser nach dem Zurückziehen des ableitenden Kupferdrahtes eine positive Spannung. Wird diese durch die fallenden Tropfen hinweggenommen, so erhält das Goldblättchen eine negative Ladung.

Da bei meinen Versuchen das Fallen der Tropfen nach Eintritt der Isolirung nur zwei Minuten fortgesetzt wurde, so konnte das Wasser nicht vollständig entladen sein. Nehmen wir aber an, dass während dieses Zeitraumes bei den verschiedenen Versuchen gleichviel und gleichgestaltete Tropfen fallen, so wird sich die Ladung des Wassers stets in demselben Verhältnisse verringern, und die nach zwei Minuten beobachteten Ausschläge geben ein Maass für die im Wasser anfänglich vorhandene elektrische Spannung.

Mittelst solcher Versuche, die in der Abhandlung mitgetheilt sind, ist es auch möglich geworden, den elektrischen Zustand des mit den eisernen Gasröhren des Hauses verbundenen Kupferdrahtes zu bestimmen. Die elektrische Spannung auf demselben ist nahe $-0{,}11$, wenn die Spannung zwischen Zink und Kupfer $= +1$ gesetzt wird.

Die Versuche mit den fallenden Wassertropfen wurden darauf auch in einer Anordnung wiederholt, welche mit der bei den Gasentbindungen benutzten übereinstimmte. Anstatt einen Metalldraht in das Wasser des Trichters einzutauchen, wurde ein Metallstreifen in einer unter 45° gegen den Horizont geneigten Lage unterhalb des isolirten Trichters mittelst einer isolirenden Vorrichtung so aufgestellt, dass die aus der Spitze des Trichters fallenden Tropfen in der Nähe des oberen Endes des Metallstreifens auftrafen und nach dem Hinabfliessen sich am unteren Rande desselben zu etwas grösseren Tropfen sammelten, welche

dann in die unterhalb befindliche Platinschaale fielen. Die auf dem Metallstreifen und in der Platinschaale beobachteten elektrischen Spannungen waren dieselben als zuvor, wo die Metalle in das Wasser des Trichters tauchten.

Analoge Spannungen, und auch nahe in gleicher Grösse, traten auf, wenn anstatt eines gewöhnlichen blanken Zinkstückes ein gut amalgamirter Zinkstreifen angewandt wurde. Auch änderten sich dieselben nicht wesentlich, wenn anstatt Wasser verdünnte Schwefelsäure, welche das amalgamirte Zink nicht angreift, in den Trichter gegossen wurde.

III. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung des Wasserstoffs aus Zink und Schwefelsäure.

Volta fand in seinen ersten Versuchen, wobei er in einem Gefässe Eisen oder Zink mit Schwefelsäure übergoss, das Gefäss negativ; später (1789) beobachtete er aber auch, besonders bei Auflösung des Zinkes in verdünnter Schwefelsäure, eine positive Ladung des Gefässes. Eine specielle Untersuchung, unter welchen Umständen die eine oder die andere Polarität erschien, hat er aber nicht unternommen.

Es wäre auch nach seinem Verfahren, bei welchem in einem Gefässe liegende Zinkstücke mit Säure übergossen wurden, völlig unmöglich gewesen, eine Kenntniss der verschiedenen Vorgänge, welche auf die zur Messung gelangende elektrische Spannung Einfluss haben, zu gewinnen. Ich habe daher bei meinen Untersuchungen einen anderen Weg eingeschlagen, bei welchem die eben bezeichneten Vorgänge noch erkennbar wurden, indem sie zu verschiedenen Zeiten und unter veränderten Umständen in ungleicher Stärke auftraten.

Wie bei den zuletzt erwähnten Versuchen des vorhergehenden Abschnittes wurde ein Zinkstück in einer unter 45° gegen den Horizont geneigten Lage unterhalb des Trichters, in welchem sich Schwefelsäure von verschiedener Concentration befand, aufgestellt. Die in der Nähe des oberen Endes austreffenden Säuretropfen flossen über die Zinkfläche hinab, sammelten sich am unteren Rande zu etwas grösseren Tropfen, und fielen dann in die unterhalb befindliche Platinschaale. Mittelst eines Commutators konnte das Zinkstück oder die Platinschaale mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden.

werden, während andererseits die Platinschaale oder resp. das Zinkstück zur Erde abgeleitet war.

In der Regel wurde der elektrische Zustand des Zinkstückes und der Platinschaale abwechselnd beobachtet. Die in der Abhandlung mitgetheilten Zahlenwerthe geben die elektrische Spannung, wie sie jedes Mal während eines Zeitraumes von 2 Minuten nach dem Eintritt der Isolirung angesammelt war.

Ich habe nun die Aenderungen in der Stärke und der Art der elektrischen Spannungen, welche bei längerer Fortdauer des Tropfens und bei verschiedenen Concentrationsgraden der Schwefelsäure eintreten, genauer bestimmt, und in der Abhandlung durch specielle Versuchsreihen belegt. In diesem Berichte beschränke ich mich auf Angabe der hauptsächlichsten Resultate.

Bevor ich jedoch den Verlauf der elektrischen Spannungen beschreibe, wird es zweckmässig sein, diejenigen Vorgänge zusammenzustellen, welche auf die Erregung der einen oder der anderen Elektricität, sowie auf die Zu- und Abnahme der elektrischen Spannungen von Einfluss sind.

a) Berührung der Leiter. Wenn die Säure nur schwach ist, und namentlich im Anfange des Tropfens die Zinkfläche nicht angreift, so treten die elektrischen Spannungen auf, welche im vorhergehenden Abschnitte beschrieben worden sind.

b) Directer Angriff der Säure. Der durch den directen Angriff der Säure auf dem Zinke entwickelte Wasserstoff führt positive Elektricität mit sich fort, lässt also das Zink und die Säure in negativem Zustande zurück.

Man kann sich diesen Vorgang in folgender Weise vorstellen: In meinen Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte habe ich gezeigt, dass blankes Zink in Berührung mit Wasser positiv, das Wasser also negativ wird, und nach einem in der vorgelegten Abhandlung beschriebenen Versuche weicht das Verhalten der Schwefelsäure gegen Zink in elektromotorischer Beziehung nicht wesentlich von dem des Wassers ab. Auf der Berührungsfläche zwischen Zink und Säure wird also in einer der dort vorhandenen elektromotorischen Kraft entsprechenden Menge auf dem Zinke positive und auf der anliegenden Säurefläche negative Elektricität gebunden sein. Wird nun das Wasser an dieser Berührungsstelle zerlegt, so

nimmt der Wasserstoff die positive Elektricität des Zinkes auf und entweicht. Das mit dieser positiven Elektricität beladene Gas muss beim Aufsteigen eine dünne Flüssigkeitsschicht durchdringen; die Gase geben aber ihre elektrischen Ladungen an feste und flüssige Leiter nur sehr allmählich ab. Es wird also mit dem Gase ein mehr oder weniger grosser Theil der vom Wasserstoff aufgenommenen positiven Elektricität entfernt, während ein entsprechendes Quantum der negativen Elektricität der Säure frei wird, und sich über die Oberfläche des gesammten Leiters verbreitet.

c) *Bildung einer galvanischen Kette.* Nach und nach bedecken sich die Stellen des Zinkes, an welchen die Säure angreift, mit einer anfangs graulichen, später schwärzlichen Schicht aus Kohle (und fremden ausgeschiedenen metallischen Beimengungen). In dem aus Zink, Kohle und Schwefelsäure gebildeten Elemente wird nun aber der Wasserstoff nicht am Zinke, sondern an der negativen Kohle ausgeschieden, und nimmt, wie ich dies in der Abhandlung an einem aus amalgamirtem Zink, Platin und Schwefelsäure gebildeten Elemente speciell nachgewiesen habe, negative Elektricität mit sich fort, lässt also das Zink und den ganzen Leiter in positivem Zustande zurück.

d) *Abfall der Säuretropfen vom unteren Rande bei gleichzeitig vorhandenem chemischen Processe.* Durch die Gasentwickelung am unteren Rande wird die Berührung zwischen Zink und Säure aufgehoben; in der abgestossenen flüssigen Schicht wird also die negative Elektricität frei und beim Abfallen der Tropfen zum Theil mitgenommen. Die am unteren Zinkrande entwickelten Gasblasen, welche positive Elektricität angenommen haben, können bei ihrer Lage nur schwierig entweichen, und geben einen Theil ihrer Ladung wieder an das Zink zurück. Ist nun das von den Tropfen mitgenommene Quantum negativer Polarität grösser als das von dem Gase fortgeführte Quantum positiver, so erhält das Zink eine positive Ladung.

An denjenigen Stellen des unteren Randes, wo bereits der schwärzliche Beschlag gebildet ist, entwickelt sich der Wasserstoff an diesem, und nimmt daher den negativen Zustand an. Die kleinen Wasserstoffbläschen geben dann während ihres Verweilens in den Säuretropfen einen Theil ihrer negativen Ladung an diese ab.

e) Schaumbildung auf der Seitenfläche des Zinkes. Wenn durch sehr heftigen Angriff der Säure sich auf der Seitenfläche des Zinkes, über welche die Säure hinabfliesst, Schaum anhäuft, so hat die von den entwickelten Gasen aufgenommene positive oder negative Elektricität Zeit, in grösserer oder geringerer Menge an die Flüssigkeit überzugehen. Die von dem Gase fortgeführten elektrischen Quanta werden also verringert, und dadurch der entgegengesetzt elektrische Zustand des Zinkes und der Säure schwächer.

f) Schaumanhang am unteren Rande des Zinkes. Wenn am unteren Rande des Zinkes sich ein Schaumanhang bildet, so fallen die Tropfen daselbst nicht vom Zinke, sondern von diesem Schaumanhange ab. Die in ihnen durch die Zersetzung vorhandene negative Elektricität hat also Zeit sich mit der positiven auf dem Zinke zum Theil wieder zu vereinigen, und die abfallenden Tropfen nehmen nur eine geringe negative Ladung mit.

g) Verminderung der Leichtflüssigkeit der Säure. Wenn sich, namentlich bei stärkeren Säuren, eine gewisse Menge von schwefelsaurem Zinkoxyd (oder Chlorzink) in der über die Seitenfläche hinfliessenden Säure und in den am unteren Rande hängenden Tropfen bildet, so wird die leichte Beweglichkeit der Gasblasen in diesen Flüssigkeiten vermindert; die mit Elektricität beladenen Gasblasen werden also beim Durchgang durch dieselben einen grösseren Theil ihrer Ladung abgeben.

Mit Beziehung auf das Vorstehende wird es genügen, die elektrischen Zustände sowohl der in der Platinschaale angesammelten Säuretropfen als auch des Zinkes kurz anzugeben.

1. *Elektrisches Verhalten der in die Platinschaale fallenden Tropfen.* Da bei der Beobachtung der von den Tropfen fortgeführten Elektricität das Zink stets mit der Erde in leitender Verbindung stand, so konnte der elektrische Zustand derselben nur durch die Ableitung zur Erde und dem am unteren Rande vorgehenden chemischen Process bedingt sein. So lange die Säure das Zink an dem unteren Rande nicht angreift, nehmen die Tropfen die aus der Ableitung stammende schwache positive Elektricität mit sich. Tritt dann, bei schwächerer Säure in längerer, bei stärkerer in kürzerer Zeit der Angriff am unteren Rande ein, so geht die positive Ladung der Tropfen in eine negative über. Wird durch Amalgamirung des unteren Theiles

des Zinkes oder durch eine daselbst angelöthete Platinplatte die Entstehung einer Gasentwickelung an der Abfallstelle der Tropfen verhindert, so entspricht die Ladung der Tropfen nur der durch die Ableitung zur Erde gesetzten Spannung. Bildet sich an einem gewöhnlichen Zinkstücke bei stärkeren Säuren am unteren Ende ein Schaumanhang, so nimmt die Stärke der negativen Ladung der in die Schaale fallenden Tropfen ab.

2. *Elektrisches Verhalten des Zinkes.* Ist das isolirte Zinkstück mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden, so zeigt das letztere, so lange kein Angriff der Säure statt hat, infolge des Abfallens der positiv geladenen Tropfen schwache negative Spannung an; dieselbe wird verstärkt, sobald der Angriff der Säure beginnt, und erreicht je nach der Stärke der Säure in längerer oder kürzerer Zeit ein Maximum. Dem Anwachsen der negativen Spannung auf dem Zinke treten nämlich zwei andere Vorgänge entgegen, welche dem Zinke positive Elektricität ertheilen: das Entstehen eines galvanischen Elementes durch die Bildung der schwärzlichen Schicht und der unter chemischem Processe stattfindende Abfall der Tropfen vom unteren Rande. Durch das Anwachsen der beiden genannten Vorgänge nimmt nach und nach die negative Spannung auf dem Zinke ab und geht bei mässig starken Säuren zuletzt in eine positive über. Ist die Säure stark, so wird durch den heftigen Angriff an einzelnen Stellen der schwärzliche Ueberzug abgestossen, und der positive Zustand des Zinkes kann zeitweilig wieder in den negativen zurückgehen.

Wird ein blankgefeiltes Zinkstück in ein Uhrglas, das auf dem Boden der Platinschaale ruht, gelegt und mit Schwefelsäure übergossen, so beobachtet man an der Platinschaale zuerst eine schwache positive Spannung, weil die Blasen, welche aus der zufolge der Ableitung negativen Flüssigkeit aufsteigen, negative Elektricität mitnehmen. Die von den am Zinke entwickelten Gasblasen aufgenommene positive Elektricität wird meistens, weil die Blasen längere Zeit am Zinke haften, an die Umgebung wieder abgegeben; nur unter günstigen Umständen, bei lebhaftem Angriffe, wird die Schaale negativ erscheinen können. Ist dann später durch das Auftreten der schwärzlichen Schicht ein galvanisches Element gebildet, so nimmt der entweichende Wasserstoff negative Elektricität mit fort, und die

Schaale erscheint stärker positiv. Sehr begünstigt wird die positive Ladung der Platinschaale, wenn das Zinkstück unmittelbar auf den Boden der Platinschaale gelegt, und somit ein neues galvanisches Element hergestellt wird.

Werden zahlreiche kleine Zinkstücke mit verdünnter Schwefelsäure übergossen, so hängt die zuerst auftretende elektrische Ladung der Schaale von der Concentration der Säure, von der Beschaffenheit der Oberfläche der Zinkstücke und von dem Material der Schaale (Porcellan und Glas oder Platin) ab. Sind im Anfange die Umstände einem heftigeren Angriff der Säure günstig, und wird durch die grösseren sich bildenden Gasblasen die Flüssigkeit verdrängt und dadurch eine starke Absorption der in dem Gase in diesem Zeitpunkte vorhandenen positiven Elektricität verhindert, so tritt in der Schaale negative Spannung auf. Diese negative Spannung hält jedoch nicht lange an, sondern geht in eine positive über. Sehr oft vermag aber im Anfange die negative Spannung nicht aufzutreten; infolge des Ueberwiegens der Zersetzung durch das gebildete galvanische Element erscheint die Schaale gleich anfangs positiv.

IV. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung des Wasserstoffgases aus Zink und Salzsäure.

Fällt Salzsäure in Tropfen auf ein geneigt gestelltes Zinkstück, so gleichen die Vorgänge den zuvor bei Anwendung der Schwefelsäure beschriebenen; nur tritt der Uebergang der negativen Spannung auf dem Zinke in die positive etwas später ein.

Wird ein blank geschabtes Zinkstück in ein Uhrglas, das auf dem Boden der Platinschaale ruht, gelegt, und mit Salzsäure (sp. Gew. 1,14), welche mit dem zwei- oder mehrfachen Volumen Wasser verdünnt ist, übergossen, so zeigt die Platinschaale positive Ladung. Wird aber die Säure nur mit dem gleichen Volumen Wasser gemischt oder ohne Wasserzusatz angewandt, so ist der Angriff der Säure so heftig, dass die fremden Schichten von der Oberfläche des Zinkes abgestossen werden und der Wasserstoff die vom Zinke aufgenommene positive Elektricität fortführt. Die Platinschaale erscheint also negativ.

Erst wenn der heftige Angriff nachlässt, wird die Schaale, weil nun der Wasserstoff die negative Elektricität mit sich nimmt, ebenso wie bei der schwächeren Säure positiv.

Werden zahlreiche kleine Zinkstücke mit verdünnter Salzsäure übergossen, so wird das Gefäss positiv und behält bei schwächeren Säuren diesen Zustand. Bei stärkerer Säure tritt wohl auch zuerst eine schwache positive Spannung am Gefässe auf; dieselbe geht aber, sobald der Angriff heftig genug wird, um die Flüssigkeit durch Blasenbildung vom Zinke abzustossen, in die negative über, die je nach den vorliegenden Verhältnissen stark anwächst, nach mehreren Minuten wieder abnimmt und sich dann in eine positive verwandelt. Ist gleich anfangs der Angriff sehr heftig, so fällt die erste schwache positive Periode fort, das Gefäss erscheint sofort nach dem Uebergiessen der Zinkstücke negativ.

V. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung von Gasen aus Zink und Salpetersäure.

Obwohl bei dem Angriff der Salpetersäure auf Zink anstatt des Wasserstoffes vorzugsweise oder ausschliesslich Stickoxydgas entwickelt wird, so treten doch ganz analoge elektrische Vorgänge ein, wie die zuvor unter Anwendung von Schwefelsäure oder Salzsäure beschriebenen.

Wird ein Stück Zink mit starker Salpetersäure in einer Schaale übergossen, so erscheint zuerst die Schaale negativ, aber schon nach $^1/_2$ Minute geht die negative Spannung in die positive über. Beim Uebergiessen mit einer verdünnteren Säure zeigt die Schaale gleich am Anfang positive Spannung.

VI. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung des Wasserstoffs durch Einwirkung von Säuren auf Eisen.

Lässt man Schwefel- oder Salzsäure, selbst in ziemlich starker Concentration, über ein geneigt gestelltes Eisenstück fliessen, so wird das Metall nur wenig angegriffen und es treten daher nur auch nur geringe elektrische Spannungen auf.

Wird kalte, mit dem drei- bis vierfachen Volumen Wasser

verdünnte Schwefelsäure auf kleinere Mengen Eisenfeilicht gegossen, so findet nur eine schwache Einwirkung statt, und das Gefäss erhält nur eine geringe positive Spannung. Ist die Schwefelsäure erhitzt, was einen stärkeren Angriff bedingt, so tritt zuerst einige Secunden hindurch negative Ladung des Gefässes ein, die rasch in eine positive übergeht.

In gleicher Weise zeigt das Gefäss zuerst negative Elektricität, wenn man, wie *Volta*, auf das Eisenfeilicht etwas Wasser giesst, und dann die concentrirte Schwefelsäure hinzufügt.

Wird Eisenfeilicht mit Salzsäure übergossen, so zeigt das Gefäss sich zuerst positiv; diese positive Spannung nimmt ab und verwandelt sich nach einigen Minuten in eine negative, die nach einigen Minuten wieder in eine positive übergeht.

VII. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung der Kohlensäure aus Kreide und Marmor.

1. *Kreide.* Es wurde ein längeres, passend geformtes, durch eine isolirte Messingklammer gehaltenes Kreidestück, ähnlich wie zuvor die Metallstücke, unterhalb der Spitze des trichterförmigen Gefässes aufgestellt, und in dieses Gefäss Salzsäure von verschiedener Concentration gegossen. Auf der Stelle, auf welche die Tropfen fielen, stand das Ende eines Platindrahtes, welcher mit dem Goldblättchen des Elektrometers oder mit der Erde verbunden werden konnte. Die am untern Ende des Kreidestückes abfallenden Tropfen sammelten sich in der Platinschaale.

Wenn selbst nur eine sehr verdünnte Salzsäure auf die Kreide tropft, zeigt das Elektrometer eine erhebliche negative Ladung der Kreide und der über sie hinfliessenden Säure an; mit der Concentration der Säure wächst diese Ladung. Die in die Platinschaale fallenden Tropfen (wobei der Platindraht zur Erde abgeleitet ist) ertheilen dieser ebenfalls negative Elektricität, die mit der Concentration der Säure zunimmt, jedoch geschwächt wird, wenn am unteren Ende des Kreidestückes ein Schaumanhang sich bildet.

Wird ein in der Platinschaale liegendes Kreidestück mit

verdünnter Salzsäure übergossen, so wird die Schaale negativ. Die negative Spannung steigt mit der Concentration der Säure, nimmt aber bei starken Säuren infolge der Schaumbildung wieder ab.

2. *Marmor.* Wird an Stelle der Kreide ein Stück weissen Marmors aufgestellt, so erhält beim Auftropfen von schwacher Salzsäure der Marmor und die über ihn hinfliessende Säure negative Spannung; ebenso sind aber auch die von dem Marmor abfallenden Tropfen negativ.

Die negative Elektrisirung des Marmors und der auf ihm befindlichen Säure verdankt ihr Entstehen, gerade wie bei den entsprechenden Versuchen mit der Kreide und dem Zinke, der auf der Oberfläche des Marmors eintretenden Zersetzung; die sich entwickelnde Kohlensäure nimmt positive Elektricität an, und die Säure negative, welche sich über die benetzte Fläche des Marmors und den zum Elektrometer führenden Platindraht verbreitet. Da bei Beobachtung des elektrischen Zustandes der Platinschaale die Säureschicht auf dem Marmor zur Erde abgeleitet ist, so muss die erhebliche negative Ladung der fallenden Tropfen, abgesehen von dem geringen Einfluss der Ableitung des Platindrahtes, durch den am unteren Ende und in dessen Nähe vorgehenden Process erzeugt werden.

Wird eine stärkere Salzsäure angewandt, so geht die negative Spannung des Marmors je nach der Concentration der Säure mehr oder weniger schnell in eine positive über, wobei die fallenden Tropfen eine starke negative Ladung behalten. Diese Umkehrung in der Polarität des Marmors wird durch die Gasentwickelung am unteren Rande desselben bewirkt. Die daselbst mit positiver Elektricität beladenen Gasblasen geben, weil sie namentlich bei der Dicke des Stückes nicht sofort frei entweichen können, ebenso wie beim Zink, einen Theil ihrer positiven Ladung an den Marmor und die ihn bedeckende Säure zurück, so dass dieselben positiv erscheinen.

Dass in der That in der am unteren Rande vorgehenden Gasentwickelung die Ursache für das Auftreten der positiven Spannung des Marmors liegt, lässt sich beweisen, wenn man diese Entwickelung beseitigt, was z. B. durch Ankitten eines Platinblechs auf den unteren Theil der Seitenfläche des Marmors,

über welche die Säure hinabfliesst, geschieht. Der Marmor zeigt dann stets starke negative Spannung.

Wird ein in der Platinschaale liegendes Marmorstück mit verdünnter Salzsäure übergossen, so erhält die Schaale zuerst eine negative Ladung. Dieselbe ist um so stärker, je concentrirter die Säure ist, wird jedoch bei sehr starker Säure infolge der Schaumbildung wieder schwächer. Diese anfänglich negative Spannung nimmt beim Nachlassen der heftigen Auflösung ab und geht nach einigen Minuten in eine schwache positive über, die nur wenig grösser ist, als die durch die vorhergegangene Ableitung zur Erde gesetzte Spannung sie geben würde, wenn die aus der Säure aufsteigenden Blasen die an der Oberfläche der Säure befindliche negative Elektricität mitnehmen. Indess ist sie doch immer etwas grösser, und dieser etwas höhere Werth wird durch das in der Säure gebildete Chlorcalcium bedingt.

VIII. Elektricität bei Gasentwickelungen, wenn Marmor, Kreide oder Zink mit Salzsäure, welcher Chlorcalcium, Glycerin oder Zucker zugesetzt worden, übergossen wird.

Wenn ein Marmorstück in der Platinschaale mit Salzsäure übergossen wird, so tritt zuerst eine negative Ladung der Schaale auf, welche später in eine positive übergeht. Wird der Salzsäure anstatt Wasser eine Chlorcalciumlösung oder Glycerin in einer gewissen Menge zugesetzt, so erscheint die erste negetive Periode nicht mehr, die Schaale wird gleich anfangs positiv, und zwar erreicht diese positive Spannung einen höheren Werth, als bei der mit Wasser verdünnten Säure.

Wird ein Kreidestück mit verdünnter Salzsäure übergossen, so zeigt die Schaale sich stets negativ geladen. Bei Zusatz von Chlorcalcium, Glycerin oder Zuckerlösung erscheint diese negative Spannung viel schwächer, und wird auch wohl ganz aufgehoben.

Ebenso tritt beim Zink, wenn es mit starker Salzsäure unter Zusatz von Glycerin übergossen wird, die bei reiner Salzsäure anfangs erscheinende negative Ladung nicht auf.

Da Chlorcalcium-, Zuckerlösung und Glycerin in gleicher Weise die Entstehung der positiven Spannung der Platinschaale

bewirken, so scheint ihre Einwirkung nur auf einer Verminderung der Leichtbeweglichkeit der Flüssigkeitstheilchen zu beruhen. Die an ihrem Aufsteigen gehinderten Gasblasen geben zum Theil die ihnen bei ihrer Entstehung zugetheilte positive Elektricität wieder an die Flüssigkeit ab, und nehmen aus dieser negative mit fort; beim Vorwalten des letzteren Vorganges muss die Schaale dann positiv erscheinen.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

INHALT.

Seite

F. Klein, Über gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung 1

W. Weber, Über Construction des Bohnenberger'schen Reversionspendels, zur Bestimmung der Pendellänge für eine bestimmte Schwingungsdauer im Verhältniss zu einem gegebenen Längenmaass. 7

C. Neumann, Über die von G. Cantor und P. du Bois-Reymond über trigonometrische Reihen aufgestellten Sätze, etc. 18

W. Hankel, Neue Beobachtungen über die Thermo- und Aktinoelektricität des Bergkrystalles, als Erwiederung auf einen Aufsatz der Herren C. Friedel und J. Curie. 35

W. Dyck, Vorläufige Mittheilungen über die durch Gruppen linearer Transformationen gegebenen regulären Gebietseintheilungen des Raumes. Mit 1 Tafel 61

W. Braune, Über die Intercostalvenen des menschlichen Körpers 76

C. Neumann, Über eine neue und einfache Methode zur Untersuchung der Stetigkeit, respective Unstetigkeit mehrdeutiger Functionen. 85

C. Neumann, Über das Verschwinden der Thetafunctionen 99

W. Hankel, Über die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten 123

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1884.

I. II.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1885.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

SECHSUNDDREISSIGSTER BAND.

1884.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

APR 13 1885

Homestead

(36.)

INHALT.

	Seite
K. Rohn, Ueber die Entstehung eines beliebigen $\varkappa$-fachen Punctes einer Fläche aus dem gewöhnlichen $\varkappa$-fachen Punct.	1
W. Knop, Ueber Erzeugung und Ausscheidung von zweifach harnsaurem Ammoniak durch die Larve der Kleidermotte. .	9
K. Rohn, Einige specielle Fälle der Kummer'schen Fläche . . .	10
O. Fischer, Note über conforme Abbildung gewisser sphärischer Dreiecke durch algebraische Functionen	17
F. Engel, Ueber die Abel'schen Relationen für die Theilwerthe der elliptischen Functionen	32
K. Rohn, Ueber Flächen 4. Ordnung mit acht bis sechzehn Knotenpuncten	52
F. Klein, Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe.	61
A. Mayer, Zur Aufstellung der Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale bei variabeln Grenzwerthen .	99
F. Schur, Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung.	128
C. Segre, Sur un cas particulier de la surface de Kummer. Lettre à M. K. Rohn.	132
Dr. Ambronn, Zur Mechanik des Windens.	136
W. Scheibner, Ueber eine Transformationsformel für Doppelintegrale	185
A. Hurwitz, Ueber Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante	193

SITZUNG AM 28. JANUAR 1884.

Karl Rohn, *Ueber die Entstehung eines beliebigen* $\varkappa$*-fachen Punctes einer Fläche aus dem gewöhnlichen* $\varkappa$*-fachen Punct.* Vorgelegt von Prof. Dr. *Klein.*

Vorbereitende Bemerkungen.

Wir legen unserer Betrachtung eine Fläche nter Ordnung $f(xyzw) = 0$ zu Grunde. Der Tangentenkegel, aus einem Raumpunct P_1 oder $x_1 y_1 z_1 w_1$ an die Fläche gelegt, berührt dieselbe längs einer Curve, welche durch die *erste Polarfläche* $x_1 \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z} + w_1 \frac{\partial f}{\partial w} = 0$ jenes Punctes ausgeschnitten wird. Construirt man noch für einen zweiten Raumpunct P_2 oder $x_2 y_2 z_2 w_2$ die Polarfläche, so gehört jedem Punct ihrer Verbindungslinie eine Polarfläche zu, welche die Schnittcurve jener beiden Polarflächen enthält; wir bezeichnen desshalb diese, allen Polarflächen gemeinsame Curve als die *erste Polarcurve* der Geraden $P_1 P_2$. Die Schnittpuncte der Polarcurve mit der zu Grunde gelegten Fläche bilden die Berührungspuncte der durch die Gerade $P_1 P_2$ an dieselbe gelegten Tangentialebenen. Da man die Zahl der Tangentialebenen, welche man durch eine Gerade an eine Fläche legen kann, als ihre Classe bezeichnet, so ergiebt die Zahl der Schnittpuncte der gegebenen Fläche mit einer ersten Polarcurve die Classenzahl der Fläche. Diese Zahl ist ersichtlich gleich $n(n-1)^2$, wenn die Fläche keine vielfachen Puncte besitzt.

Existirt auf der Fläche ein $\varkappa$-facher Punct, so schickt jede Polarcurve $(\varkappa - 1)^2$ Aeste durch diesen Punct hindurch, d. h. es fallen $\varkappa(\varkappa - 1)^2$ von den Schnittpuncten der Polarcurve mit der Fläche in den $\varkappa$-fachen Punct hinein. Folglich reducirt ein

$\varkappa$-facher Punct die Classe der Fläche im Allgemeinen um $\varkappa(\varkappa - 1)^2$ Einheiten. Wenn aber von den $(\varkappa - 1)^2$ Aesten der Polarcurve einer oder mehrere die Fläche im $\varkappa$-fachen Punct berühren, osculiren etc., wenn also diese Aeste mit der Fläche $\varkappa + 1$, $\varkappa + 2$ etc. consecutive Puncte gemein haben, so erhöht sich dem entsprechend die Reductionszahl des $\varkappa$-fachen Punctes. Bezeichnen wir die Reductionszahl eines vielfachen Punctes als seinen *Index*, so sehen wir, dass *der Index eines $\varkappa$-fachen Punctes* $\gtreqless \varkappa(\varkappa - 1)^2$ *ist.* Im ersteren Falle nennen wir den Punct einen *gewöhnlichen*, im letzteren einen *speciellen* $\varkappa$-fachen Punct.

Die Tangenten der $(\varkappa - 1)^2$ Aeste, welche die Polarcurve durch den $\varkappa$-fachen Punct der Fläche schickt, werden gebildet von den $(\varkappa - 1)^2$ Geraden, welche der zur Polarcurve gehörigen Raumgeraden als Polaren entsprechen in Bezug auf den Tangentialkegel $\varkappa$ter Ordnung im vielfachen Punct. Eine solche Polare liegt — bei beliebiger Lage der Raumgeraden — dann und nur dann auf dem Tangentialkegel, wenn sie eine singuläre Gerade desselben ist. Wir können deshalb sagen: *Der Tangentialkegel im gewöhnlichen $\varkappa$-fachen Punct besitzt keine singulären Kanten, in einem speciellen $\varkappa$-fachen Punct jedoch muss er nothwendig singuläre Kanten besitzen.*

Um den Index eines $\varkappa$-fachen Punctes zu ermitteln, macht man denselben zum Coordinatenanfangspunct, stellt dann für die einzelnen Aeste der Polarcurve die Potenzreihen auf, etwa $x = \mathfrak{P}_1(z)$, $y = \mathfrak{P}_2(z)$ und setzt diese Reihen in die Gleichung der Fläche $f(xyz) = 0$ ein. Bei jeder solchen Substitution ergiebt sich eine Potenzreihe von z, deren niedrigste Potenz $\gtreqless \varkappa$ ist; *die Summe der Exponenten der niedrigsten Potenzen von z in den $(\varkappa - 1)^2$ Potenzreihen, welche sich so ergeben, ist gleich dem Index des $\varkappa$-fachen Punctes.* Hierzu ist zu bemerken, dass man nur diejenigen Aeste der Polarcurve zu untersuchen braucht, welche eine singuläre Kante des Tangentialkegels im *$\varkappa$-fachen Punct* berühren, jeder andere Act liefert zum Index den Beitrag $\varkappa$. Ferner ist hinzuzufügen, dass der Satz seine Richtigkeit behält, wenn die Aeste der Polarcurve beliebig verzweigt sind, wenn also die Potenzreihen nach gebrochenen Potenzen von z fortschreiten; die Summanden, welche den Index zusammensetzen, sind hier zum Theil gebrochene Zahlen. Der Bequemlichkeit halber wird man bei der Berechnung die Polar-

curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wählen, was man immer kann, wenn die Ebene $z = 0$ keine singulären Kanten des Tangentialkegels im $\varkappa$-fachen Punct enthält.

Der projicirende Kegel einer Fläche und seine Bedeutung für den $\varkappa$-fachen Punct.

Um das Verhalten einer Fläche in der Umgebung eines $\varkappa$-fachen Punctes K zu beurtheilen, ist die Kenntniss der Projection der Fläche, oder des projicirenden Kegels mit einem beliebigen Scheitel P_0 erforderlich. Die Classe des projicirenden Kegels ist identisch mit der Classe der Fläche; erniedrigt sich die Classe der Fläche, so erniedrigt sich ganz ebenso die Classe des projicirenden Kegels. Nimmt demnach der *Index* des $\varkappa$-fachen Punctes um α Einheiten zu, so nimmt der *Index* der singulären Kante des projicirenden Kegels durch K um β Einheiten zu, und zwar ist $\alpha \gtreqless \beta$. Es ist nämlich möglich, dass einige von den Doppel- und Rückkehrkanten des projicirenden Kegels — welche mit den Doppel- und Wendetangenten aus P_0 an die Fläche identisch sind — in die singuläre Kante durch K hineinrücken, sowie man die Specialisirung des $\varkappa$-fachen Punctes vornimmt.

Nachdem wir nun erkannt haben, dass die Specialisirung des $\varkappa$-fachen Punctes auf's Engste mit der Specialisirung des projicirenden Kegels oder der Flächenprojection verknüpft ist, wenden wir uns der Specialisirung dieser Projection zu. Zunächst besitzt die Projectionscurve einen $\varkappa(\varkappa - 1)$-fachen Punct und es ist zu untersuchen, in welcher Weise sich der Index dieses Punctes erhöht, wenn sich der Index des $\varkappa$-fachen Punctes der Fläche erhöht.

Ist eine ebene Curve mit einem vielfachen Puncte gegeben, der lauter getrennte Tangenten besitzt, und soll der Index desselben sich erhöhen, so wird das in der folgenden Weise geschehen, vorausgesetzt, dass die Curve ausser dem vielfachen Punct nur Doppel- und Rückkehrpuncte besitzt. Wir gehen von einer Curve mit nur reellen Tangenten aus. Rücken δ Tangenten zusammen, so ziehen sich $\delta - 1$ Schleifen der Curve zusammen, siehe Fig. 1; δ Aeste der Curve sind miteinander verzweigt, der Index des vielfachen Punctes ist um $\delta - 1$ gestiegen. Die δ Curvenäste mit gemeinsamer Tangente können nun

zu einer weiteren Steigerung des Index specialisirt werden. Spalten sich die δ Curvenäste in einen *linearen* und in $\delta - 1$ miteinander *verzweigte* Aeste, so wächst der Index um 1. Dadurch, dass man weitere Spaltungen und Verzweigungen unter den δ Aesten mit gemeinsamer Tangente vornimmt, kann man den Index beliebig weit erhöhen; ein Hinderniss in der Erhöhung bietet schliesslich nur die Ordnung der Curve dar. Alle diese Spaltungen und Verzweigungen werden bei der Curve dadurch bewirkt, dass entweder ein Curvenzug in den vielfachen Punct hereinwächst, und zwar in der Richtung der gemeinsamen Tangente, siehe Fig. 2, oder dass sich eine Schleife zusammenzieht, siehe Fig. 3, oder dass Doppelpuncte und Rückkehrpuncte in den vielfachen Punct hereinrücken.

Fig. 1.

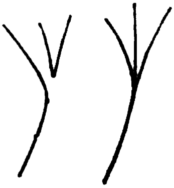


Fig. 2.

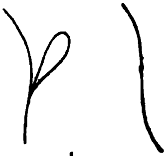


Fig. 3.

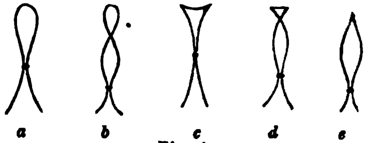


Fig. 4.

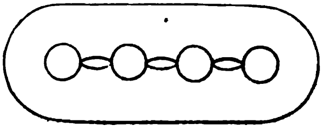


Fig. 5.

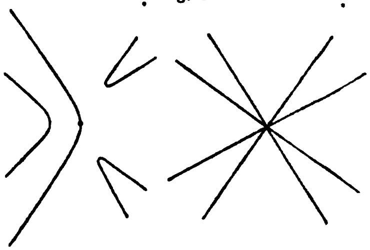


Fig. 6.

Wir müssen nun zusehen, was dieses Verhalten der Projection für eine Bedeutung für das Verhalten der Fläche selbst hat. Dem Zusammenziehen einer Schleife der Projection in den vielfachen Punct entspricht auf der Fläche das Zusammenziehen

einer Oeffnung, welche an den $\varkappa$-fachen Punct angrenzt. An Stelle der Oeffnung kann auch gelegentlich ein tropfenförmiger Flächentheil treten. Ebenso bedeutet das Hereinwachsen eines Curvenzuges der Projection in ihren vielfachen Punct ein Zusammenziehen einer Oeffnung der Fläche; denn das Zusammenziehen einer solchen Flächenöffnung kann bei der Projection sowohl als Zusammenziehen einer Schleife, wie als Anwachsen eines Curvenzuges erscheinen, je nach der Wahl des Punctes, aus dem man projicirt. Diese Schleifen der Projection können nun ganz gewöhnliche Schleifen sein, Fig. 4_a, oder sie können noch Doppelpuncte und Spitzen aufweisen, wie etwa Fig. 4_b, 4_c, 4_d, 4_e. Dem Zusammenziehen der Schleifen 4_a, 4_b, 4_c, 4_d entspricht auf der Fläche das Zusammenziehen einer Oeffnung; dasselbe erhöht den Index des $\varkappa$-fachen Punctes um eine Einheit und ausserdem jedem Doppelpunct und jeder Spitze der Projection entsprechend um 2, resp. 3 Einheiten. Dem Zusammenziehen der Schleife 4_e entspricht auf der Fläche *kein* Zusammenziehen einer Oeffnung, so dass dasselbe den Index des $\varkappa$-fachen Punctes nur um 3 Einheiten entsprechend der Spitze erhöht. Die Schleifen der Projection, denen *keine* Oeffnung auf der Fläche entspricht, erkennt man daran, dass die Tangente nach Durchlaufen der Schleife *direct* mit sich zur Deckung gelangt, während bei den übrigen Schleifen die Tangente nach Durchlaufen der Schleife *verkehrt* ihre Anfangslage einnimmt.

Specialisirung des $\varkappa$-fachen Punctes.

Der einfachste Fall ist der, wo man dem Tangentialkegel eine Doppelkante ertheilt; es ist das mit dem Zusammenziehen einer Oeffnung der Fläche an der bez. Stelle identisch. Grenzt an diese Oeffnung eine Reihe aneinander hängender Oeffnungen, wie sie Fig. 5 zeigt, an, so wollen wir diese als eine *Kette von Oeffnungen* bezeichnen; wir können alsdann die Oeffnungen der *Kette* nacheinander in den $\varkappa$-fachen Punct zusammenziehen, und zwar alle in der Richtung der Doppelkante des Tangentialkegels. Der Index wächst beim Zusammenziehen jeder Oeffnung um eine Einheit.

Erhält der Tangentialkegel eine Selbstberührungskante vom Index 2γ — welche durch Zusammenrücken von γ Doppelkanten entsteht — so sind noch $2\gamma - 1$ Oeffnungen der Fläche zu-

sammenzuziehen, indem die Projectionscurve 2γ miteinander verzweigte Aeste erhält, und der Index des $\varkappa$-fachen Punctes wächst demgemäss um $(2\gamma - 1)$. Ganz analog erhöht sich der Index des $\varkappa$-fachen Punctes um 2γ Einheiten, wenn der Tangentialkegel eine Rückkehrkante vom Index $(2\gamma + 1)$ erhält.

Auch hier können weiterhin Oeffnungen der Fläche, welche an den $\varkappa$-fachen Punct an der Stelle der singulären Kante des Tangentialkegels angrenzen, zusammengezogen werden und dadurch den Index des $\varkappa$-fachen Punktes noch erhöhen. Jedoch mag hier bemerkt werden, dass es mitunter unmöglich ist, eine einzelne Oeffnung zusammenzuziehen, dass vielmehr das Verschwinden *einer* Oeffnung das einer *andern* nothwendig nach sich zieht.

Die bisher aufgezählten Vorkommnisse bewirken *kein* Hereinrücken einer Doppel- oder Rückkehrkante in die singuläre Kante des projicirenden Kegels.

Erhält der Tangentialkegel eine λ-fache Kante mit getrennten Tangentialebenen, so kann man ihn durch Zusammenrücken von $\frac{\lambda.(\lambda-1)}{2}$ Doppelkanten entstehen lassen. Den Doppelkanten entspricht eine Erhöhung des Index um $\frac{\lambda.(\lambda-1)}{2}$ Einheiten und dem Zusammenrücken derselben eine weitere Erhöhung des Index um $\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}$ Einheiten; genau ebenso viele Oeffnungen ziehen sich beim Zusammenrücken der $\frac{\lambda.(\lambda-1)}{2}$ Doppelkanten zusammen. Von den $\frac{\lambda.(\lambda-1)}{2}$ Zweigen der Projection, welche eine gemeinsame Tangente besitzen, sind $(\lambda - 1)$ Mal λ miteinander verzweigt; es sind hier eine Reihe von Doppelpuncten der Curve in den singulären Punct hereingerückt. Die Gesammterhöhung des Index des $\varkappa$-fachen Punctes beträgt $(\lambda - 1)^2$ Einheiten.

Auch hier kann der Index noch weiter erhöht werden, wenn man Oeffnungen der Fläche, welche an den $\varkappa$-fachen Punct an der Stelle der λ-fachen Kante angrenzen, zusammenzieht. Und zwar kann dieses in zweierlei Weise geschehen. *Erstens* kann man Oeffnungen der Fläche zusammenziehen, welche eine Erhöhung des Index der λ-fachen Kante des Tan-

gentialkegels herbeiführen. Die Projection einer solchen Oeffnung besitzt noch zwei getrennte Tangenten, von denen die *eine* mit der Projection der λ-fachen Kante zusammenfällt. Durch Zusammenziehen mehrerer solcher Oeffnungen bezweckt man theilweises Verzweigen der λ Mäntel, welche der Tangentialkegel κter Ordnung durch seine λ-fache Kante schickt.

Zweitens kann man Oeffnungen der Fläche zusammenziehen, welche den Index der λ-fachen Kante des Tangentialkegels ungeändert lassen. Die Projection dieser Oeffnungen besitzt zwei zusammengefallene Tangenten, welche mit der Projection der λ-fachen Kante identisch sind. Durch Zusammenziehen solcher Oeffnungen erhöht sich der Index des κ-fachen Punctes, dagegen bleibt der Tangentialkegel im κ-fachen Punct völlig ungeändert.

In allen diesen Fällen ist die Zunahme des Index des κ-fachen Punctes gleich der Anzahl der zusammengezogenen Oeffnungen; dabei rücken selbstverständlich mehrere von den Doppel- und Rückkehrkanten des projicirenden Kegels in seine singuläre Kante herein. Es mag wieder betont werden, dass das Zusammenziehen *einer* Oeffnung ein gleichzeitiges Zusammenziehen mehrerer anderer Oeffnungen nach sich ziehen kann. Ferner ist hinzuzufügen, dass bei allen diesen Betrachtungen es völlig gleichgültig ist, ob der Tangentialkegel κter Ordnung irreducibel oder reducibel ist.

κ-fache Puncte einer Fläche, deren Tangentialkegel als Bestandtheil eine mehrfache Ebene enthält.

Für vielfache Puncte dieser Art bedürfen unsere früheren Formeln im ersten Capitel noch eine Abänderung. Hier schickt nämlich die erste Polarcurve *mehr* als $(\varkappa - 1)^2$ Aeste durch den κ-fachen Punct und auch die singuläre Kante des projicirenden Kegels ist von höherer Ordnung als der $\varkappa(\varkappa - 1)$.

Giebt es als Bestandtheil des Tangentialkegels κter Ordnung eine *Doppelebene*, so lässt man diese Doppelebene am besten durch Zusammenfallen zweier einfachen Ebenen entstehen. Bei diesem Uebergang erhält die Projection der Fläche im Allgemeinen $[\varkappa(\varkappa - 1) + 1]$ Zweige, so dass sich aus einer gewissen Gruppe von Zweigen eine neue, um 1 grössere Gruppe von linearen Zweigen bildet, welche *die* singulären Tangenten in der

Doppelebene berühren, die nicht singuläre Kanten des Tangentialkegels sind; einen solchen Uebergang zeigt Fig. 6. Umfasst die Gruppe der entstehenden linearen Zweige ε Zweige, so erhöht sich der Index des $\varkappa$-fachen Punctes um ε, und die neue Form des $\varkappa$-fachen Punktes kann in gewisser Weise wieder durch ε Einschnürungen der Fläche erhalten werden. Diese Einschnürungen müssen jedoch nicht alle reell sein, da die singulären Tangenten theilweise imaginär sein können.

Lässt man die neugebildeten linearen Zweige Verzweigungen eingehen, so wird der Index des $\varkappa$-fachen Punctes der Fläche noch weiter gesteigert; auch diese Steigerung wird durch Zusammenziehen von Oeffnungen bewirkt.

Tritt an Stelle der Doppelebene eine *dreifache Ebene* als Bestandtheil des Tangentialkegels $\varkappa$ter Ordnung, so treten an Stelle der ε linearen Aeste bei der Projection 2ε paarweise verzweigte Aeste, welche wiederum die singulären Tangenten in der dreifachen Ebene zu Tangenten haben. Auch hier können wiederum mehrere dieser singulären Tangenten zusammenrücken und so den Index des $\varkappa$-fachen Punctes erhöhen.

Es können sich bei den Doppel-, dreifachen und mehrfachen Ebenen noch eine Reihe weiterer Specialisirungen einstellen, welche sehr complicirter Natur sind, und welche ich noch nicht eingehend untersucht habe, die jedenfalls viel Interessantes darbieten.

Es lässt sich aus dem Gesagten kurz der Schluss ziehen, dass eine Erhöhung des Index eines $\varkappa$-fachen Punctes einer Fläche um α Einheiten ein Zusammenziehen von α Oeffnungen der Fläche entspricht, vorausgesetzt, dass bei dem Tangentialkegel $\varkappa$ter Ordnung keine conjugirt imaginären singulären Kanten vorkommen. Für den Fall, dass der Tangentialkegel als Bestandtheil eine mehrfache Ebene besitzt, wird wahrscheinlich derselbe Satz gelten, jedoch fehlt noch eine vollständige Begründung desselben.

SITZUNG AM 12. MAI 1884.

W. Knop, *Ueber Erzeugung und Ausscheidung von zweifach harnsaurem Ammoniak durch die Larve der Kleidermotte.*

Es ist bekannt, dass die fleischfressenden Insecten (Spinnen) ähnlich wie andere Geschöpfe, welche keine Harnblase besitzen, Excremente liefern, die zum grossen Theil, bisweilen fast ganz und gar, aus saurem harnsauren Ammoniak bestehen. Ich habe kürzlich die Excremente der Larven der Kleidermotte (Tinea pellionella) untersucht, welche dieselben bei der Verdauung von Vogelfedern liefern. In einem Behälter, in welchem ein grösserer Vorrath der Flügelfedern von jungen Hühnern aufbewahrt worden war, hatte sich eine grosse Anzahl dieser Larven eingenistet. Dieselben hatten die Fahnen der Federn fast vollständig verzehrt. Der Boden des Behälters war ganz und gar mit den Excrementen der Larven bedeckt, die sich durch wiederholtes Absieben leicht rein gewinnen liessen. Dieselben lösten sich sofort unter starker Ammoniakentwicklung in Kalilauge, mit Hinterlassung eines Quantums schwarzer Flocken auf. Salzsäure fällte aus dieser Lösung die Harnsäure als krystallinisches Pulver aus, das mit conc. Salpetersäure erhitzt, auf Zusatz von Ammoniak die bekannte Murexidreaction zeigte. Diese Excremente bestanden zu reichlich 60 Procenten aus harnsaurem Ammoniak, dass sich in diesem Falle lediglich durch die Verdauung und Oxydation der Substanz der Federfahnen gebildet haben kann, während den Larven ausserdem als flüssiges Nahrungsmittel nichts weiter, als die durch die Federn aus der Luft angezogene Feuchtigkeit, zu Gebote stand.

Karl Rohn, *Einige specielle Fälle der Kummer'schen Fläche.*
(Vorgelegt von Prof. Dr. Klein.)

Bereits im zweiten Bande der mathematischen Annalen hat *Klein* in einer Abhandlung »zur Theorie der Liniencomplexe ersten und zweiten Grades*)« angegeben, dass sechs Knotenpuncte einer *Kummer*'schen Fläche, welche auf einem Kegelschnitt liegen, *ein* Mal, *zwei* Mal, *drei* Mal oder *vier* Mal ein *Brianchon*'sches Sechseck bilden können. Es sollen hier die Configurationen betrachtet werden, welche die singulären Elemente der betreffenden *Kummer*'schen Flächen darbieten.

1) Um eine geignete Bezeichnungsweise einzuführen, gehe ich von den sechs linearen Fundamentalcomplexen aus, denen ich die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 beilege; ihre 15 Congruenzen werden dann mit 12, 13, ... 56 und ihre 10 Linienflächen mit 123 = 456, ... zu bezeichnen sein; auch die 15 Directricenpaare mögen durch 12, 13, ..., 56 bezeichnet werden. Die 15 Congruenzen definiren 15 collineare Raumtransformationen [12], [13] .... [56], die 6 linearen Complexe und die 10 Linienflächen definiren 16 dualistische Verwandtschaften [1], [2], ... [123], [124], ..., von denen die letzteren auch durch [456], [356], ... bezeichnet werden können. Die Knotenpuncte einer Kummer'schen Fläche bezeichnen wir dann dementsprechend mit: (00), (12), (13), ... (56), wobei die 15 collinearen Transformationen [12], [13] .... den Punct (00) der Reihe nach in (12), (13), ... überführen. Die 16 Doppelebenen nennen wir den dualistischen Verwandtschaften entsprechend (1), (2), ..., (123), (124), ... In einer Ebene (i) liegen die 6 Knotenpuncte (00), (i1), (i2), ... (i6), in einer Ebene (hik) = (lmn) liegen die 6 Knotenpuncte (hi), (ik), (hk),

*) Math. Annal. Bd. II, pag. 211.

(lm), *(mn)*, *(ln)*; durch einen Knotenpunct *(hi)* gehen die 6 Doppelebenen *(h)*, *(i)*, *(hik)*, *(hil)*, *(him)*, *(hin)*.

Es mag nun gestattet sein unsere Symbole für die Knotenpuncte und Doppelebenen gelegentlich durch andere zu ersetzen. So verstehen wir unter *(hikl)* ein zweigliedriges Symbol, welches man erhält — wenn unter den Zahlen *h*, *i*, *k*, *l* zwei gleiche sind — indem man die gleichen Zahlen weglässt, — wenn die Zahlen *h*, *i*, *k*, *l* verschieden sind — indem man sie durch die beiden noch übrigen Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 ersetzt. Nach dem Gesagten ist auch das Symbol *(hiklmn)* leicht durch das ihm äquivalente viergliedrige und folglich auch durch das äquivalente zweigliedrige Symbol zu ersetzen. Ebenso können alle ungeraden Symbole durch Weglassen gleicher Zahlen auf *ein-*, *drei-* oder *fünfgliedrige* Symbole reducirt werden, von denen die letzteren durch dasjenige *ein*gliedrige Symbol ersetzt werden können, dessen Zahl in dem fünfgliedrigen Symbol nicht vorkommt.

Wählen wir drei beliebige nicht derselben Doppelebene angehörige Knotenpuncte *(hi)*, *(kl)*, *(mn)* — wobei die Zahlen *hiklmn* auch theilweise gleich sein können — und gesellen wir denselben den vierten Punct *(hiklmn)* = *(pq)* zu, so nennen wir solche 4 Puncte ein *geschlossenes Quadrupel* oder kurzweg *Quadrupel*. Das Quadrupel geht durch drei collineare Transformationen in sich über, nämlich *eine*, welche *(hi)* mit *(kl)* und *(mn)* mit *(pq)* vertauscht, *eine*, welche *(hi)* mit *(mn)* und *(kl)* mit *(pq)*, und *eine*, welche *(kl)* mit *(mn)* und *(hi)* mit *(pq)* vertauscht. Ganz ähnlich sprechen wir von einem *geschlossenen Quadrupel* von 4 Doppelebenen. *Vier Knotenpuncte, von denen keine drei einer Doppelebene angehören, bilden immer ein geschlossenes Quadrupel.* Die 16 Knotenpuncte lassen sich 15 Mal in je vier Quadrupel theilen.

2) Aus diesem Satze folgt, dass vier Knotenpuncte nur dann in einer Ebene liegen können, wenn sie ein Quadrupel bilden. Da aber ein Quadrupel durch 4 Transformationen — einschliesslich der Identität — in sich übergeht, so kann ein *ebenes Quadrupel* nur in der Seitenfläche eines Fundamentaltetraëders liegen. So erkennen wir, dass die 16 Knotenpuncte einer Kummer'schen Fläche vier Mal zu vier in den Seitenflächen eines Fundamentaltetraëders liegen und dass die 16 Doppelebenen vier Mal zu vier durch Eckpuncte desselben hindurch

gehen, wenn überhaupt *ein* Mal vier Knotenpuncte in einer Ebene liegen; eine solche Fläche nennt man *Tetraëdroid**). In jeder Doppelebene bilden die 6 Knotenpuncte ein *Brianchon*-sches Sechseck, der zugehörige Brianchon'sche Punct fällt mit einem Eckpunct des *ausgezeichneten* Fundamentaltetraëders zusammen. Durch jeden solchen Eckpunct gehen 6 gerade Linien, welche zwei Knotenpuncte enthalten. Die Gleichung der Fläche bezogen auf das ausgezeichnete Tetraëder ist:

$$x^4 + y^4 + z^4 + w^4 - \frac{x_0^4 + y_0^4 - z_0^4}{x_0^2 y_0^2}(x^2 y^2 + z^2 w^2) -$$

$$- \frac{y_0^4 + z_0^4 - x_0^4}{y_0^2 z_0^2}(x^2 w^2 + y^2 z^2) - \frac{z_0^4 + x_0^4 - y_0^4}{z_0^2 x_0^2}(x^2 z^2 + y^2 w^2) = 0;$$

sie enthält noch zwei unabhängige Constanten.

3) Um nun zu untersuchen, wann eine Kummer'sche Fläche zwei Mal, drei Mal, vier Mal Tetraëdroid ist, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Wir haben gesehen, dass eine Kummer'sche Fläche dann zum Tetraëdroid wird, wenn eine Doppelebene durch einen Eckpunct eines Fundamentaltetraëders geht. Geht die Doppelebene durch zwei, drei oder vier Tetraëdereckpuncte, so wird die zugehörige Fläche zwei, drei oder vier Mal Tetraëdroid sein. Es ist dieses der Weg, welcher von *Klein* a. a. O. eingeschlagen wurde. Man kann sich aber auch direct fragen, wann das Sechseck in der Doppelebene zwei, drei, oder vier Mal *Brianchon*'sches Sechseck wird. So erkennt man sofort, dass zwei Brianchon'sche Puncte nur auf einer Seite des Sechsecks liegen können, welche sie dann harmonisch theilen. Existiren dagegen zwei Brianchon'sche Puncte, welche nicht derselben Seite des Sechsecks angehören, so zeigt der Pascal'sche Satz, dass es noch einen dritten Brianchon'schen Punct geben muss, der mit jenen beiden auf gerader Linie liegen muss. Tritt endlich noch ein vierter Brianchon'scher Punct hinzu, so liegen wieder drei von ihnen auf gerader Linie, während ihre Verbindungslinien mit dem vierten Seiten des Sechsecks bilden.

4) Kehren wir wieder zu den Quadrupeln zurück, welche von den Knotenpuncten gebildet werden. Um die Vorstellung zu fixiren, wählen wir die vier Quadrupel, welche sich bei den

---

*) Nach *Cayley*, vergl. Liouville's Journal XI (1847).

Transformationen [12], [34], [56] nicht ändern. Diesen vier Quadrupeln fügen wir vier weitere zusammengehörige Quadrupel bei, welche mit den ersteren zwei Puncte oder keinen Punct gemein haben, z. B. die Quadrupel, welche durch Anwendung der Transformationen [12], [35], [46] in sich übergeben. Nun lassen wir die Quadrupel in *ebene Quadrupel* übergehen, dann erhalten wir für die Knotenpuncte folgendes Schema:

[12], [34], [56]					[12], [35], [46]				
(00)	(12)	(34)	(56)	— E_1	(00)	(12)	(35)	(46)	— E_1
(35)	(46)	(45)	(36)	— E_2	(34)	(56)	(45)	(36)	— E_2
(13)	(23)	(14)	(24)	— E_3	(13)	(23)	(15)	(25)	— E_3
(15)	(25)	(26)	(16)	— E_4	(14)	(24)	(26)	(16)	— E_4

wenn wir die Ebenen der beiden ausgezeichneten Fundamentaltetraëder mit $E_1 E_2 E_3 E_4$ resp. $\mathrm{E}_1 \mathrm{E}_2 \mathrm{E}_3 \mathrm{E}_4$ bezeichnen. Für die Eckpuncte dieser Tetraëder erhalten wir:

P_1 — (00) (12), (34) (56), Π_1 — (00) (12), (35) (46)
P_2 — (35) (46), (45) (36), Π_2 — (34) (56), (45) (36)
P_3 — (13) (23), (14) (24), Π_3 — (13) (23), (15) (25)
P_4 — (15) (25), (26) (16), Π_4 — (14) (24), (26) (16)

Die 8 Geraden (00) (12), (34) (56), (35) (46), (45) (36), (13) (23), (14) (24), (15) (25), (26) (16) gehören der Congruenz (12) an; auf jeder liegen natürlich zwei Knotenpuncte und in jeder schneiden sich zwei Doppelebenen. Auf den 8 Geraden liegen aber auch je zwei Tetraëdereckpuncte und in ihnen schneiden sich je zwei Tetraëderflächen und zwar von jedem Tetraëder immer eine; mit andern Worten jede der 8 Geraden wird noch von zwei weiteren geschnitten. Aus dem Schema erkennt man, dass die Puncte $\Pi_1 \Pi_2$ auf der Schnittlinie von E_1 und E_2 liegen, und da auf dieser Geraden auch die Puncte P_3 und P_4 liegen, so folgt, dass *die vier Puncte* $\Pi_1 \Pi_2 P_3 P_4$ *auf einer Geraden liegen, durch welche zugleich die vier Ebenen* $\mathrm{E}_3 \mathrm{E}_4 E_1 E_2$ *hindurchgehen. Ebenso liegen die vier Puncte* $\Pi_3 \Pi_4 P_1 P_2$ *auf einer Geraden, in welcher sich die Ebenen* $\mathrm{E}_1 \mathrm{E}_2 E_3 E_4$ *schneiden. Die beiden Geraden sind Directricen der Congruenz* 12. Die vier Ebenen $\mathrm{E}_3 \mathrm{E}_4 E_1 E_2$ — und ebenso die vier Ebenen $\mathrm{E}_1 \mathrm{E}_2 E_3 E_4$ — enthalten alle 16 Knotenpuncte. Die Gleichung einer solchen Fläche, bezogen auf eines der beiden ausgezeichneten Tetraëder, ist:

$$x^4 + y^4 + z^4 + w^4 - \frac{2x_0^4 - z_0^4}{x_0^4}(x^2y^2 + z^2w^2) -$$

$$- \frac{z_0^2}{x_0^2}(x^2w^2 + y^2z^2) - \frac{z_0^2}{x_0^2}(x^2z^2 + y^2w^2) = 0,$$

sie enthält noch eine einzige Constante.

5) Wir legen jetzt vier Quadrupel zu Grunde, welche bei den Transformationen [12], [34], [56] ungeändert bleiben, und nehmen vier weitere Quadrupel hinzu, welche mit jenen je einen Knotenpunct gemein haben, etwa die vier Quadrupel, welche bei den Transformationen [13], [25], [46] ungeändert bleiben. Dann gibt es noch vier weitere Quadrupel, welche sowohl mit den ersteren Quadrupeln als auch mit den letzteren je einen Knotenpunct gemein haben; es sind dies die Quadrupel, die bei den Transformationen [16], [24], [35] ungeändert bleiben. Das Bildungsgesetz, welches die Transformationen [16], [24], [35] aus den gegebenen Transformationen ableiten lehrt, ist unmittelbar klar.

Die drei Fundamentaltetraëder 12, 34, 56; 13, 25, 46 und 16, 24, 35 haben die Eigenschaft, dass ihre Eckpuncte 16 Mal zu 3 auf 16 Geraden liegen und dass ihre Seitenflächen sich 16 Mal zu 3 in 16 Geraden schneiden. Man kann auch so sagen: Je zwei Tetraëder decken sich, wenn man sie aus den Eckpuncten des dritten betrachtet.

Werden nun die Quadrupel, mit den Tranformationen [12], [34], [56] in sich, *eben* und werden gleichzeitig die Quadrupel, mit den Transformationen [13], [25], [46] in sich, *eben*, so werden auch die Quadrupel, mit den Tranformationen [16], [24], [35] in sich, *eben*. Es gibt also hier *drei ausgezeichnete Tetraëder*. Die Lage der Knotenpuncte ergibt das Schema:

[12], [34], [56]		[13], [25], [46]	
(00) (12), (34) (56)	$-A_1-P_1$,	(00) (13), (25) (46)	$-B_1-Q_1$,
(13) (23), (14) (24)	$-A_2-P_2$,	(12) (23), (15) (35)	$-B_2-Q_2$,
(15) (25), (26) (16)	$-A_3-P_3$,	(34) (14), (16) (36)	$-B_3-Q_3$,
(35) (46), (45) (36)	$-A_4-P_4$,	(56) (24), (26) (54)	$-B_4-Q_4$,

[16], [24], [35]	
(00) (16), (24) (35)	$-C_1-R_1$
(12) (26), (14) (46)	$-C_2-R_2$
(13) (36), (56) (15)	$-C_3-R_3$
(23) (45), (34) (25)	$-C_4-R_4$.

Dabei bedeuten die $A_i\,B_i\,C_i$ die Seitenflächen und $P_i\,Q_i\,R_i$ die Eckpuncte der Fundamentaltetraëder, und zwar ist P_1 der Schnittpunct der Geraden (00) (12), (34) (56) u. s. w.

Jede der 12 Seitenflächen $A_i\,B_i\,C_i$ hat mit jeder anderen einen und nur einen Knotenpunct gemein. In jeder Doppelebene liegen drei Tetraëderecken auf gerader Linie, von jedem Tetraëder eine; und durch jeden Knotenpunct gehen drei Tetraëderseiten, welche sich in gerader Linie schneiden. *Die 12 Ebenen, welche vier Knotenpuncte enthalten, schneiden sich 16 Mal zu drei in 16 Geraden, und die 12 Puncte, durch welche vier Doppelebenen gehen, liegen 16 Mal zu drei in 16 Geraden.* Die 16 Geraden durch die 12 Tetraëderecken sind:

$P_1\,Q_1\,R_1$	$P_2\,Q_1\,R_3$	$P_3\,Q_1\,R_4$	$P_4\,Q_1\,R_2$
$P_1\,Q_2\,R_2$	$P_2\,Q_2\,R_4$	$P_3\,Q_2\,R_3$	$P_4\,Q_2\,R_1$
$P_1\,Q_3\,R_4$	$P_2\,Q_3\,R_2$	$P_3\,Q_3\,R_1$	$P_4\,Q_3\,R_3$
$P_1\,Q_4\,R_3$	$P_2\,Q_4\,R_1$	$P_3\,Q_4\,R_2$	$P_4\,Q_4\,R_4$.

Die 16 Geraden, in welchen sich die Tetraëderseiten zu drei schneiden sind:

$A_1\,B_1\,C_1$	$A_2\,B_1\,C_3$	$A_3\,B_1\,C_4$	$A_4\,B_1\,C_2$
$A_1\,B_2\,C_2$	$A_2\,B_2\,C_4$	$A_3\,B_2\,C_3$	$A_4\,B_2\,C_1$
$A_1\,B_3\,C_4$	$A_2\,B_3\,C_2$	$A_3\,B_3\,C_1$	$A_4\,B_3\,C_3$
$A_1\,B_4\,C_3$	$A_2\,B_4\,C_1$	$A_3\,B_4\,C_2$	$A_4\,B_4\,C_4$.

Die Gleichung einer solchen Fläche, bezogen auf eines der drei ausgezeichneten Fundamentaltetraëder, ist:

$$0 = x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + \frac{4x_0^2 + 6x_0y_0 + 4y_0^2}{x_0y_0}(x^2y^2 + z^2w^2) -$$

$$\frac{4x_0^2+2x_0y_0+2y_0^2}{y_0(x_0+y_0)}(x^2w^2+y^2z^2) - \frac{4y_0^2+2x_0y_0+2x_0^2}{x_0(x_0+y_0)}(x^2z^2+y^2w^2).$$

6) Die in der vorhergehenden Nummer besprochene Configuration der 16 Knotenpuncte kann noch weiter specialisirt werden, indem man etwa die vier Quadrupel, welche durch die Transformationen [12], [16], [35] in sich übergehen, in ebene Quadrupel verwandelt. Die Knotenpuncte besitzen dann ersichtlich ein Mal die in Nr. 5 angegebene Configuration und drei Mal die in Nr. 4 angegebene Configuration. Zu den Ebenen $A_i\,B_i\,C_i$ und den Puncten $P_i\,Q_i\,R_i$ kommen dann noch die 4 Seitenflächen und die 4 Eckpuncte des Tetraëders 12, 16, 35, nämlich:

$$\begin{array}{l} \quad [12],\ [46],\ [35] \\ (00)\ (12),\ (46)\ (35) - D_1 - S_1 \\ (13)\ (23),\ (25)\ (15) - D_2 - S_2 \\ (14)\ (24),\ (16)\ (26) - D_3 - S_3 \\ (34)\ (56),\ (36)\ (45) - D_4 - S_4. \end{array}$$

Die 12 Puncte $P_i Q_i R_i$ und die 12 Ebenen $A_i B_i C_i$ besitzen die vorher geschilderte Configuration; zugleich liegen auf den 6 Kanten des Tetraëders 12, 46, 35 je zwei jener Puncte und es gehen durch diese Kanten je zwei jener Ebenen hindurch. Auf den Kanten des Tetraëders 12, 46, 35 liegen also je 4 der 16 Puncte $P_i Q_i R_i S_i$ und es gehen durch sie je 4 der 16 Ebenen $A_i B_i C_i D_i$ hindurch.

Unsere Fläche besitzt also 16 ebene Quadrupel. Man kann 6 Mal 4 Quadrupel zusammenfassen, welche alle 16 Knotenpuncte umfassen und deren Ebenen sich in einer Geraden schneiden; diese 6 Geraden bilden die Kanten eines Tetraëders. Die Ebenen dieses Tetraëders enthalten vier Quadrupel, welche ebenfalls alle Knotenpuncte umfassen. Es existiren ferner noch drei Mal vier Quadrupel, welche sämmtliche Knotenpuncte enthalten; sie bilden drei Tetraëder, welche die in Nr. 5 angegebene Lage besitzen.

Die Gleichung unserer Fläche, bezogen auf das Tetraëder 12, 46, 35 ist:

$$x^4+y^4+z^4+w^4-(x^2y^2+z^2w^2+x^2z^2+y^2w^2+x^2w^2+y^2z^2)=0.$$

7) Geht man von den Kummer'schen Flächen zu den Complexflächen über, so rücken vier Mal zwei Knotenpuncte auf der Doppelgeraden zusammen. Es kann dann nur noch die in Nr. 2 behandelte Specialisirung eintreten. Die 8 Knotenpuncte einer Complexfläche liegen bekanntlich vier Mal zu zwei auf vier Axen, welche die Doppelgerade treffen. Bei der angegebenen Specialisirung schneiden sich zwei Mal zwei Axen in demselben Puncte der Doppelgeraden, und dementsprechend liegen die singulären Tangenten in den Pinchpoints zwei Mal zu zwei in derselben Ebene durch die Doppelgerade.

Otto Fischer, *Note über conforme Abbildung gewisser sphärischer Dreiecke durch algebraische Functionen.*

(Vorgelegt von Prof. Dr. F. Klein.)

Die vorliegende Mitteilung bezieht sich auf eine specielle Untersuchung der Functionen, welche die beim Ikosaeder auftretenden sphärischen Dreiecke auf einander conform abbilden. Die Resultate derselben lassen sich mit geringen Modificationen für die Abbildung aller sphärischen Dreiecke verwenden, deren Seiten in Symmetrieebenen eines regulären Körpers liegen.

Im Interesse der kürzeren Darstellung will ich im Folgenden allgemein ein Dreieck mit den Winkeln $\frac{\alpha\pi}{n_1}$, $\frac{\beta\pi}{n_2}$, $\frac{\gamma\pi}{n_3}$ durch $\left(\frac{\alpha}{n_1}, \frac{\beta}{n_2}, \frac{\gamma}{n_3}\right)$ bezeichnen; das einfachste Ikosaederdreieck $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$ führe ich als *Elementardreieck* ein. Es soll nun überhaupt nur die Abbildung aller Ikosaederdreiecke auf das Elementardreieck in Betracht gezogen werden; durch diese wird dann die Abbildung zweier beliebiger Ikosaederdreiecke auf einander vermittelt. In der Bezeichnungsweise $\left(\frac{\alpha}{n_1}, \frac{\beta}{n_2}, \frac{\gamma}{n_3}\right)$ soll zugleich angedeutet sein, dass die erste, zweite, dritte Zahl des Symbols bezüglich zu Ecken gehören, welche den Ecken $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ des Elementardreiecks $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$ entsprechen.

Indem wir die Kugel als Trägerin der Werthe einer complexen Variabelen einführen, nehmen wir das Elementardreieck immer in der Kugel für die Variabele η, jedes andere abzubildende Ikosaederdreieck in der Kugel für die Variabele z gelegen an. *Die Beziehung zwischen η und z wird in jedem Falle algebraisch sein*, wie generell aus den Untersuchungen des Herrn *Schwarz**)

---

*) *Schwarz:* Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt. Crelle's Journ. Bd. 75, pag. 292.

folgt; derselbe hat nachgewiesen, dass die Abbildung einer Halbebene Z auf ein Kreisbogendreieck in der Ebene der Variabelen z', welches durch stereographische Projection aus einem sphärischen Dreieck hervorgeht, dessen Seiten von Symmetrieebenen eines regulären Körpers aus einer zu letzterem concentrischen Kugelfläche ausgeschnitten werden, durch eine algebraische Gleichung zwischen Z und z' vermittelt wird. Zu jeder Abbildung des Elementardreiecks auf ein Ikosaederdreieck gehören 6 Gleichungen zwischen z und η, entsprechend den 6 Arten, auf die man die Winkel beider Dreiecke einander zuordnen kann; jede derselben besitzt die Form

$$(1) \qquad \frac{H^3(z)}{12^3 f^5(z)} = R\left(\frac{H^3(\eta)}{12^3 f^5(\eta)}\right),$$

unter $R\left(\frac{H^3(\eta)}{12^3 f^5(\eta)}\right)$ eine rationale Function von $\frac{H^3(\eta)}{12^3 f^5(\eta)}$ verstanden; f und H sind die bekannten Functionen 12ten resp. 20ten Grades, welche gleich Null gesetzt die Ecken des Ikosaeders resp. Pentagondodekaeders repräsentiren*). Dieses Resultat folgt als specieller Fall aus den allgemeinen Untersuchungen des Herrn *Klein* über algebraische Integrale linearer Differentialgleichungen**), man kann es aber auch direct aus der conformen Abbildung gewinnen.

Setzt man $\frac{H^3(\eta)}{12^3 f^5(\eta)} = Z$, so kann man kurz sagen, dass je 5 der zu einer bestimmten Abbildung gehörigen Gleichungen aus der sechsten durch lineare Transformation von Z hervorgehen. Nehmen wir an, dass die bestimmte Gleichung

$$\frac{H^3(z)}{12^3 f^5(z)} = R'(Z)$$

die Abbildung des Elementardreiecks auf das Dreieck $\left(\frac{\alpha}{n_1}, \frac{\beta}{n_2}, \frac{\gamma}{n_3}\right)$ vermittelt, so entsprechen den Dreiecken

$$\left(\frac{\alpha}{n_1}, \frac{\beta}{n_2}, \frac{\gamma}{n_3}\right), \quad \left(\frac{\alpha}{n_1}, \frac{\gamma}{n_3}, \frac{\beta}{n_2}\right), \quad \left(\frac{\beta}{n_2}, \frac{\gamma}{n_3}, \frac{\alpha}{n_1}\right), \quad \left(\frac{\beta}{n_2}, \frac{\alpha}{n_1}, \frac{\gamma}{n_3}\right),$$

---

*) Hinsichtlich der expliciten Formeln für f und H, wie überhaupt hinsichtlich etwa mangelnder Formeln und Beweise vergleiche man das demnächst im Druck erscheinende Buch des Herrn Klein: »Vorlesungen über die Theorie des Ikosaeders und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades«, Leipzig 1884.

**) *Klein*: Über lineare Differentialgleichungen. Math. Ann. Bd. XI, pag. 115.

$\left(\frac{\gamma}{n_3}, \frac{\alpha}{n_1}, \frac{\beta}{n_2}\right)$, $\left(\frac{\gamma}{n_3}, \frac{\beta}{n_2}, \frac{\alpha}{n_1}\right)$ bezüglich die linearen Substitutionen

(2) $$Z, \frac{Z}{Z-1}, \frac{Z-1}{Z}, \frac{1}{Z}, \frac{1}{1-Z}, 1-Z.$$

I. Excurs über die Funktion $R(Z)$.

Benutzen wir die homogene Schreibweise, indem wir einerseits Z_1, Z_2 durch $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ und andrerseits die binären Formen Φ, Ψ von Z_1, Z_2 durch $R = \frac{\Phi}{\Psi}$ einführen, *so stellen sich, wie man a priori aus der Abbildung schliesst, in allen Fällen Φ und Ψ in der Form dar:*

(3) $$\begin{aligned} &\Phi : \Psi : \Phi - \Psi \\ &= (-1)^{t_1} \cdot k_1 \cdot Z_1^{r_1} \cdot Z_2^{s_1} \cdot (Z_1 - Z_2)^{t_1} \prod_1^{m_1} (Z_1 - a_i Z_2)^3 \\ &: (-1)^{t_2} \cdot k_2 \cdot Z_1^{r_2} \cdot Z_2^{s_2} \cdot (Z_1 - Z_2)^{t_2} \prod_1^{m_2} (Z_1 - b_i Z_2)^5 \\ &: (-1)^{t_3+1} \cdot k_3 \cdot Z_1^{r_3} \cdot Z_2^{s_3} \cdot (Z_1 - Z_2)^{t_3} \prod_1^{m_3} (Z_1 - c_i Z_2)^2, \end{aligned}$$

wo k_i Constante und r_i, s_i, t_i, m_i ganze Zahlen, welche der Relation genügen:

$$r_1 + s_1 + t_1 + 3m_1 = r_2 + s_2 + t_2 + 5m_2 = r_3 + s_3 + t_3 + 2m_3 = n;$$

n ist die Ordnung der binären Formen Φ und Ψ und somit der Grad der rationalen Function $R(Z)$; derselbe gibt zugleich die Anzahl der Elementardreiecke an, aus denen das grössere Ikosaederdreieck, um das es sich bei der Abbildung handelt, zusammengesetzt ist. Die Faktoren $(-1)^\nu$ sind aus Zweckmässigkeitsgründen zugefügt worden. Die Werthe der Grössen r_i, s_i, t_i hängen ab von den Werthen der Nenner n_1, n_2, n_3 des letzteren Dreiecks und der Art, wie die n_i den Nennern 3, 5, 2 des Elementardreiecks zugewiesen sind. Hinsichtlich der Werthe der Nenner (n_1, n_2, n_3) haben wir 5 Klassen zu unterscheiden, nämlich (235), (335), (255), (355), (555), von denen sich die vier ersten betreffs der Aufeinanderfolge der 3 Zahlen wieder in 6 resp. 3

Unterfälle zerlegen, je nachdem alle drei Zahlen verschieden oder zwei einander gleich sind. *Auf solche Weise ergeben sich im Ganzen 16 Werthecombinationen* r_i, s_i, t_i; von diesen letzteren Grössen sind immer nur 3 von Null verschieden; dieselben haben bei der eingangs verabredeten Bezeichnungsweise der Winkel für die 16 Fälle die Werte:

1) (235) : $r_3 = \alpha,\ s_1 = \beta,\ t_2 = \gamma;$
$n = \beta + 3m_1 = \gamma + 5m_2 = \alpha + 2m_3.$

2) (253) : $r_3 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ t_1 = \gamma;$
$n = \gamma + 3m_1 = \beta + 5m_2 = \alpha + 2m_3.$

3) (325) : $r_1 = \alpha,\ s_3 = \beta,\ t_2 = \gamma;$
$n = \alpha + 3m_1 = \gamma + 5m_2 = \beta + 2m_3.$

4) (352) : $r_1 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ t_3 = \gamma;$
$n = \alpha + 3m_1 = \beta + 5m_2 = \gamma + 2m_3.$

5) (523) : $r_2 = \alpha,\ s_3 = \beta,\ t_1 = \gamma;$
$n = \gamma + 3m_1 = \alpha + 5m_2 = \beta + 2m_3.$

6) (532) : $r_2 = \alpha,\ s_1 = \beta,\ t_3 = \gamma;$
$n = \beta + 3m_1 = \alpha + 5m_2 = \gamma + 2m_3.$

---

7) (335) : $r_1 = \alpha,\ s_1 = \beta,\ t_2 = \gamma;$
$n = \alpha + \beta + 3m_1 = \gamma + 5m_2 = 2m_3.$

8) (353) : $r_1 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ t_1 = \gamma;$
$n = \alpha + \gamma + 3m_1 = \beta + 5m_2 = 2m_3.$

9) (533) : $r_2 = \alpha,\ s_1 = \beta,\ t_1 = \gamma;$
$n = \beta + \gamma + 3m_1 = \alpha + 5m_2 = 2m_3.$

---

10) (255) : $r_3 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ t_2 = \gamma;$
$n = 3m_1 = \beta + \gamma + 5m_2 = \alpha + 2m_3.$

11) (525) : $r_2 = \alpha,\ s_3 = \beta,\ t_2 = \gamma;$
$n = 3m_1 = \alpha + \gamma + 5m_2 = \beta + 2m_3.$

12) (552) : $r_2 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ t_3 = \gamma;$
$n = 3m_1 = \alpha + \beta + 5m_2 = \gamma + 2m_3.$

---

13) (355) : $r_1 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ t_2 = \gamma;$
$n = \alpha + 3m_1 = \beta + \gamma + 5m_2 = 2m_3.$

14) (535) : $r_2 = \alpha,\ s_1 = \beta,\ t_2 = \gamma;$
$n = \beta + 3m_1 = \alpha + \gamma + 5m_2 = 2m_3.$

15) (553) : $r_2 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ t_1 = \gamma;$
$n = \gamma + 3m_1 = \alpha + \beta + 5m_2 = 2m_3.$

---

16) (555) : $r_2 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ t_2 = \gamma;$
$n = 3m_1 = \alpha + \beta + \gamma + 5m_2 = 2m_3.$

Es existiren nun eine Anzahl Methoden zur Berechnung der Konstanten von R im einzelnen Falle.

Fasst man in $\frac{H^3(z)}{12^3 f^5(z)} = R(Z)$ die Grösse Z als unabhängige Variabele auf, so erhält man, wie zuerst Herr *Schwarz**) anführt, in der Function $z(Z)$ den Quotient zweier hypergeometrischer Reihen, resp. zweier Riemann'scher P-Functionen, und zwar sind letztere specielle Fälle ein und derselben allgemeineren P-Function. Aus diesem Grunde kann man in einer Anzahl von Fällen zur Gewinnung von R die von *Riemann***) angegebenen rationalen Transformationen der P-Functionen mit einem willkürlichen Parameter verwenden, die sich aus den von Herrn *Kummer****) aufgestellten rationalen Transformationen der hypergeometrischen Reihe ableiten lassen. Den bei Riemann angegebenen Transformationen ist, wie Herr *Goursat*†) findet, noch die Transformation zuzufügen, welche die Functionen $P(\frac{1}{4}, \nu, \frac{1}{2}, Z')$ und $P(\frac{1}{3}, \nu, 3\nu, Z)$ in einander überführt. Herr *Goursat* betrachtet nicht die P-Functionen, sondern die entsprechenden hypergeometrischen Reihen; er berechnet für Z' und Z die Gleichung:

$$Z' = -\frac{1}{2^6} \cdot \frac{Z(Z+8)}{(1-Z)^3}.$$

Es ergeben sich aus den Riemann'schen Transformationen, einschliesslich der Goursat'schen, alle zu den reducirten Dreiecken der Schwarz'schen Tabelle ††) gehörigen R, mit Ausnahme der

---

*) l. c. pag. 311; die erste Andeutung über diesen Punkt findet sich in der Abhandlung desselben Verfassers: »Über einige Abbildungsaufgaben«. Crelle's Journ. Bd. 70, pag. 117.

**) *Riemann:* »Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen«. Abhandlungen der kgl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen Bd. VII, oder Ges. Werke pag. 62, 1857.

***) *Kummer:* »Über die hypergeometrische Reihe«. Crelle's Journ. Bd. 15, pag. 39 und pag. 127, 1836.

†) *Goursat:* »Thèse sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique, pag. 95 (Paris 1881).

††) Crelle's Journ. Bd. 75, pag. 323.

Fälle XII, XIV, XV; z. B. folgt aus der ersten Transformationen für die Abbildung des Elementardreiecks auf Dreieck $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$ die Proportion:

$$\Phi : \Psi : \Phi - \Psi = Z_1^2 : 2^2 Z_2 (Z_1 - Z_2) : (Z_1 - 2 Z_2)^2.$$

Unabhängig von jenen Transformationen hat Herr *Brioschi**) gerade diese Fälle auf algebraischem Wege berechnet. In den Fällen, wo die Anwendung der Riemann'schen Transformationen versagt, führt eine von Herrn *Klein***) angegebene Methode zur Berechnung von R sicher zum Ziel; beispielsweise berechnet derselbe auf diese Weise die R der Fälle XII, XIV, XV der Schwarz'schen Tabelle. Da bei dieser Berechnung als singuläre Stellen in der Z-Ebene nicht $Z = 0, \infty, 1$ verwandt wurden, so bedürfen die drei Functionen noch einer Reduction, um die für unsere Abbildungszwecke direct brauchbaren R darzustellen. Nach geeigneter Umsetzung nehmen sie die Form an:

(XII) $\Phi : \Psi : \Phi - \Psi =$

$$\begin{aligned}
&3^3 \cdot Z_1 (Z_1 - Z_2)^2 \cdot (3 Z_1 - 2^7 Z_2)^3 \\
&: - 2^2 \cdot Z_2 (3^2 Z_1 + 2^4 Z_2)^5 \\
&: (3 Z_1^3 + 3^3 \cdot 97 Z_1^2 Z_2 - 2^6 \cdot 3^2 \cdot 19 Z_1 Z_2^2 + 2^{11} \cdot Z_2^3)^2,
\end{aligned}$$

(XIV) $\Phi : \Psi : \Phi - \Psi =$

$$\begin{aligned}
&Z_1 (2^2 \cdot 3^6 Z_1^2 - 3^3 \cdot 7 \cdot 13 Z_1 Z_2 - 2^9 \cdot 7 Z_2^2)^3 \\
&: - Z_2^2 (3^3 \cdot 7 Z_1 - 2^6 Z_2)^5 \\
&: (Z_1 - Z_2)(2^3 \cdot 3^9 Z_1^3 - 3^7 \cdot 5 \cdot 11 Z_1^2 Z_2 + 2^8 \cdot 3^4 \cdot 23 Z_1 Z_2^2 + 2^{15} Z_2^3)^2,
\end{aligned}$$

(XV)***) $\Phi : \Psi : \Phi - \Psi =$

$$\begin{aligned}
&2^2 \cdot Z_1 (3^6 Z_1^3 - 3^3 \cdot 5^2 Z_1^2 Z_2 + 5^3 \cdot 23 Z_1 Z_2^2 - 5^4 Z_2^3)^3 \\
&: 5^5 \cdot Z_2^2 (Z_1 - Z_2)^3 \cdot (3^3 Z_1 + 5 Z_2)^5 \\
&: (2 \cdot 3^9 Z_1^5 - 3^7 \cdot 5^2 Z_1^4 Z_2 - 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 Z_1^3 Z_2^2 + 2 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 17 Z_1^2 Z_2^3 \\
&\qquad - 2 \cdot 19 \cdot 5^5 \cdot Z_1 Z_2^4 + 5^5 Z_2^5)^2.
\end{aligned}$$

---

*) *Brioschi*: »Sulle equazioni differentiali del tetraedro, dell' ottaedro e dell' icosaedro«, Annali di Matematica, Serie II, t. 10, pag. 104.

**) *Klein*: »Über lineare Differentialgleichungen«. Math. Ann. Bd. XII, pag. 167.

***) Wegen dieses Falles vergleiche man die Anmerkung auf pag. 66 von Bd. XVII der Math. Ann.

Die Bestimmung der Constanten von R kann man nun auch in allen Fällen dadurch bewerkstelligen, dass man in die Gleichung:

$$\frac{H^3(z_1 z_2)}{12^3 \cdot f^5(z_1 z_2)} = R\left(\frac{H^3(\eta_1 \eta_2)}{12^3 \cdot f^5(\eta_1 \eta_2)}\right), \tag{4}$$

welche aus Gleichung (1) hervorgeht, wenn man $z = \frac{z_1}{z_2}$ und $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ setzt, für z_1, z_2, η_1, η_2 ihre Entwickelungen nach hypergeometrischen Reihen von Z einträgt. Man erhält dann durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von Z eine unendliche Anzahl von Bestimmungsgleichungen für die betreffenden Constanten. Auf diese Weise hat voraussichtlich Herr *Goursat*, der sich mit der allgemeinen Aufgabe beschäftigte, alle rationalen Transformationen der hypergeometrischen Reihe aufzustellen, die Transformationen gewonnen, welche sich in einer letzthin publicirten Note*) vorfinden.

Um den soeben auseinandergesetzten Weg einschlagen zu können, ist es nöthig, die Darstellung von z_1, z_2 durch hypergeometrische Reihen resp. durch P-Functionen in expliciter Form anzugeben. Wir können uns darauf beschränken, nur die P-Functionen für je einen Fall der 5 unterschiedenen Klassen anzugeben, da alle anderen sich aus diesen nach oben durch Anwendung einer der 6 linearen Transformationen ergeben, welche ihrerseits nur auf ein Vertauschen der Exponentenpaare der betreffenden P-Function hinauskommen. Greifen wir zum Beispiel die fünf Fälle 4, 8, 12, 13, 16 der obigen Tabelle heraus, so lassen sich die 5 P-Functionen besonders einfach zusammenfassend schreiben, da für alle $s_1 = s_3 = r_3 = 0$ und $s_2 = \beta$. Man findet, dass dann z_1, z_2 unter den allgemeinen P-Functionen:

$$P\begin{Bmatrix} \frac{\alpha}{2n_1}+\frac{t_1}{3}-\frac{2r_2}{5}, & \frac{\beta}{2n_2}+\frac{2(r_2+t_2)}{5}, & \frac{\gamma}{2n_3}+\frac{1}{2}-\frac{t_1}{3}-\frac{2t_2}{5} & \\ -\frac{\alpha}{2n_1}+\frac{t_1}{3}-\frac{2r_2}{5}, & -\frac{\beta}{2n_2}+\frac{2(r_2+t_2)}{5}, & -\frac{\gamma}{2n_3}+\frac{1}{2}-\frac{t_1}{3}-\frac{2t_2}{5} & Z \end{Bmatrix}$$

speciell diejenigen sind, welche aus den Riemann'schen P^{β}, $P^{\beta'}$ durch beliebige analytische Fortsetzung erwachsen, wobei

---

*) Sur une équation différentielle du troisième ordre, Comptes rendus t. 98, pag. 449 und 609.

die bei Riemann noch unbestimmt gelassenen ersten Coefficienten von P^{β}, $P^{\beta'}$ sich ergeben als bezüglich:

$$(5^b)\quad (-1)^{\frac{t_2-t_1}{10}} \frac{k_1^{\frac{1}{15}} \cdot k_2^{\frac{1}{5}}}{k_3^{\frac{1}{4}}} \cdot 12^{\delta-\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{Y}, \qquad (-1)^{\frac{t_1-t_2}{10}} \frac{k_1^{\frac{1}{5}}}{k_3^{\frac{1}{4}}} \cdot 12^{\delta} \cdot \sqrt{Y}.$$

Hierbei ist Y ein aus den Grössen f, H, T rational zusammengesetzter Ausdruck, den wir im einzelnen Falle beim Übergang von der Function z zu den Functionen z_1, z_2 als constant angenommen haben; der Werth desselben ist:

$$(6)\qquad Y = H^a \cdot f^b \cdot T^c,$$

wo:

$$a = 3\alpha - 2(r_1 + t_1),$$
$$b = \beta - 4(r_2 + t_2),$$
$$c = 2\gamma - t_3 - 2;$$

δ in (5^b) hat den Werth:

$$\delta = \tfrac{3}{10}(\beta - 4(r_2 + t_2)) = \tfrac{3}{10} b.$$

II. Über die Reducirbarkeit der Gleichung (1).

Bei Untersuchung der Gleichung

$$(1)\qquad \frac{H^3(z)}{12^3 f^5(z)} = R\left(\frac{H^3(\eta)}{12^3 f^5(\eta)}\right)$$

drängt sich von vornherein die Frage nach der Reducibilität derselben auf. Betrachtet man in (1) η als unabhängige Variabele, so werden zu jedem Werte η 60 Werte z gehören, und man benöthigt zur Darstellung der 60 Zweige der Function $z(\eta)$ einer 60-blättrigen Riemann'schen Fläche, welche nothwendig zerfallen muss, wenn Gleichung (1) reducibel sein soll. Es gelingt nun, aus der conformen Abbildung heraus die Riemann-sche Fläche, auf welcher z als eindeutige Function des Ortes erscheint, zu construiren. Eine generelle Untersuchung aller hierhergehörigen Riemann'schen Flächen liefert das Resultat, *dass alle Abbildungsgleichungen, welche zu Dreiecken von Fall 4, also zu Dreiecken* $\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{5}, \frac{\gamma}{2}\right)$, *gehören, sich in 60 Factoren*

$$(7)\qquad z = \text{rat}(\eta)$$

spalten; diese Factoren gehen aus einem hervor, wenn man auf z oder η bezüglich die 60 nicht homogenen Ikosaedersub-

stitutionen anwendet. Jeder solcher Factor bleibt dann bei 60 simultanen Substitutionen von η und z ungeändert. *In allen anderen Fällen dagegen erweist sich Gleichung* (1) *als irreducibel*, und es gibt selbstverständlich 3600 simultane Substitutionen von η und z, bei denen dieselbe in sich übergeht.

Im Falle $z = r(\eta)$ werden wir nun natürlich diese Function r direct berechnen und von der Construction der Function $R(Z)$, die für unser Abbildungsproblem dann überhaupt nicht mehr interessant ist, Abstand nehmen. Man würde wohl überdies am besten thun, hier $R(Z)$ nicht direct, sondern eben aus $z = r(\eta)$ durch Einsetzen in $\frac{H^3(z)}{12^3 \cdot f^5(z)}$ zu construiren.

III. Invariantentheoretischer Ansatz zur Bestimmung von r.

Betreffs der Abbildungsgleichungen (7) haben wir eine Unterscheidung zu machen, welche sich auf die simultanen Transformationen der beiden Variabelen z und η bezieht. Da bei der Abbildung durch (7) die Nenner der Winkel des abzubildenden Dreiecks dieselben Werthe haben als die des Elementardreiecks, so werden die Substitutionen, welche z und η gleichzeitig erfahren, immer dieselbe Periode besitzen. Aus diesem Grunde werden ferner den Substitutionen S, U, T von der Periode bezüglich 3, 5, 2, welche zu den Ecken 3, 5, 2 des Elementardreiecks gehören, und welche den Relationen

$$S^3 = U^5 = T^2 = 1, \quad SUT = 1$$

genügen, drei Substitutionen S', U', T' entsprechen, die zu den Ecken 3, 5, 2 des anderen Dreiecks gehören, und welche ihrerseits den Relationen

$$S'^3 = U'^5 = T'^2 = 1, \quad S'U'T' = 1$$

genügen. Durch diese Relationen ist aber die betreffende Substitutionsgruppe, nämlich hier die Ikosaedergruppe, vollständig definirt, wie Herr *Dyck**) gezeigt hat; daher sind beide Gruppen, abstract genommen, identisch. Es besteht somit im rationalen Falle zwischen der Gruppe der 60 Substitutionen von z und der Gruppe der 60 Substitutionen von η *holoedrischer Isomorphismus*.

---

*) *Dyck*: Gruppentheoretische Studien, Math. Ann. Bd. XX, pag. 1 ff.

Hieraus folgt nun, vermöge einer bekannten Theorie*), aber auch direct aus der Lage des abzubildenden Dreiecks, *dass die linearen Substitutionen, welche z erfährt, sich bei geeigneter Auswahl des Factors $z = r(\eta)$ aus den linearen Substitutionen, denen man jeweils η unterwerfen mag, ergeben, indem man in letzteren die fünfte Einheitswurzel ε durch ε^{ν} ersetzt, wo $\nu = 1$ oder 2 ist.*

Zu $\nu = 1$ gehören alle Dreiecke, die sich an die Seiten des Elementardreiecks anlehnen, zu $\nu = 2$ alle die, welche durch die das Dreieck $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2})$ [Fall XIV der Tabelle von Schwarz] umschliessenden Kreise gebildet werden; für erstere ist $\beta \equiv \pm 1 \pmod 5$, für letztere $\beta \equiv \pm 2 \pmod 5$. Auf diese Unterscheidung hat bei verwandten, rein algebraischen Untersuchungen zuerst Herr *Kronecker***) aufmerksam gemacht; die Herren *Klein****) und *Gordan*†) führten sie dann in die Theorie des Ikosaeders ein und zwar mit der aus der Invariantentheorie herübergenommenen Bezeichnung cogredientes (für $\nu = 1$) und contragredientes ($\nu = 2$) Verhalten der beiden Variabelen z und η. Dementsprechend werden wir die Dreiecke, welche zu Fall VI der Schwarz'schen Tabelle gehören, cogrediente, die, welche zu Fall XIV gehören, contragrediente Dreiecke nennen.

Was nun die Bildung von $r(\eta)$ selbst angeht, *so werden sich gemäss der Regeln der Invariantentheorie im cogredienten, wie im contragredienten Falle sämtliche r aus zwei derselben rational ableiten lassen.*

Im cogredienten Falle gehen wir von den beiden Functionen $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ und $-\frac{\frac{\partial f}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial f}{\partial \eta_1}}$ aus; die Function $-\frac{\frac{\partial f}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial f}{\partial \eta_1}}$, welche die Abbildung auf Dreieck $(\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$ vermittelt, ist in dieser Hinsicht zuerst von Herrn Klein††) angegeben worden. Jede weitere, ein cogredientes Dreieck abbildende Function stellt sich dann dar in der Form:

---

*) Man vergleiche: *Klein*, Theorie des Ikosaeders etc. Abschnitt II, Kap. 4.

**) *Kronecker*, Berliner Monatsberichte 1861.

***) *Klein*, Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder, Math. Ann. Bd. XII, pag. 525.

†) *Gordan*, Über die Auflösung der Gleichung 5ten Grades, Math. Ann. Bd. XIII, pag. 375.

††) *Klein*, Math. Ann. Bd. XII, pag. 526, Anmerkung.

(8) $$z = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\eta_1 T - \lambda . H \frac{\partial f}{\partial \eta_2}}{\eta_2 T + \lambda . H \frac{\partial f}{\partial \eta_1}},$$

wo λ rationale Function von Z; die Factoren T und H mussten der homogenen Schreibweise halber zugefügt werden; nur so stellt sich λ als Function allein von Z dar. Die Formel (8) ist im Wesentlichen identisch mit der von Herrn *Klein**) durch Polarenbildung gewonnenen.

Im contragredienten Falle liefern uns die beiden in z linearen Covarianten Θ und $(\tau, \Theta)_{1,0}$, die sich in der von Herrn *Gordan***) aufgestellten Tabelle contragredienter Funktionen vorfinden, zwei $r(\eta)$, aus denen man alle anderen zusammensetzen kann. Aus

(9) $$\begin{aligned} \Theta &= z_1(\eta_1^7 - 7\eta_1^2\eta_2^5) + z_2(7\eta_1^5\eta_2^2 + \eta_2^7) \text{ und} \\ (\tau, \Theta)_{1,0} &= z_1(\eta_1^{13} - 39\eta_1^8\eta_2^5 - 26\eta_1^3\eta_2^{10}) \\ &\quad - z_2(26\eta_1^{10}\eta_2^3 - 39\eta_1^5\eta_2^8 - \eta_1^{13}) \end{aligned}$$

erhalten wir durch Nullsetzen die beiden Gleichungen:

(9a) $$\begin{aligned} z &= \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{-(7\eta_1^5\eta_2^2 + \eta_2^7)}{\eta_1^7 - 7\eta_1^2\eta_2^5} \text{ und} \\ z &= \frac{-H_2}{H_1} = \frac{26\eta_1^{10}\eta_2^3 - 39\eta_1^5\eta_2^8 - \eta_2^{13}}{\eta_1^{13} - 39\eta_1^8\eta_2^5 - 26\eta_1^3\eta_2^{10}}. \end{aligned}$$

Wie ich einer persönlichen Mitteilung entnehme, hat Herr *Dyck* zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass durch $z = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ die Abbildung des Elementardreiecks auf Dreieck $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$; durch $z = \frac{-H_2}{H_1}$ die Abbildung auf Dreieck $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ geleistet wird. Aus diesen beiden Functionen setzt sich jede weitere, die ein contragredientes Dreieck abbildet, in folgender Weise zusammen:

(10) $$z = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{T\Theta_1 + \lambda \cdot f^2 H_1}{T\Theta_2 + \lambda \cdot f^2 H_2},$$

wo λ wieder rationale Function von Z.

Wir haben somit für die rationalen Fälle die Aufgabe darauf zurückgeführt, λ als rationale Function von Z zu berechnen.

---

*) *Klein*, Math. Ann. Bd. XII, pag. 526.

**) *Gordan*, Math. Ann. Bd. XIII, pag. 386.

Dasselbe lässt sich stets aus der Bedingung gewinnen, dass die Functionaldeterminante $[\varphi, \psi]$ die Form $H^{\alpha-1} f^{\beta-1} T^{\gamma-1}$ besitzen muss. Die Functionaldeterminante stellt sich bis auf eine nicht in Betracht kommende Constante c dar im cogredienten Falle als:

$$(10)\quad [\varphi, \psi] = c\left\{(11\lambda^2 + 10\lambda - 1)H^3 + (20\lambda + 1)12^3 f^5 + \frac{3}{2} T[\lambda, fH]\right\},$$

im contragredienten Falle als:

$$(11)\quad [\varphi, \psi] = f\left\{2\cdot 37(\lambda - 7)H^3 - 37\left(\frac{13}{288}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 14\right)12^3 f^5 + Hf[T, \lambda] + fT(H_2[\Theta_1, \lambda] - H_1[\Theta_2, \lambda]) + \lambda f^3(H_2[H_1, \lambda] - H_1[H_2, \lambda])\right\}.$$

Hieraus erhält man durch obige Bedingung stets eine genügend grosse Anzahl von Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten der Potenzen von Z in λ.

Als Beispiele mögen folgende Functionen dienen;

a) *im cogredienten Falle:*

$$z = \frac{20\eta_1 T + H\dfrac{\partial f}{\partial \eta_2}}{20\eta_2 T - H\dfrac{\partial f}{\partial \eta_1}}, \text{ zu Dreieck } \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{2}\right) \text{ gehörig,}$$

$$z = \frac{11 H^2 T\eta_1 - (H^3 - 31\cdot 12^3 f^5)\dfrac{\partial f}{\partial \eta_2}}{11 H^2 T\eta_2 + (H^3 - 31\cdot 12^3 f^5)\dfrac{\partial f}{\partial \eta_1}}, \text{ zu Dreieck } \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{6}{5}, \tfrac{3}{2}\right).$$

b) *Im contragredienten Falle:*

$$z = \frac{13\, T\Theta_1 + 720 f^2 H_1}{13\, T\Theta_2 + 720 f^2 H_2}, \text{ zu Dreieck } \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{2}\right),$$

$$z = \frac{13\, T\Theta_1 - 168 f^2 H_1}{13\, T\Theta_2 - 168 f^2 H_2}, \text{ zu Dreieck } \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Man kann λ nun auch gewinnen durch directes Einsetzen der Reihenentwickelungen von z_1, z_2, η_1, η_2 in Gleichung (8) und (10).

Da im rationalen Falle: $s_1 = t_1 = r_2 = t_2 = r_3 = s_3 = 0$; $r_1 = \alpha$, $s_2 = \beta$, $t_3 = \gamma$ und $n = 10\alpha + 6\beta + 15\gamma - 30$, so stellen sich allgemein z_1, z_2 dar als specielle Fälle der Function:

$$P\left\{\begin{matrix} \frac{\alpha}{6}, & \frac{\beta}{10}, & \frac{\gamma}{4}+\frac{1}{2} \\ -\frac{\alpha}{6}, & -\frac{\beta}{10}, & -\frac{\gamma}{4}+\frac{1}{2} \end{matrix}\; Z\right\}$$

und besitzen bezüglich die ersten Coefficienten:

$$\frac{k_1^{\frac{1}{15}}\cdot k_2^{\frac{1}{8}}}{k_3^{\frac{1}{4}}}\cdot 12^{\frac{3(\beta-2)}{10}}\cdot\sqrt{Y},\qquad \frac{k_1^{\frac{4}{15}}}{k_3^{\frac{1}{4}}}\cdot 12^{\frac{3\beta}{10}}\sqrt{Y},$$

wo

$$Y = H^{\alpha}\cdot f^{\beta}\cdot T^{\gamma-2};$$

speciell zur Darstellung von η_1, η_2 erhalten wir:

$$P\left\{\begin{matrix} \frac{1}{6}, & \frac{1}{10}, & \frac{8}{4} \\ -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{10}, & \frac{1}{4} \end{matrix}\; Z\right\}$$

und

$$12^{-\frac{3}{10}}\cdot\sqrt{X},\qquad 12^{\frac{3}{10}}\cdot\sqrt{X},$$

wo

$$X = H\cdot f\cdot T^{-1}.$$

IV. Anwendung der relationes inter functiones contiguas.

Die Eintragung der P-Functionen zur Gewinnung von λ im rationalen Falle gestaltet sich nun besonders einfach, da alle cogredienten φ, ψ in $z = \frac{\varphi}{\psi}$ mit η_1, η_2, $-\frac{\partial f}{\partial \eta_2}$, $\frac{\partial f}{\partial \eta_1}$ und desgleichen alle contragredienten φ, ψ mit Θ_1, Θ_2, H_1, H_2 contigue P-Functionen sind.

Was zunächst den cogredienten Fall angeht, so kann man die P-Function, durch welche sich η_1, η_2 ausdrücken, durch Multiplication mit einem geeigneten Factor $Z^{\delta}(1-Z)^{\varepsilon}$ auf die Form bringen:

$$P\left\{\begin{matrix} 0, & \frac{31}{60}, & 0 \\ -\frac{1}{3}, & \frac{19}{60}, & \frac{1}{2} \end{matrix}\; Z\right\}.$$

Die P-Functionen für alle cogredienten φ, ψ werden sich dann allgemein schreiben lassen:

$$P\left\{\begin{matrix} 0, & \frac{31}{60}+m, & 0 \\ -\frac{1}{3}+l, & \frac{19}{60}+n, & \frac{1}{2}+p \end{matrix}\quad z\right\},$$

wo die ganzen Zahlen l, m, n, p der Relation $l+m+n+p=0$ genügen; so hat man z. B. zur Darstellung von $-\frac{\partial f}{\partial \eta_2}, \frac{\partial f}{\partial \eta_1}$ die Function:

$$P\left\{\begin{matrix} 0, & \frac{31}{60}, & 0 \\ -\frac{1}{3}+1, & \frac{19}{60}, & \frac{1}{2}-1 \end{matrix}\quad z\right\}.$$

Aus diesem Grunde besteht zwischen je drei φ und ebenso drei ψ im cogredienten Falle eine lineare Relation, die relatio inter functiones contiguas.

Dasselbe Resultat erhalten wir für den contragredienten Fall. Θ_1, Θ_2 gehören zu

$$P\left\{\begin{matrix} 0, & \frac{37}{60}, & 0 \\ -\frac{1}{3}, & \frac{13}{60}, & \frac{1}{2} \end{matrix}\quad z\right\},$$

H_1, H_2 zu

$$P\left\{\begin{matrix} 0, & \frac{37}{60}, & 0 \\ -\frac{1}{3}, & \frac{13}{60}+1, & \frac{1}{2}-1 \end{matrix}\quad z\right\},$$

während alle anderen φ, ψ im contragredienten Falle sich durch eine Function der Form

$$P\left\{\begin{matrix} 0, & \frac{37}{60}+m, & 0 \\ -\frac{1}{3}+l, & \frac{13}{60}+n, & \frac{1}{2}+p \end{matrix}\quad z\right\},$$

wo wieder $l+m+n+p=0$, ausdrücken werden; demnach besteht also auch hier zwischen je drei φ und ebenso zwischen je drei ψ eine Relation der genannten Art.

Damit ist nun unsere Untersuchung an eine fertige Theorie, an die Theorie der relationes inter functiones contiguas, ange-

schlossen, welche zuerst *Gauss* *) für die hypergeometrischen Reihen schuf, und die dann später von *Riemann* **) für die *P*-Functionen in systematischer Weise entwickelt wurde.

Wollte man alle Functionen $r(\eta)$ mit Hülfe der Functionaldeterminante berechnen, so würden sich bald bedeutende Schwierigkeiten einstellen, in Folge der grossen Anzahl und des hohen Grades der Bedingungsgleichungen für die Constanten. Dieser Weg ist nur so lange von relativ einfacher Natur, so lange der Grad von λ in Z kleiner als 2 ist. Bei der Berechnung der λ von höherem Grade treten dann die relationes inter functiones contiguas in ihr Recht ein; natürlich kann man auch die oben angeführten, einfacheren Beispiele mit Hülfe derselben ableiten.

---

*) *Gauss:* Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \text{etc.},$$

Werke, Bd. III, pag. 125.

**) *Riemann:* Ges. Werke, pag. 74.

SITZUNG AM 31. JULI 1884.

Friedrich Engel, *Ueber die Abel'schen Relationen für die Theilwerthe der elliptischen Functionen.* (Vorgelegt von Prof. *Klein.*)

Schon bei Abel*) finden sich lineare Identitäten zwischen den Einheitswurzeln und den Wurzeln der speciellen Theilungsgleichung der elliptischen Functionen d. h. derjenigen Gleichung, welche die zu rationalen Theilen der Perioden gehörigen Functionswerthe bestimmt.

Freilich gibt Abel diese Identitäten, welche wir kurz als die »Abel'schen Relationen« bezeichnen werden, noch nicht in definitiver Gestalt. Sein grosses Theorem lieferte ihm zwar die Existenz solcher Relationen, reichte aber nicht aus, um die auftretenden Einheitswurzeln vollständig zu bestimmen. Abel's Andeutungen führte Sylow im Jahre 1864 aus, er bestimmte die betreffenden Einheitswurzeln und gab zwei Beweise für die Relationen. Später (1871) benutzte er dieselben, um die bis dahin noch nicht bestimmte Galois'sche Gruppe der Theilungsgleichung abzuleiten**).

Schliesslich gab Kronecker, als er im Jahre 1875, ohne Sylow's Resultate zu kennen, die Gruppe der Theilungsgleichung behandelte***), auch einen Beweis für die Abel'schen Relationen und deutete noch verschiedene Wege an, auf denen man zu denselben gelangen könne. —

---

*) Oeuvres complètes. 2. Ausg. Bd. I p. 523; II p. 251.

**) Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger: 1864 p. 68 ff. und 1871 p. 418 ff.

***) Berliner Monatsberichte von 1875 p. 498 ff. Kronecker's Beweis findet sich auch in den Noten zu Abel's Oeuvres complètes Bd. II p. 315. cf. auch Berliner Monatsberichte von 1876 p. 242, wo Kronecker sich über das Verhältniss seiner Untersuchungen zu denen Sylow's ausspricht.

Alle diese Untersuchungen beschäftigen sich nur mit sin am v, cos am v u. s. w., also nur mit solchen Functionen, welche bloss bei gewissen nicht bei allen linearen Transformationen der Perioden ungeändert bleiben. Dagegen werden die Weierstrass'schen $p(u)$ und $p'(u)$, welche bei allen solchen Transformationen invariant bleiben, gar nicht berücksichtigt.

Eine andere Bemerkung ist die folgende. Es hat zwar Sylow die Abel'schen Relationen in ihrer allgemeinsten Form aufgestellt, doch geht er ebensowenig wie Kronecker auf die Frage ein, wie viele von einander unabhängige Gleichungen durch diese Relationen dargestellt werden, oder, was dasselbe ist, wie viele von den Wurzeln der Theilungsgleichung unter Adjunction der Einheitswurzeln von einander linear unabhängig sind.

Mit diesen beiden Punkten, welche anscheinend bisher noch keine Behandlung gefunden haben, beschäftigt sich die folgende Mittheilung. Dieselbe behandelt also die Aufgabe, einerseits die Abel'schen Relationen für $p(u)$ und $p'(u)$ aufzustellen, andererseits das System dieser Relationen näher zu untersuchen.

§ 1.

Durch die Anwendung von Reihenentwickelungen finden Sylow und Kronecker die Abel'schen Relationen zunächst in der Form:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ab} \,.\, \sin\mathrm{am}\left(\frac{4a\,.\,\Omega_1 + 2b\,.\,\Omega_2}{n}, \varkappa\right) = 0 \;, \quad . \quad . \quad 1)$$

wo $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, n eine ungerade Zahl, b eine der Zahlen 0, 1 bis $n-1$, endlich $4\,\Omega_1$ und $2\,\Omega_2$ irgend zwei primitive Perioden der Function sin am$(v, \varkappa)$ bedeuten.

$4\,\Omega_1$ und $2\,\Omega_2$ hängen mit den bekannten Grössen K und K' durch die Gleichungen zusammen:

$$\begin{cases} 4\,\Omega_1 = \alpha\,.\,4K + \beta\,.\,2iK' \\ 2\,\Omega_2 = \gamma\,.\,4K + \delta\,.\,2iK' \end{cases} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \;, \quad . \quad . \quad 2)$$

wobei:

$$\alpha \equiv 1 \;, \qquad \beta \equiv 2\gamma \equiv 0 \;, \qquad 2\delta \equiv 2 \bmod. 4 \;. \quad . \;2a)$$

sin am$(v, \varkappa)$ bleibt bei allen linearen Substitutionen von der

Form 2), 2a) invariant. Da diese Substitutionen durch Congruenzen mod. 4 definirt sind, können wir $\sin\mathrm{am}(v, \varkappa)$ als Modulfunction oder kurz als Function vierter Stufe bezeichnen. Dagegen sind $p(u)$, $p'(u)$ Functionen erster Stufe.

Wenden wir auf die Function $\sin\mathrm{am}\, v$ eine ganz beliebige Substitution 2) an, bei welcher sie nicht invariant bleibt, so multiplicirt sie sich entweder mit einem constanten Factor oder geht über in: $\frac{\sin\mathrm{am}\, v}{\cos\mathrm{am}\, v}$, $\frac{\sin\mathrm{am}\, v}{\Delta\mathrm{am}\, v}$. Für diese beiden Functionen erhalten wir daher aus 4) durch Anwendung der betreffenden linearen Substitutionen genau analoge Identitäten.

Diese Bemerkung giebt uns ein Mittel an die Hand, unser erstes Ziel zu erreichen. Wir brauchen uns bloss zu vergegenwärtigen, dass jede symmetrische Verbindung, also auch die Summe aller Werthe, welche eine Function m-ter Stufe vermöge aller linearen Transformationen der Perioden annimmt, eine Function erster Stufe liefert. Wollen wir dieses Princip anwenden, so müssen wir zunächst $\sin\mathrm{am}\, v$ rational durch $p(u)$ und $p'(u)$ ausdrücken.

ω_1, ω_2 seien irgend zwei primitive Perioden von $p(u)$: ω_λ, ω_μ, ω_ν seien drei aufeianderfolgende Perioden des Cyklus: ω_1, $\omega_1 + \omega_2$, ω_2; $p\left(\frac{\omega_\lambda}{2}\right) = e_\lambda$.

Soll $\sin\mathrm{am}(v, \varkappa)$ rational durch $p(u)$ und $p'(u)$ ausdrückbar sein, so müssen nothwendig ω_1 und ω_2 so gewählt werden können, dass $4K = c.\omega_1$, $2iK' = c.\omega_2$ und $v = c.u$ wird.

$\sin\mathrm{am}(v, \varkappa)$ wird aber:

einfach Null bei: $v = 0,\ 2K$,
einfach unendlich bei: $v = iK',\ 2K + iK'$.

Andererseits wird $\frac{p(u) - e_1}{p'(u)} = \varphi_1(u)$:

einfach Null bei: $u = 0,\ \frac{\omega_1}{2}$,
einfach unendlich bei: $u = \frac{\omega_2}{2},\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

Also können sich $\varphi_1(u)$ und $\sin\mathrm{am}(v, \varkappa)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden:

$$\sin\mathrm{am}(v, \varkappa) = C.\varphi_1(u) .$$

Dividiren wir mit u und gehen zur Grenze für $u = 0$ über, so kommt:

$$c = -\frac{C}{2},$$

mithin:

$$\sin\operatorname{am}(c\,.\,u\,,\,x) = -2c\,.\,\varphi_1(u)\,.$$

Betrachten wir allgemein:

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{p(u) - e_\lambda}{p'(u)},$$

so haben wir:

$$\begin{cases}\sin\operatorname{am}(c_\lambda\,.\,u\,,\,x_\lambda) = -2c_\lambda\,.\,\varphi_\lambda(u) \\ 4K_\lambda = c_\lambda\,.\,\omega_\lambda \qquad 2iK_\lambda' = c_\lambda\,.\,\omega_\mu\,,\end{cases} \quad \ldots \quad 3)$$

unter K_λ, K_λ' die zu x_λ gehörigen Integrale verstanden.

$\varphi_\lambda(u)$ ist hier eine Function zweiter Stufe, sie bleibt invariant bei allen Transformationen der Perioden, welche e_λ invariant lassen. Ihre primitiven Perioden haben daher die Form:

$$\begin{cases}\varpi_\lambda = \alpha\omega_\lambda + \beta\,\omega_\mu \\ \varpi_\mu = \gamma\,\omega_\lambda + \delta\,\omega_\mu\end{cases} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,, \quad . \; . \; . \quad 4)$$

mit der Bedingung: $\beta \equiv 0 \text{ mod. } 2$.

Aus 1) ergiebt sich zunächst:

$$\sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ab}\varphi_\lambda\left(\frac{a\varpi_\lambda + b\varpi_\mu}{n}\right) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, 3)\,, \; . \; . \quad 5)$$

wo α, β, γ, δ den in $2a$) angegebenen Bedingungen mod. 4 genügen müssen. Beachten wir aber, dass $\varphi_\lambda(u)$ bei allen Substitutionen 4), in denen $\beta \equiv 0$ mod. 2 ist, sich nicht ändert und wenden dieselben auf die Gleichungen 5) an, so überzeugen wir uns sofort, dass 5) auch mit der einzigen Beschränkung $\beta \equiv 0$ mod. 2 gültig bleibt.

Allerdings haben wir jetzt nach dem oben angedeuteten Principe:

$$\begin{cases}\frac{1}{3}\{\varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \varphi_3(u)\} = \dfrac{p(u)}{p'(u)} \\ 2\{e_1\,.\,\varphi_1(u) + e_2\,.\,\varphi_2(u) + e_3\,.\,\varphi_3(u)\} = -\dfrac{g_2}{p'(u)}\,,\end{cases} \quad 6)$$

allein wir können von diesen Formeln noch keinen Gebrauch machen, weil in 5) die Argumente der φ_λ von dem Index λ abhängig sind.

Um diese Beschränkung zu beseitigen, bemerken wir, dass mit 5) zugleich auch die Gleichung:

$$\sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ab}\,.\,\varphi_\lambda\left[\frac{a(\varpi_\lambda + \varrho\,.\,n\,.\,\varpi_\mu) + b(\varpi_\mu + \tau\,.\,\varpi_\lambda)}{n}\right] = 0$$

stattfindet. Die linken Seiten beider Gleichungen unterscheiden sich nämlich nur durch den Factor: $\varepsilon^{-2b^2.\tau}$.

Unsere Gleichung 5) fand ursprünglich statt im Falle $\beta \equiv 0$, also für:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \equiv 1\,, & \beta \equiv 0\,, & \gamma \equiv 1\,, & \delta \equiv 1 \\ \alpha \equiv 1\,, & \beta \equiv 0\,, & \gamma \equiv 0\,, & \delta \equiv 1 \end{Bmatrix} \text{mod.} 2\,.$$

Wählen wir jetzt $\tau = 0$, ϱ ungerade und setzen:

$$\varpi_\lambda' = \varpi_\lambda + \varrho\,.\,n\,.\,\varpi_\mu\,, \qquad \varpi_\mu' = \varpi_\mu\,,$$

so finden wir, dass 5) auch gilt, falls:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \equiv 0\,, & \beta \equiv 1\,, & \gamma \equiv 1\,, & \delta \equiv 1 \\ \alpha \equiv 1\,, & \beta \equiv 1\,, & \gamma \equiv 0\,, & \delta \equiv 1 \end{Bmatrix} \text{mod.} 2\,.$$

Wählen wir andererseits $\varrho = 0$, τ ungerade und setzen:

$$\varpi_\lambda' = \omega_\lambda\,, \qquad \varpi_\mu' = \varpi_\mu + \tau\,.\,\varpi_\lambda\,,$$

so ergiebt sich aus den eben gefundenen Bedingungen für α, β, γ, δ, dass 5) auch bestehen bleibt, wenn:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \equiv 0\,, & \beta \equiv 1\,, & \gamma \equiv 1\,, & \delta \equiv 0 \\ \alpha \equiv 1\,, & \beta \equiv 1\,, & \gamma \equiv 1\,, & \delta \equiv 0 \end{Bmatrix} \text{mod.} 2\,.$$

Damit sind alle Möglichkeiten, welche mod. 2 bei den Zahlen α, β, γ, δ eintreten können, erschöpft und wir sehen, dass in den Gleichungen 4) und 5) α, β, γ, δ alle mit der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ verträglichen Werthe annehmen können. Dann bedeuten aber ϖ_λ und ϖ_μ offenbar zwei beliebige primitive Perioden von $p(u)$ und es ist:

$$7) \quad \begin{cases} \sum\limits_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ab}\,.\,\varphi_\lambda\left(\dfrac{a\varpi_1 + b\varpi_2}{n}\right) = 0 \quad (\lambda = 1\,,\, 2\,,\, 3) \\ \varpi_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2\,, \qquad \varpi_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,. \end{cases}$$

Jetzt haben wir in allen unsern Gleichungen 7) von dem Index λ unabhängige Argumente. Wir können daher aus 7) vermöge der Gleichungen 6) die gewünschten Relationen für die Functionen erster Stufe zusammensetzen.

Dieselben stellen sich dar, wie folgt:

$$8) \quad \sum_0^{n-1}{}_a \frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(\dfrac{a\varpi_1 + b\varpi_2}{n}\right)} = 0\,, \qquad \sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ab}\,.\, \frac{p\left(\dfrac{a\varpi_1 + b\varpi_2}{n}\right)}{p'\left(\dfrac{a\varpi_1 + b\varpi_2}{n}\right)} = 0\,.$$

Diess kurz der Gedankengang, welcher mich zuerst zu den Gleichungen 8) geführt hat. Er war zwar einfach genug, aber insofern unbefriedigend, als er die Functionen erster Stufe $p(u)$, $p'(u)$ gewissermassen als secundär gegenüber $\sin am\, u$ u. s. w. erscheinen liess. Ein direkter Beweis der Abel'schen Relationen 8) blieb daher immer noch wünschenswerth. Einen solchen hat seitdem Herr Professor Klein im Juli dieses Jahres in seiner Vorlesung über elliptische Functionen vorgetragen und er hat mir gestattet, denselben hier zu reproduciren, was in etwas erweiterter Form geschehen soll.

§ 2.

Wir bezeichnen durch $Z(u)$ das elliptische Integral zweiter Gattung: $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ und wie früher durch ϖ_1, ϖ_2, so jetzt kurz durch ω_1, ω_2 zwei ganz beliebige primitive Perioden von $p(u)$. Die Functionen $\frac{1}{p'(u)}$ und $\frac{p(u)}{p'(u)}$ werden im Periodenparallelogramm (ω_1, ω_2) beide an den drei Stellen: $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_3}{2} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ je einfach unendlich. Sie lassen sich daher in der Form darstellen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{p'(u)} &= \sum_1^3{}^{\lambda} c_\lambda \,.\, Z\left(u - \frac{\omega_\lambda}{2}\right) + c_4 \\ \frac{p(u)}{p'(u)} &= \sum_1^3{}^{\lambda} C_\lambda \,.\, Z\left(u - \frac{\omega_\lambda}{2}\right) + C_4 \,, \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

wobei die Constanten c_λ und C_λ noch den Bedingungen:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \;, \qquad C_1 + C_2 + C_3 = 0 \quad . \quad . \quad 10)$$

genügen müssen.

Wir wollen c_λ und C_λ wirklich berechnen, wenn auch ihre Werthe im Folgenden nicht in Betracht kommen. Nach dem Additionstheorem der Function $Z(u)$ ist:

$$Z(u - v) = Z(u) - Z(v) + \frac{1}{2} \cdot \frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)} \,,$$

also:

$$Z\left(u - \frac{\omega_\lambda}{2}\right) = Z(u) - Z\left(\frac{\omega_\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{p'(u)}{p(u) - e_\lambda} \,.$$

$$Z\left(\frac{\omega_\lambda}{2}\right) = \frac{\eta_\lambda}{2} \,,$$

mithin ergiebt sich:

$$\frac{1}{p'(u)} = c_1 - \frac{1}{2} \cdot \sum_1^3{}_\lambda c_\lambda \cdot \eta_\lambda + \frac{p'(u)}{2} \cdot \sum_1^3{}_\lambda \frac{c_\lambda}{p(u) - e_\lambda} \, .$$

Da $p'^2 = 4 . (p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)$ und $p'(u)$ eine ungerade Function ist, erhalten wir:

$$2 c_1 = \sum_1^3{}_\lambda c_\lambda \cdot \eta_\lambda \, ,$$

wobei $\eta_3 = \eta_1 + \eta_2$, und:

$$1 = 2 . \sum_1^3{}_\lambda c_\lambda \cdot [p(u) - e_\mu] \cdot [p(u) - e_\nu] \, .$$

Diese Gleichung zerfällt in die folgenden drei:

10 a) . . $\begin{cases} \sum_1^3{}_\lambda c_\lambda = 0 \, , \qquad \sum_1^3{}_\lambda c_\lambda \cdot e_\lambda = 0 \\ \sum_1^3{}_\lambda c_\lambda \cdot e_\mu \cdot e_\nu = \frac{1}{2} \, . \end{cases}$

Entsprechend wird:

10 b) . . $\begin{cases} \sum_1^3{}_\lambda C_\lambda = 0 \, , \qquad \sum_1^3{}_\lambda C_\lambda \cdot e_\lambda = \frac{1}{2} \\ \sum_1^3{}_\lambda C_\lambda \cdot e_\mu \cdot e_\nu = 0 \, . \end{cases}$

Setzen wir für die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 e_3 & e_3 e_1 & e_1 e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \end{vmatrix} ,$$

deren Quadrat $= \frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2) = \frac{\varDelta}{16}$ ist, kurz $\frac{1}{4}\sqrt{\varDelta}$, so wird:

10 c) $\begin{cases} c_\lambda = \frac{2(e_\mu - e_\nu)}{\sqrt{\varDelta}} \, , \qquad C_\lambda = \frac{2 e_\lambda (e_\mu - e_\nu)}{\sqrt{\varDelta}} \quad (\lambda = 1, 2, 3) \\ c_1 = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_\lambda c_\lambda \cdot \eta_\lambda \, , \qquad C_1 = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_\lambda C_\lambda \cdot \eta_\lambda \, . \end{cases}$

Da $p'(u)$ eine ungerade Function ist, sind für $b = 0$ die Relationen 8) evident. Bei der Betrachtung des Ausdruckes:

$$\sum_0^{n-1}{}_a \frac{\varepsilon^{\mu a}}{p'\left(u+\frac{a\omega_1}{n}\right)}$$

können wir daher den Fall $\mu \equiv 0 \bmod. n$ ausschliessen und erhalten:

$$\sum_0^{n-1}{}_a \frac{\varepsilon^{\mu a}}{p'\left(u+\frac{a\omega_1}{n}\right)} = \sum_1^3{}_\lambda c_\lambda \cdot \sum_0^{n-1}{}_a \varepsilon^{\mu a} . Z\left(u+\frac{a\omega_1}{n}-\frac{\omega_\lambda}{2}\right) .$$

Das Glied $\sum_0^{n-1}{}_a \varepsilon^{\mu a} . c_4$ ist weggefallen, da $\sum_0^{n-1}{}_a \varepsilon^{\mu a}$ bei der gemachten Voraussetzung verschwindet. n ist vorläufig beliebig, also nicht nothwendig ungerade.

Für die Function $\frac{p(u)}{p'(u)}$ treten nur die C_λ an die Stelle der c_λ, so können wir uns auf die Betrachtung von $\frac{1}{p'(u)}$ beschränken.

Wir benutzen jetzt eine für $\sin am\, u$ bereits von Jacobi*) aufgestellte Formel, welche auch von Kronecker l. c. erwähnt wird. Dieselbe findet sich in der für unsern Zweck geeigneten Gestalt bei Kiepert im Crelle'schen Journal Bd. 76 p. 37 u. 38. Wir schreiben sie folgendermassen:

$$\sum_0^{n-1}{}_a \varepsilon^{a\mu} . Z\left(u+\frac{a\omega_1}{n}\right) = \frac{\bar{\eta}_1}{1-\varepsilon^{-\mu}} - \frac{e^{\frac{\mu \cdot \bar{\eta}_2 \cdot u}{n}} . \sigma\left(u-\frac{\mu\omega_2}{n} \Big| \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma\left(\frac{\mu\omega_2}{n} \Big| \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) . \sigma\left(u \Big| \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} \quad 11)$$

Hierbei ist:

$$\bar{\eta}_1 = \eta_1\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right), \qquad \bar{\eta}_2 = \eta_2\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right).$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\sum_0^{a-1}{}_a \varepsilon^{a\mu} . Z\left(u+\frac{a\omega_1}{n}-\frac{\omega_\lambda}{2}\right) = S_\lambda(u) ,$$

so wird:

$$\sum_0^{n-1}{}_a \frac{\varepsilon^{\mu a}}{p'\left(u+\frac{a\omega_1}{n}\right)} = \sum_1^3{}_\lambda c_\lambda . S_\lambda(u) , \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

---

*) Jacobi's sämmtliche Werke Bd. I p. 272.

$$S_\lambda(u) = \frac{\eta_1}{1-\varepsilon^{-\mu}} - \frac{e^{\frac{\mu.\eta_2}{n}\left(u-\frac{\omega_\lambda}{2}\right)}.\,\sigma\left(u-\frac{\mu\omega_2}{n}-\frac{\omega_\lambda}{2}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_2\right)}{\sigma\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_2\right).\,\sigma\left(u-\frac{\omega_\lambda}{2}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_2\right)}\,.$$

In dem Ausdruck für $S_\lambda(u)$ ist von λ abhängig bloss der Factor:

$$F_\lambda(u) = \frac{e^{-\frac{\mu.\eta_2.\omega_\lambda}{2n}}.\,\sigma\left(u-\frac{\mu\omega_2}{n}-\frac{\omega_\lambda}{2}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_2\right)}{\sigma\left(u-\frac{\omega_\lambda}{2}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_2\right)}\,.$$

Wird dieser für einen von λ unabhängigen Werth $\bar{u}$ des Argumentes u selbst von λ unabhängig und also:

$$F_1(\bar{u}) = F_2(\bar{u}) = F_3(\bar{u})\,,$$

so bekommen wir:

$$S_1(\bar{u}) = S_2(\bar{u}) = S_3(\bar{u}) = S$$

und:

$$\sum_0^{n-1}{}_a \frac{\varepsilon^{a\mu}}{p'\left(\bar{u}+\frac{a\omega_1}{n}\right)} = 0\,, \qquad \sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{a\mu}.\frac{p\left(\bar{u}+\frac{a\omega_1}{n}\right)}{p'\left(\bar{u}+\frac{a\omega_1}{n}\right)} = 0\,.$$

Der angegebene Fall wird eintreten können, wenn die beiden σ-Functionen in Zähler und Nenner von $F_\lambda(u)$ sich nur durch einen geeigneten Exponentialfactor unterscheiden, also wenn ihre Argumente um ganze Perioden verschieden sind. Denn die σ-Function reproducirt sich immer dann bis auf einen Exponentialfactor, wenn ihr Argument um eine ganze Periode wächst. Auf diese Weise resultirt für u die Bedingung:

$$u - \frac{\mu.\omega_2}{n} - \frac{\omega_\lambda}{2} \equiv \pm\left(u-\frac{\omega_\lambda}{2}\right) \text{ mod. } \left(\frac{\omega_1}{n},\,\omega_2\right)\,.$$

Wählen wir das obere Zeichen, so kommt: $\mu \equiv 0 \text{ mod.} n$, was ausgeschlossen ist. Wählen wir das untere, so wird:

$$u = \frac{\mu.\omega_2}{2n} + \frac{\varrho.\omega_1}{n} + \tau.\omega_2 + \frac{\vartheta.\varpi_\alpha}{2}\,,$$

wo ϖ_α eine der drei Perioden: $\frac{\omega_1}{n}$, ω_2, $\frac{\omega_1}{n}+\omega_2$ von $\sigma\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_2\right)$ bedeutet und ϑ von λ unabhängig sein muss. ϱ und τ können wir ohne Beschränkung $= 0$ setzen, denn:

$$S_\lambda\left(u+\frac{\varrho\omega_1}{n}+\tau\omega_2\right) = \varepsilon^{-\varrho.\mu}.\,S_\lambda(u)\,,$$

wie aus den Gleichungen:

$$Z(u + \tau . \omega_2) = Z(u) + \tau . \eta_2$$

und:

$$\sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{\mu a} . Z\left(u + \frac{(a+\varrho)\,\omega_1}{n}\right) = \varepsilon^{-\varrho\mu} . \sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{\mu a} . Z\left(u + \frac{a\,\omega_1}{n}\right)$$

mit Leichtigkeit folgt. τ hat also gar keinen Einfluss; ϱ multiplicirt S_λ nur mit einer von λ unabhängigen Einheitswurzel, die auch nicht in Betracht kommt. Es folgt daher:

$$F_\lambda\left(\frac{\mu\,\omega_2}{n} + \frac{\vartheta\,\varpi_a}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{\mu.\bar{\eta}_2.\omega_\lambda}{2n}} . \sigma\left(\frac{\mu\,\omega_2}{2n} + \frac{\vartheta\,\varpi_a}{2} + \frac{\omega_\lambda}{2} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma\left(\frac{\mu\,\omega_2}{2n} + \frac{\vartheta\,\varpi_a}{2} - \frac{\omega_\lambda}{2} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} .$$

Jetzt müssen die Fälle $\lambda = 1, 2, 3$ getrennt behandelt werden. Man findet:

$$\frac{\sigma\left(u + \frac{\omega_1}{n} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} = -e^{\bar{\eta}_1\left(u + \frac{\omega_1}{2n}\right)}$$

$$\frac{\sigma\left(u + \omega_1 \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} = (-1)^n . e^{n\bar{\eta}_1\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}$$

$$\frac{\sigma\left(u + \omega_2 \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} = -e^{\bar{\eta}_2\left(u + \frac{\omega_2}{2}\right)}$$

$$\frac{\sigma\left(u + \omega_3 \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} = (-1)^{n+1} . e^{n.\bar{\eta}_1\left(u + \frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right)} . e^{\bar{\eta}_2\left(u + \frac{\omega_2}{2}\right)} .$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $u = \frac{\mu\,\omega_2}{n} + \frac{\vartheta\,\varpi_a}{2} - \frac{\omega_\lambda}{2}$ und multiplicirt sie hierauf mit $e^{-\frac{\mu.\bar{\eta}_2.\omega_\lambda}{2n}}$, so erhält man die F_λ. Man sieht aber bald, dass F_1, F_2, F_3 gleichzeitig nur dann von λ unabhängig werden können, wenn $\vartheta = 0$ ist. Wird aber $\vartheta = 0$, so hat man:

$$F_1\left(\frac{\mu\omega_2}{2n}\right) = (-1)^n . e^{\frac{\mu}{2}\left(\bar{\eta}_1 . \omega_2 - \bar{\eta}_2 . \frac{\omega_1}{n}\right)} = (-1)^{n+\mu}$$

$$F_2\left(\frac{\mu\omega_2}{2n}\right) = -1$$

$$F_3\left(\frac{\mu\omega_2}{2n}\right) = (-1)^{n+1} . e^{\frac{n+\mu}{2} . \left(\bar{\eta}_1 . \omega_2 - \bar{\eta}_2 . \frac{\omega_1}{n}\right)} = (-1)^{2n+1+\mu} =$$
$$= (-1)^{\mu+1} .$$

Dabei ist von der bekannten Relation:

$$\bar{\eta}_1 . \omega_2 - \bar{\eta}_2 . \frac{\omega_1}{n} = \eta_1 . \omega_2 - \eta_2 . \omega_1 = 2\pi i$$

Gebrauch gemacht worden. F_1, F_2 und F_3 können also nur gleich werden, wenn n ungerade, μ aber gerade ist: $\mu = 2b$. Demnach ergiebt sich schliesslich:

$$S_\lambda\left(\frac{b\omega_2}{n}\right) = \sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ab} . Z\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n} - \frac{\omega_\lambda}{2}\right) =$$

$$= \frac{\eta_1}{1 - \varepsilon^{-\mu}} + \frac{e^{\frac{2b^2}{n^2} . \eta_2 . \omega_2}}{\sigma\left(\frac{2b\omega_2}{n} \middle| \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} .$$

Aus den Gleichungen 12) folgen jetzt in der That die Abel'schen Relationen, wie sie in den Gleichungen 8) enthalten sind. Denn ϖ_1, ϖ_2 sind nach unserer Voraussetzung durchaus nicht allgemeiner als ω_1, ω_2.

Bemerkt sei hier noch, dass man die Unabhängigkeit der Grössen $S_\lambda\left(\frac{b\omega_2}{n}\right)$ von λ auch beweisen kann, indem man die

$$\sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ab} . Z\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n} - \frac{\omega_\lambda}{2}\right)$$

durch Reihen nach Potenzen von q ausdrückt. Hier ist auch noch folgende Bemerkung am Platze. Der Ausdruck:

$$\Phi_1(u) = \sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ab} . \varphi_1\left(u + \frac{a\omega_1}{n}\right)$$

hat im Parallelogramme (ω_1, ω_2) gerade $2n$ einfache Unendlichkeitsstellen:

$$u = \frac{\omega_2}{2} + \frac{\alpha\omega_1}{n}, \qquad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\alpha\omega_1}{n} \quad (\alpha = 0, 1 \ldots n - 1)$$

$\Phi_1(u)$ hat natürlich auch $2n$ und nicht mehr Nullstellen, nämlich:

$$u = \frac{b\omega_2}{n} + \frac{a\omega_1}{n}\,, \qquad \frac{\omega_1}{2} + \frac{b\omega_2}{n} + \frac{a\omega_1}{n} \quad (a = 0, 1 \ldots n-1)\,.$$

Jetzt ist aber:

$$\varphi_1(u) = D \cdot \left\{ Z\left(u - \frac{\omega_2}{2}\right) - Z\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right) \right\}\,,$$

wo D eine Constante bedeutet. Also folgt:

$$\Phi_1(u) = D\,.\,\{S_2(u) - S_3(u)\}\,.$$

Fassen wir das Gesagte zusammen, so ergiebt sich, dass $S_2(u)$ und $S_3(u)$ nur für die $2n$ Werthe

$$u = \frac{b\omega_2}{n} + \frac{a\omega_1}{n}\,, \qquad \frac{\omega_1}{2} + \frac{b\omega_2}{n} + \frac{a\omega_1}{n} \quad (a = 0, 1 \ldots n-1)$$

einander gleich werden können. Ueberhaupt zeigt sich, dass $S_1(u)$, $S_2(u)$, $S_3(u)$ nur für die n Werthe:

$$u = \frac{b\omega_2}{n} + \frac{a\omega_1}{n} \quad (a = 0, 1 \ldots n-1)$$

alle drei einander gleich werden können. Da endlich $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$ und $\Phi_3(u)$ ausser diesen n Nullstellen sonst keine gemein haben, verschwinden auch die Ausdrücke:

$$\sum_0^{n-1}{}_a \frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(u + \frac{a\omega_1}{n}\right)} \quad \text{und} \quad \sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ab}\,.\,\frac{p\left(u + \frac{a\omega_1}{n}\right)}{p'\left(u + \frac{a\omega_1}{n}\right)}$$

nur an den n Stellen:

$$u = \frac{b\omega_2}{n} + \frac{a\omega_1}{n} \quad (a = 0, 1 \ldots n-1)$$

zu gleicher Zeit. Die übrigen $2n$ Nullstellen zu bestimmen, welche jeder dieser beiden Ausdrücke besitzt, ist mir bis jetzt noch nicht gelungen.

§ 3.

Nachdem wir so einen direkten Beweis für die Abel'schen Relationen 8) kennen gelernt haben, ergeben sich nunmehr die Relationen für $\varphi_\lambda(u)$, $\sin am\, v$ u. s. w. einfach als Folgen der Gleichungen 8).

Wir gehen jetzt dazu über, festzustellen, wieviel von einander unabhängige unter den Gleichungen 8) vorhanden sind. Dabei beschränken wir uns auf die Relationen zwischen den

$\frac{1}{p'_{a,b}}$, weil für die $\frac{p_{a,b}}{p'_{a,b}}$ genau dasselbe gilt. Ferner beschränken wir uns der Einfachheit wegen auf den Fall, dass die ungerade Zahl n eine Primzahl ist.

Wir bemerken zunächst, dass eine gewisse Verallgemeinerung, welche Sylow noch einführt, nur formal ist. Derselbe zeigt nämlich am Schlusse seiner Abhandlung von 1864, dass allgemein:

$$13) \quad . \quad . \quad \sum_0^{n-1}{}_a \frac{\varepsilon^{2ab(\lambda\varrho-\mu\nu)}}{p'\left(\frac{a(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)+b(\nu\omega_1+\varrho\omega_2)}{n}\right)} = 0 \;,$$

wenn λ, μ, ν, ϱ beliebige ganze Zahlen, jedoch λ und μ nicht beide

$$\text{mod.}\, n \equiv 0$$

sind.

Um zu zeigen, dass die Gleichungen 13) von den Gleichungen 8) nicht wesentlich verschieden sind, bestimmen wir, was unter den gemachten Voraussetzungen immer möglich ist, α, β, γ, δ aus folgenden Bedingungen:

$$\alpha = \lambda \;, \qquad \beta = \mu \;, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \;,$$
$$\gamma \cdot (\lambda\varrho - \mu\nu) \equiv \nu \;, \qquad \delta \cdot (\lambda\varrho - \mu\varrho) \equiv \varrho \,.\, \text{mod.}\, n \;.$$

Schreiben wir ausserdem noch für $b(\lambda\varrho - \mu\nu)$ wieder b, so finden wir:

$$14) \quad \sum_0^{n-1}{}_a \frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(\frac{a(\alpha\omega_1+\beta\omega_2)+b(\gamma\omega_1+\delta\omega_2)}{n}\right)} = 0 \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \;.$$

Das sind aber einfach die Gleichungen 8). In den Gleichungen 14), welche nunmehr zu discutiren bleiben, können wir alle für $b = 0$ sich ergebenden Relationen ersetzen durch die $\frac{n^2-1}{2}$ Gleichungen:

$$15) \quad . \quad . \quad p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right) + p'\left(\frac{-a\omega_1-b\omega_2}{n}\right) = 0 \;.$$

Dieselben folgen ersichtlich daraus, dass $p'(u)$ eine ungerade Function ist.

Besonders nützlich ist für die folgende Discussion die Bemerkung, dass der Ausdruck auf der linken Seite von 14) sich nur mit $\varepsilon^{2b \cdot \tau}$ multiplicirt, also Null bleibt, wenn man von dem

Argumente des $p'(u)$ die Grösse $\tau \cdot \frac{(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)}{n}$ (τ eine beliebige ganze Zahl) abzieht.

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden, jenachdem eine der Zahlen α und β, sagen wir β, $\bmod. n \equiv 0$ oder $\not\equiv 0$ ist.

I. Fall. $\beta \equiv 0 \bmod. n$, also $\alpha\delta \equiv 1$. Wir subtrahiren im Argument $\frac{\tau . \alpha . \omega_1}{n}$ und wählen τ so, dass:

$$b . \gamma - \tau . \alpha \equiv 0 \bmod. n \ .$$

Dann wird:

$$\sum_0^{n-1} \frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(\frac{a\alpha\omega_1 + b\delta\omega_2}{n}\right)} = 0 \ .$$

Für a: $a\delta$, für b: $b . \alpha$ gesetzt giebt:

$$\sum_0^{n-1} \frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n}\right)} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \text{A)}$$

Alle Gleichungen 14), in denen $\mu \equiv 0 \bmod. n$, kommen also auf die Form A) zurück.

II. Fall. $\beta \not\equiv 0 \bmod. n$. Wir können jetzt stets erreichen, dass $\varrho \equiv 0$ wird. Denn subtrahiren wir im Argument: $\frac{\tau(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)}{n}$ und machen $b . \delta - \tau . \beta \equiv 0 \bmod. n$, setzen dann: $b . \gamma - \tau . \alpha = x$, so wird: $\beta . x \equiv -b \bmod. n$, was auch gilt, sobald α oder γ $\bmod. n \equiv 0$ ist. Somit erhalten wir:

$$\sum_0^{n-1} \frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(\frac{a(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) + x . \omega_1}{n}\right)} = 0 \ ,$$

womit wirklich $\varrho \equiv 0$ geworden ist. Schreiben wir jetzt für b: $\beta . b$, für a: $\beta . a$, dagegen wieder für $\beta . a$: a, so kommt:

$$\sum_0^{n-1} \frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(\frac{(a\alpha - b)\omega_1 + a\omega_2}{n}\right)} = 0 \quad . \ . \ . \quad \text{B)}$$

Die Gleichungen A) und B) stellen offenbar nur dann von einander und von den Gleichungen 15) verschiedene Relationen dar, wenn b von $1 \ldots \frac{n-1}{2}$, a von $0 \ldots n-1$ geht. A) und B) zusammen repräsentiren mithin $\frac{n-1}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ oder $\frac{n^2-1}{2}$ Re-

lationen, d. h. ebensoviel als es dem absoluten Werthe nach verschiedene Wurzeln $p'_{a,b}$ giebt. Daraus folgt mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass auch die Gleichungen A), B) noch nicht alle von einander unabhängig sein können.

Es ist in den Gleichungen B) störend, dass ω_1 mit dem zusammengesetzten Ausdruck $a\alpha - b$ multiplicirt ist. Wir müssen daher suchen, aus B) solche Relationen herzuleiten, in denen wie bei A) ω_1 und ω_2 beide nur mit einem Buchstaben multiplicirt erscheinen.

Zu dem Ende multipliciren wir die Gleichungen B) mit ε^{-4sb} und summiren nach b von $0 \dots n-1$. Das giebt:

$$\sum_0^{n-1}{}_a \sum_0^{n-1}{}_b \frac{\varepsilon^{2b(\alpha-2s)}}{p'\left(\frac{(a\alpha-b)\,\omega_1+a\,\omega_2}{n}\right)} = 0 \,.$$

An Stelle von b führen wir das neue Summationszeichen r ein, indem wir die Substitution machen:

$$b \equiv a\alpha - r \text{ mod.} n \,.$$

So erhalten wir:

$$\sum_0^{n-1}{}_a \sum_0^{n-1}{}_r \frac{\varepsilon^{2a(\alpha^2-2\alpha s)} \cdot \varepsilon^{2r(2s-\alpha)}}{p'\left(\frac{r\,\omega_1+a\,\omega_2}{n}\right)} = 0 \,.$$

Jetzt multipliciren wir mit $\varepsilon^{2\alpha(s^2-t^2)}$ und summiren nach α:

$$\sum_0^{n-1}{}_a \sum_0^{n-1}{}_r \frac{\varepsilon^{2r(2s-a)} \cdot \sum_0^{n-1}{}_\alpha\, \varepsilon^{2\alpha\{(\alpha-s)^2-t^2\}}}{p'\left(\frac{r\,\omega_1+a\,\omega_2}{n}\right)} = 0 \,.$$

Die Summation nach α können wir ausführen, denn

$$\sum_0^{n-1}{}_\alpha\, \varepsilon^{2\alpha\{(a-s)^2-t^2\}}$$

ist nur dann $\gtrless 0$ und zwar $= n$, wenn: $a \equiv s \pm t \text{ mod.} n$. Auf diese Weise behalten wir nur eine einfache Summe übrig, nämlich:

$$\sum_0^{n-1}{}_r \left\{ \frac{\varepsilon^{2r(s-t)}}{p'\left(\frac{r\,\omega_1+(s+t)\,\omega_2}{n}\right)} + \frac{\varepsilon^{2r(s+t)}}{p'\left(\frac{r\,\omega_1+(s-t)\,\omega_2}{n}\right)} \right\} = 0 \,.$$

Für $s-t$ und $s+t$ schreiben wir bezüglich b und c, ersetzen schliesslich noch r durch a und haben:

$$\sum_0^{n-1}{}_a\left\{\frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(\frac{a\omega_1+c\omega_2}{n}\right)}+\frac{\varepsilon^{2ac}}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}\right\}=0 \quad . \quad . \quad 16)$$

Setzen wir $b = c$, so ergeben sich offenbar die Gleichungen A), welche somit als direkte Folge der Gleichungen B) dargestellt sind. Setzen wir $c = 0$, so kommt:

$$\sum_0^{n-1}{}_a\left\{\frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(\frac{a\omega_1}{n}\right)}+\frac{1}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}\right\}=0\ ,$$

was sich auch schreiben lässt:

$$\sum_0^{n-1}{}_a\left\{\frac{\varepsilon^{-2ab}}{p'\left(\frac{a\omega_1}{n}\right)}-\frac{1}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}\right\}=0\ .$$

Wegen $\varepsilon^{2ab}-\varepsilon^{-2ab}=2i\,.\sin\frac{4ab\pi}{n}$ ziehen wir hieraus:

$$\sum_0^{n-1}{}_a\frac{\sin\frac{4ab\pi}{n}}{p'\left(\frac{a\omega_1}{n}\right)}=i\,.\sum_0^{n-1}{}_a\frac{1}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}\ .$$

Diese Formel entspricht genau der ersten der beiden Formeln, welche Kronecker in seiner Abhandlung (Berliner Monatsberichte von 1875 p. 500) mit Ia bezeichnet hat.

Nachdem wir die Gleichungen 16) aus B) abgeleitet haben, werden wir fragen müssen, ob 16) auch mit B) vollständig äquivalent ist. Um dies nachzuweisen, multipliciren wir 16) mit $\varepsilon^{-2b(c\alpha-\beta)}$ und summiren nach b. Das giebt:

$$0=\sum_0^{n-1}{}_a\sum_0^{n-1}{}_b\left\{\frac{\varepsilon^{2b(a-c\alpha+\beta)}}{p'\left(\frac{a\omega_1+c\omega_2}{n}\right)}+\frac{\varepsilon^{2c(a-b\alpha)+2b\beta}}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}\right\}\ .$$

Im ersten Theil bleiben nur die Glieder $a\equiv c\alpha-\beta$ mod. n übrig, für welche $\sum_0^{n-1}{}_b\,\varepsilon^{2b(a-c\alpha+\beta)}$ nicht $=0$, sondern $=n$ wird; es resultirt mithin:

$$0=\frac{n}{p'\left(\frac{(c\alpha-\beta)\,\omega_1+c\omega_2}{n}\right)}+\sum_0^{n-1}{}_a\sum_0^{n-1}{}_b\frac{\varepsilon^{2c(a-b\alpha)+2b\beta}}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}\ .$$

Jetzt multipliciren wir mit $\varepsilon^{2c\beta}$ und summiren nach c, so wird:

$$0 = n \cdot \sum_{0}^{n-1}{}_{c} \frac{\varepsilon^{2c\beta}}{p'\left(\frac{(c\alpha-\beta)\omega_1+c\omega_2}{n}\right)} + \sum_{0}^{n-1}{}_{a}\sum_{0}^{n-1}{}_{b} \frac{\varepsilon^{2b\beta}\sum_{0}^{n-1}{}_{c}\,\varepsilon^{2c(a-b\alpha+\beta)}}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)} \cdot$$

Im zweiten Theil behalten wir nur die Glieder: $a \equiv b\alpha-\beta$ übrig, für welche $\sum_{0}^{n-1}{}_{c}\,\varepsilon^{2c(a-b\alpha+\beta)} = n$ wird. Ziehen wir Alles zusammen, so erhalten wir:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{c} \frac{\varepsilon^{2\beta c}}{p'\left(\frac{(c\alpha-\beta)\omega_1+c\omega_2}{n}\right)} = 0 ,$$

was genau die Gleichungen B) sind.

Das Gleichungssystem B) kann folglich durch das System 16) ersetzt werden. Ersetzen wir in 16) b und c bezüglich durch $-b$ und $-c$, so brauchen wir nur noch für r $-r$ zu schreiben, um uns zu überzeugen, dass vermöge 15) die Gleichungen 16) wieder in sich übergehen. Lassen wir daher b bis $n-1$ wachsen, so darf c nicht $> \frac{n-1}{2}$ werden. Somit können wir die Gleichungen 16) auch folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{0}^{n-1}{}_{a}\left\{\frac{\varepsilon^{2ab}}{p'\left(\frac{a\omega_1+c\omega_2}{n}\right)} + \frac{\varepsilon^{2ac}}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}\right\} = 0 && \alpha) \\ &\sum_{0}^{n-1}{}_{a}\left\{\frac{\varepsilon^{-2ab}}{p'\left(\frac{a\omega_1+c\omega_2}{n}\right)} - \frac{\varepsilon^{-2ac}}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}\right\} = 0 , && \beta) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 17)$$

wo aber jetzt b und c beide nicht $> \frac{n-1}{2}$ werden dürfen.

Ferner sind die Gleichungen 17) i. B. auf b und c symmetrisch; 17β) giebt für $b=c$ nur $0=0$, endlich für $b=0$ oder $c=0$ werden 17α) und 17β) mit einander identisch. Wir erhalten daher aus 17) nur dann lauter von einander und von den Relationen 15) verschiedene Gleichungen, wenn wir:

1) in 17α): $b=0$, $c = 1 \cdot\cdot \frac{n-1}{2}$; $b=c=1 \cdot\cdot \frac{n-1}{2}$,

2) in 17α) und in 17β): $b = 1 \cdot\cdot \frac{n-3}{2}$, $c = b+1 \cdot\cdot \frac{n-1}{2}$

werden lassen. Kurz, wir erhalten $n-1$ Gleichungen vermehrt um die Anzahl aller Combinationen (b, c) mit der Bedingung $b<c$. Das sind aber:

$$n-1+2\cdot\frac{\frac{1}{2}(n-1)\cdot\frac{1}{2}(n-3)}{1\cdot 2}=\frac{n^2-1}{4}\text{ Gleichungen.}$$

Sind dieselben alle von einander unabhängig? Wir schlagen einen indirekten Weg ein, um diess nachzuweisen. Es ist stets möglich, die n^2-1 Grössen $\frac{1}{p'_{a,b}}$ durch die Einheitswurzeln und durch n^2 Grössen $A_{a,b}$ linear auszudrücken. Setzen wir nämlich:

$$A_{a,b}=\sum_{0}^{n-1}{}_{\sigma}\frac{\varepsilon^{2ac}}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}, \quad \dots\dots \quad 19)$$

so wird:

$$\frac{1}{p'\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{n}\right)}=\sum_{1}^{n-1}{}_{\varrho}\,\varepsilon^{-2a\varrho}\,.\,A_{b,\varrho} \quad \dots\dots \quad 20)$$

Für die Grössen $A_{b,c}$ ergeben sich aus den $\frac{3(n^2-1)}{4}$ Gleichungen 15) und 16) folgende $\frac{3(n^2-1)}{4}$ Relationen:

$$\begin{cases}A_{b,c}+A_{-b,-c}=0\\ A_{b,c}+A_{c,b}\ \ =0\end{cases} \quad \dots\dots \quad 21)$$

Diese Relationen sind alle von einander unabhängig. Folglich sind von den $A_{b,c}$ gerade $\frac{n^2-1}{4}$ unabhängig und die Gleichungen 16) bestimmen also die $\frac{1}{p'_{a,b}}$ als lineare Functionen von $\frac{n^2-1}{4}$ unabhängigen Grössen. Daraus folgern wir weiter, dass die Gleichungen 16) von einander unabhängig sind und dass ihre Zahl nicht weiter reducirt werden kann.

Es ist demnach hier das Verhältniss geradeso, wie bei der Multiplicatorgleichung für das Jacobi'sche M oder für $\sqrt[8]{\frac{\bar{\varDelta}}{\varDelta^n}}$ oder $\sqrt[24]{\frac{\bar{\varDelta}}{\varDelta^n}}$ (unter $\bar{\varDelta}$ das transformirte $\varDelta$ bei der Transformation n-ter Ordnung verstanden). Auch die $n+1$ Grössen M oder $\sqrt[8]{\frac{\bar{\varDelta}}{\varDelta^n}}$ lassen sich nämlich vermöge der sogenannten »Jacobi'schen Relationen« gerade aus halb so viel d. h. aus $\frac{n+1}{2}$ Grössen mit Hülfe der Einheitswurzeln linear zusammensetzen.

Genau wie im Vorhergehenden finden wir noch:

$$22) \quad \ldots \frac{p\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n}\right)}{p'\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n}\right)} = \sum_0^{n-1}{}_\varrho\, \varepsilon^{-2a\varrho} . B_{b,\,\varrho}\,,$$

wobei:

$$22a) \quad \ldots \begin{cases} B_{a,\,b} + B_{-a,\,-b} = 0 \\ B_{a,\,b} + B_{b,\,a} \quad = 0 \,. \end{cases}$$

Endlich wird:

$$23) \quad \ldots \; p\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n}\right) = \frac{\sum_0^{n-1}{}_\varrho\, \varepsilon^{-2a\varrho} . B_{b,\,\varrho}}{\sum_0^{n-1}{}_\varrho\, \varepsilon^{-2a\varrho} . A_{b,\,\varrho}} \,.$$

Schliesslich wollen wir noch die Grössen $A_{b,\,c}$ durch $\sigma(u)$ ausdrücken. Die Gleichung 11) zeigt uns dazu unmittelbar den Weg. Es war dort nämlich:

$$11) \quad \sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{a\mu} . Z\left(u + \frac{a\omega_1}{n}\right) = \frac{\eta_1}{1 - \varepsilon^{-\mu}} - \frac{e^{\frac{\mu . \bar\eta_2 . u}{n}} . \sigma\left(u - \frac{\mu\omega_2}{n} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma\left(\frac{\mu\omega_2}{n} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) . \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} \,.$$

Für $\mu = 0$ wird ausserdem:

$$\sum_0^{n-1}{}_a\, Z\left(u + \frac{a\omega_1}{n}\right) = (n-1)\frac{\eta_1}{2} + \frac{\sigma'\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)} + G_1 . u \,,$$

wenn $\sum_1^{n-1}{}_a\, p\left(\frac{a\omega_1}{n}\right) = G_1$ gesetzt wird. Erinnern wir uns jetzt, dass nach 19), 9) und 10c):

$$A_{b,\,c} = \sum_0^{n-1}{}_a \frac{\varepsilon^{2ac}}{p'\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n}\right)} =$$

$$= \sum_1^3{}_\lambda\, c_\lambda . \sum_0^{n-1}{}_a\, \varepsilon^{2ac} . Z\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n} - \frac{\omega_\lambda}{2}\right) \,,$$

$$A_{b,\,0} = \sum_0^{n-1}{}_a \frac{1}{p'\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n}\right)} =$$

$$= \frac{n}{2}\sum_1^3{}_\lambda\, c_\lambda . \eta_\lambda + \sum_1^3{}_\lambda\, c_\lambda . \sum_0^{n-1}{}_a\, Z\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n} - \frac{\omega_\lambda}{2}\right) \,.$$

Wir finden dann, wenn $c \not\equiv 0 \bmod. n$:

$$A_{b,c} = \frac{e^{\frac{2bc}{n^2}\cdot\overline{\eta}_2\cdot\omega_2}}{\sigma\left(\frac{2c\omega_2}{n}\middle|\frac{\omega_1}{n},\omega_2\right)}\cdot\sum_1^3{}^{\lambda} c_\lambda\cdot\frac{e^{-\frac{c\cdot\overline{\eta}_2\cdot\omega\lambda}{n}}\cdot\sigma\left(\frac{(2c-b)\,\omega_2}{n}+\frac{\omega\lambda}{2}\middle|\frac{\omega_1}{n},\omega_2\right)}{\sigma\left(\frac{b\omega_2}{n}-\frac{\omega\lambda}{2}\middle|\frac{\omega_1}{n},\omega_2\right)} \quad 24)$$

und wenn $c \equiv 0 \bmod. n$:

$$A_{b,0} = \sum_1^3{}^{\lambda} c_\lambda\cdot\frac{\sigma'\left(\frac{b\omega_2}{n}-\frac{\omega\lambda}{2}\middle|\frac{\omega_1}{n},\omega_2\right)}{\sigma\left(\frac{b\omega_2}{n}-\frac{\omega\lambda}{2}\middle|\frac{\omega_1}{n},\omega_2\right)}+\frac{1}{2}\cdot\sum_1^3{}^{\lambda} c_\lambda(n.\eta_\lambda - G_1.\omega_\lambda)\,. \quad 25)$$

Die Werthe der $B_{b,\,c}$ gehen aus 24) und 25) hervor, indem bloss c_λ durch C_λ ersetzt wird.

Offenbar sind aus den Gleichungen 24) und 25) die Relationen 21) zwischen den $A_{b,\,c}$ nicht ohne Weiteres ablesbar. Dieser Umstand wird es rechtfertigen, dass wir die Grössen $A_{b,\,c}$ nicht von vornherein durch ihre Ausdrücke 24) und 25) definirt haben, sondern von der allgemeinen Form der Abel'schen Relationen ausgehend die Gleichungen 21) abgeleitet haben. Ja es ergeben sich nunmehr aus 21), 24) und 25) zusammengenommen eine Menge interessanter Relationen, auf welche einzugehen freilich nicht Zweck dieser Mittheilung sein kann. Ein Beispiel mag genügen. $A_{0,\,0} = 0$ giebt:

$$c_1 . n . \overline{\eta}_1 + c_2 . \overline{\eta}_2 + c_3(n\overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2) = \sum_1^3{}^{\lambda} c_\lambda(n\eta_\lambda - G_1\omega_\lambda) \;,$$

was mit den bekannten Relationen:

$$\overline{\eta}_1 = \eta_1 - G_1\cdot\frac{\omega_1}{n} \;, \qquad \overline{\eta}_2 = n\,.\,\eta_2 - G_1\,.\,\omega_2$$

in Einklang steht.

Berichtigungen.

pag. 34 in der Mitte lies; $\omega_1,\ \omega_2,\ -(\omega_1+\omega_2);\ p\left(\frac{\omega\lambda}{2}\right) = e\lambda$.

an Stelle von: $\omega_1,\ \omega_1+\omega_2,\ \omega_2;\ p\left(\frac{\omega\lambda}{2}\right) = e\lambda$.

» 34 Zeile 7 v. u. liess: null statt Null.

» 36 » 13 v. o. » $\varpi'\lambda = \varpi\lambda$, für $\varpi'\lambda = \omega\lambda$,

» 47 » 8 v. u. » diess statt dies.

Karl Rohn, *Ueber Flächen 4. Ordnung mit acht bis sechzehn Knotenpuncten.* Vorgelegt von Prof. Dr. *Klein.*

Einleitung.

Die vorliegende Note hat den Zweck, eine Reihe von Resultaten über die Flächen 4. Ordnung mit Knotenpuncten zur allgemeinen Kenntniss zu bringen. Sie entschlägt sich jedoch vollkommen der Beweise für die gefundenen Sätze, da ich dieselben in einer ausführlichen Arbeit zu publiciren beabsichtige und zwar verbunden mit einer andern Reihe von Vorstellungen und Sätzen, die ich zum grossen Theil jetzt schon besitze, deren endgültige Einführung und Formulirung indess noch einige Verwandlungen durchlaufen dürfte. Eine vorläufige Veröffentlichung schien mir bereits im Interesse der gewonnenen Resultate für angezeigt. Der Hauptgrund dieser Publication ist aber darin zu suchen, dass dieselbe einige Resultate von Herrn *Cayley* berichtigt, welche letztere bereits in das umfassende Werk der *Raumgeometrie von W. Fiedler* übergegangen sind.

Bevor ich mit der Auseinandersetzung dieser Sätze beginne, muss ich der einschlägigen Abhandlungen von Herrn *Cayley* gedenken, die sich *im 3. Bande der Proceedings of the London Mathematical Society* befinden, und als: *First, second and third memoir on Quartic surfaces* betitelt sind. Die *erste* Arbeit behandelt Flächen 4. Ordnung mit 8, 9 und 10 Knotenpuncten. Herr Cayley gelangt bei den Flächen mit 8 und 9 Knotenpuncten zu Sätzen, welche sich unter anderen auch in dieser Note vorfinden. Die Resultate für Flächen mit 10 Knotenpuncten sind jedoch nicht mehr ganz correct; ausserdem bleibt die Frage über das Auftreten des Symmetroides in einem Büschel von Flächen mit 9 gemeinsamen Knotenpuncten (einer der inter-

essantesten Puncte) in ein mystisches Dunkel gehüllt. Die *zweite* Abhandlung zeigt, dass das Symmetroid die Eigenschaft hat, dass der Tangentenkegel aus jedem seiner zehn Knotenpuncte in zwei Kegel 3. Ordnung zerfällt; lässt aber jenes Dunkel unaufgeklärt. In der *dritten* Abhandlung beweist Herr Cayley, dass jede Fläche mit 10 Knotenpuncten, für welche der Tangentenkegel aus nur *einem* Knotenpunct in zwei Kegel 3. Ordnung zerfällt, ein Symmetroid ist. Ausserdem wird eine Methode zur Behandlung von Flächen mit 10 bis 16 Knotenpuncten angegeben. Dieselbe wird für die Fläche mit 16 Knoten, die Fläche mit 15 Knoten, die Fläche mit 14 Knoten und *eine* Fläche mit 13 Knoten durchgeführt. Es sind das jedoch nur Flächen, zu denen bereits früher Herr *Kummer* gelangt war. Für die Behandlung der übrigen Flächen mit 13, 12, 11 und 10 Knotenpuncten scheint jene Methode ungeeignet; jedenfalls haben sich dabei grosse Schwierigkeiten in den Weg gestellt, da ihre Behandlung weder von Herrn Cayley, noch auch von anderer Seite*) durchgeführt ist. Es wird in dieser Abhandlung auch die Existenz einer Fläche mit 13 Knotenpuncten behauptet, deren Tangentenkegel aus jedem Knotenpuncte in drei Kegel 2. Ordnung zerfällt; eine solche Fläche existirt aber nicht, dagegen gibt es eine andere Fläche mit 13 Knotenpuncten. Von den Flächen mit 12 Knotenpuncten werden drei Arten angegeben; es gibt indessen *vier* Arten. Von den Flächen mit 11 resp. 10 Knotenpuncten ist nur je eine Art angegeben.

Ich nenne ferner zwei wichtige Arbeiten von Herrn *Kummer*, die denjenigen von Herrn Cayley vorausgegangen sind. Die erstere behandelt *die algebraischen Strahlensysteme insbesondere der 1. und 2. Ordnung* und findet sich in den *Abhandlungen der Berliner Academie* von 1866 p. 1—120. Hier werden zuerst die Flächen mit 12 bis 16 Knotenpuncten aufgestellt, die sich auch in jenen Abhandlungen von Herrn Cayley wiederfinden. Die zweite behandelt *die Flächen 4. Grades, welche von einer Schaar von Flächen zweiten Grades eingehüllt werden* und ist in den *Monatsberichten der Berliner Academie* von 1872 enthalten.

*) Ich sage damit nicht, dass nicht eine oder die andere Fläche gelegentlich behandelt wurde (vergl. die späteren Anmerkungen); dagegen fehlt eine vollständige Aufstellung aller existirenden Flächen.

Flächen 4. Ordnung mit 8 bis 10 Knotenpuncten*).

Sieben Knotenpuncte einer Fläche 4. Ordnung können beliebig angenommen werden, es gibt dann noch sechsfach unendlich viele Flächen mit den vorgegebenen 7 Knotenpuncten. Soll die Fläche noch einen weiteren, achten Knotenpunct erhalten, so muss derselbe einer Bedingung genügen, wenn anders die Fläche irreducibel sein soll. Es sind dabei noch *zwei verschiedene Fälle* zu unterscheiden.

Ein Mal kann der achte Knotenpunct mit den 7 gegebenen Knotenpuncten zusammen den vollständigen Durchschnitt dreier Flächen 2. Grades bilden; solcher Flächen gibt es bei vorgegebenen Knotenpuncten noch fünffach unendlich viele. Auf diesen Flächen gibt es einfach unendlich viele Curven 4. Ordnung, welche alle 8 Knotenpuncte passiren; sie werden umhüllt von einer Schaar von Flächen 2. Grades**). Solche Flächen wollen wir als *syzygetische Flächen mit 8 Knotenpuncten* bezeichnen.

Zum andern gibt es Flächen mit 8 Knotenpuncten, welche nicht den vollständigen Schnitt dreier Flächen 2. Grades bilden; wir nennen sie *asyzygetische Flächen*. Die Abhängigkeit des achten Knotenpunctes von den 7 übrigen ist auf folgende Weise charakterisirt.

Ersichtlicher Weise muss es eine Raumcurve 8. Ordnung geben, welche auf einer Fläche 2. Grades liegt und welche jene 8 Puncte zu Doppelpuncten hat. Dieses Kriterium kann durch das folgende ersetzt werden: Es müssen die vier Curven 4. Ordnung zweiter Species, welche man durch die 8 Puncte hindurchlegen kann, zu zwei auf zwei Flächen 2. Grades liegen. Es ist dieses nur eine einzige Bedingung, da immer, wenn zwei von den Curven 4. Ordnung zweiter Species auf einer Fläche 2. Grades liegen, auch durch die beiden übrigen eine Fläche 2. Grades gelegt werden kann. Endlich können wir das Kriterium noch in einer dritten Form angeben. Wenn wir nämlich die fünffach unendlich vielen Flächen 4. Ordnung, welche die

*) Es mag noch einmal hervorgehoben werden, dass sich einige der Sätze über Flächen 4. Ordnung mit 8 oder 9 Knotenpuncten bereits bei Herrn Cayley a. a. O. vorfinden.

**) Kummer, Monatsberichte, Juni 1872.

vorgegebenen 7 Puncte zu Knotenpuncten haben und durch den achten Punct einfach hindurchgehen, betrachten, so finden wir, dass sie in dem letzteren Puncte alle eine gemeinsame Tangente besitzen, falls dieser Punct den achten Knotenpunct einer irreduciblen Fläche bilden kann.

Die Bedingung, welcher der achte Knotenpunct genügen muss, zwingt ihn, auf einer gewissen Fläche 6. Ordnung zu bleiben; diese Fläche wollen wir kurz die *Knotenfläche* der 7 vorgegebenen Puncte nennen. Von ihren Eigenschaften mögen nur die folgenden hervorgehoben werden. Die Knotenfläche besitzt die 7 Puncte als dreifache Puncte; ferner gehören deren 21 Verbindungslinien, sowie die 7 Raumcurven 3. Ordnung durch je 6 dieser Puncte der Fläche an. Sie enthält endlich die Raumcurve 6. Ordnung, welche den Ort der Scheitel aller Kegel bildet, die durch die 7 Grundpuncte hindurchgehen.

Bei den *Flächen mit 9 Knotenpuncten* sind wieder *zwei verschiedene Arten* zu unterscheiden. Die syzygetische Fläche mit 8 Knotenpuncten gibt Veranlassung zu einer *syzygetischen Fläche mit 9 Knotenpuncten*. Der neunte Knotenpunct muss dabei nothwendig auf der Jacobi'schen Curve der 8 syzygetischen Grundpuncte liegen. Es gibt noch dreifach unendlich viele syzygetische Flächen mit 9 gemeinsamen Knotenpuncten. Die Fläche wird wieder von einer Schaar von Flächen 2. Grades umhüllt, worunter sich ein Kegel befindet, dessen Scheitel im neunten Knotenpuncte liegt. So zerfällt der Tangentenkegel 6. Ordnung aus diesem Puncte in einen Kegel 2. Ordnung und einen Kegel 4. Ordnung, während der Tangentenkegel 6. Ordnung aus den übrigen Knotenpuncten irreducibel ist.

Die asyzygetische Fläche mit 8 Knotenpuncten liefert eine *asyzygetische Fläche mit 9 Knotenpuncten*. Der neunte Knotenpunct liegt hierbei nothwendig auf einer Curve 18. Ordnung, die wir als *Knotencurve* bezeichnen wollen. Alle doppelt unendlich vielen Flächen 4. Ordnung, welche die 8 Grundpuncte zu Knoten besitzen und durch einen und denselben Punct der Knotencurve hindurchgehen, berühren sich in diesem Puncte, hierdurch ist die Knotencurve definirt. Es gibt noch einfach unendlich viele asyzygetische Flächen mit 9 gemeinsamen Knotenpuncten; sie bilden ein Büschel; die 9 Knotenpuncte sind gleichberechtigt.

Von den Eigenschaften der Knotencurve sind zu erwähnen,

dass sie die 8 Grundpuncte zu dreifachen Puncten hat; die drei Aeste in einem jeden solchen Puncte berühren eine Ebene. Die Knotencurve schneidet die 28 Verbindungslinien der Grundpuncte, abgesehen von den Grundpuncten selbst, je zwei Mal. Sie schneidet ferner die 15 Raumcurven 3. Ordnung, welche durch je sechs der 8 Grundpuncte sich bestimmen, je zwei Mal.

Bei den *Flächen mit 10 Knotenpuncten* sind *drei wesentlich verschiedene Arten* aufzustellen. Von den syzygetischen Flächen mit 9 Knoten gelangt man zu *syzygetischen Flächen mit 10 Knoten*. Der zehnte Knotenpunct kann wiederum beliebig auf der schon vorher erwähnten Jacobi'schen Curve 6. Ordnung der 8 syzygetischen Grundpuncte liegen. Unter der Schaar der berührenden Flächen 2. Grades gibt es jetzt zwei Kegel, deren Scheitel resp. im neunten und zehnten Knotenpuncte liegen. Die Tangentenkegel 6. Ordnung in diesen Knotenpuncten zerfallen also in einen Kegel 2. Ordnung und einen Kegel 4. Ordnung, während die Tangentenkegel aus den andern Knoten irreducibel sind. Es gibt noch einfach unendlich viele syzygetische Flächen mit 10 gemeinsamen Knotenpuncten.

Die asyzygetischen Flächen mit 9 gemeinsamen Knotenpuncten, welche wie schon bemerkt ein Büschel bilden, liefern noch *zwei verschiedene Arten von asyzygetischen Flächen mit 10 Knoten.* Unter den Flächen jenes Büschels gibt es *noch 13 Flächen, welche einen zehnten Knotenpunct aufweisen.* Von diesen 13 Flächen sind *12 gleichartig*, *eine dagegen ist ausgezeichnet.* Die 12 gleichartigen Flächen haben die Eigenschaft, dass ihre 10 Knotenpuncte gleichberechtigt sind, und dass die Tangentenkegel 6. Ordnung aus denselben irreducibel sind; wir nennen dieselben kurz *asyzygetische Flächen mit 10 Knoten.*

Auch bei der *ausgezeichneten* Fläche, welche in dem Büschel vorkommt, sind die 10 Knotenpuncte gleichberechtigt; aber die Tangentenkegel 6. Ordnung aus denselben zerfallen in zwei Kegel 3. Ordnung. Eine solche Fläche nennt man *Symmetroid*, da ihre Gleichung in die Form einer viergliedrigen Determinante gebracht werden kann, deren Elemente lineare Functionen der Variablen sind. Unter dem Büschel von asyzygetischen Flächen mit 9 gemeinsamen Knotenpuncten gibt es also 13 Flächen, welche noch einen zehnten Knotenpunct besitzen und unter diesen befindet sich ein Symmetroid.

Den Flächen mit 8, 9 und 10 Knotenpuncten, welche wir

bis jetzt aufgezählt haben, sind noch einige weitere Flächen zuzuzählen, die man erhält, wenn man sechs von den ursprünglich gewählten 7 Knotenpuncten in einer Ebene und zwar auf einem Kegelschnitte annimmt. Es gibt dann noch ausserhalb dieser Ebene zwei, drei oder vier Knotenpuncte, die im letzteren Falle wieder in einer Ebene liegen können, welche zwei jener ersten 6 Knoten enthält. Auch diese Flächen haben interessante Eigenschaften, auf die ich jedoch hier nicht weiter eingehe.

Flächen 4. Ordnung mit 11 Knotenpuncten.

Von den Flächen mit 10 Knotenpuncten ausgehend, gelangt man zu Flächen mit 11 Knotenpuncten, deren es im Ganzen *vier Arten* gibt. Zunächst erkennt man, dass es in dem Büschel von syzygetischen Flächen mit 10 gemeinsamen Knotenpuncten *noch 10 Flächen* gibt, welche einen weiteren eilften Knotenpunct besitzen. Solche Flächen nennen wir *syzygetische Flächen mit 11 Knoten.* Sie werden wieder umhüllt von einer Schaar von Flächen 2. Grades, unter welchen es drei Kegel gibt, deren Spitzen resp. in dem 9., 10. und 11. Knotenpunct liegen. Die Tangentenkegel 6. Ordnung aus diesen drei Knotenpuncten zerfallen also je in einen Kegel 2. Ordnung und einen Kegel 4. Ordnung mit zwei Doppelkanten, während die Tangentenkegel aus den übrigen Knotenpuncten irreducibel sind. Hierdurch ist die Fläche charakterisirt, ihre weiteren Eigenschaften sollen hier unerwähnt bleiben.

Von den asyzygetischen Flächen kann man nun nicht ohne Weiteres zu Flächen mit 11 Knotenpuncten übergehen. Es gibt jedoch eine specielle Art von solchen asyzygetischen Flächen mit 10 Knotenpuncten, welche uns unmittelbar zu Flächen mit 11 Knotenpuncten hinleiten. Nimmt man nämlich 10 Puncte, welche den vollständigen Durchschnitt zweier Raumcurven 4. Ordnung zweiter Species bilden, und macht sie zu Knotenpuncten einer asyzygetischen Fläche, so gibt es ersichtlich noch ein ganzes Büschel von solchen Flächen, und unter ihnen sind *10 asyzygetische Flächen mit 11 Knotenpuncten.* Man kann nun aber zeigen, dass dieses die allgemeinsten derartigen Flächen sind. Zunächst kann man nämlich 7 Knoten und einen achten Knoten beliebig auf der zugehörigen Knotenfläche annehmen.

Der neunte Knoten muss dann auf der Knotencurve liegen; wird er nun auf dieser beliebig gewählt, so kann die Fläche nur noch einen zehnten Knotenpunct erhalten. Wählt man aber den neunten Knotenpunct auf der Knotencurve so, dass es auf einer zugehörigen Fläche 4. Ordnung noch zwei Schaaren von Raumcurven 4. Ordnung erster Species gibt, so existirt *eine* Fläche, welche die gegebenen 9 und noch 2 weitere Knotenpuncte besitzt. Von dieser Fläche zeigt man wieder, dass 10 ihrer Knotenpuncte den vollständigen Durchschnitt zweier Raumcurven 4. Ordnung zweiter Species bilden. Für diese 10 Knotenpuncte zerfällt der zugehörige Tangentenkegel 6. Ordnung in einen Kegel 3. Ordnung *mit* und einen Kegel 3. Ordnung *ohne* Doppelkante. Der Tangentenkegel aus dem letzten Knotenpuncte ist irreducibel.

Ausser den genannten beiden Flächenarten gibt es noch zwei weitere. Für *eine Flächenart mit 11 Knoten* liegen zwei Mal 6 Knotenpuncte auf je einem Kegelschnitt (zwei Knoten sind natürlich beiden Kegelschnitten gemeinsam), der eilfte Knotenpunct bildet den Doppelpunct einer Curve 4. Ordnung, welche die beiden Kegelschnitte je 4 Mal trifft. Für einen Knotenpunct zerfällt der Tangentenkegel in einen Kegel 2. Ordnung und einen Kegel 4. Ordnung mit zwei Doppelkanten, für zwei andere Knoten zerfällt er in zwei Ebenen und einen Kegel 4. Ordnung mit einer Doppelkante, für die 8 übrigen endlich zerfällt er in eine Ebene und einen Kegel 5. Ordnung mit 5 Doppelkanten.

Für die *andere Flächenart mit 11 Knoten* liegen ein Mal 6 Knotenpuncte auf einem Kegelschnitt. Es gibt alsdann durch diese 6 Knotenpuncte fünf Raumcurven 6. Ordnung, welche in je 4 der fünf weiteren Knotenpuncte einen Doppelpunct besitzen. Für die letzteren 5 Knotenpuncte ist der Tangentenkegel 6. Ordnung irreducibel, für die ersteren zerfällt er in eine Ebene und einen Kegel 5. Ordnung mit 5 Doppelkanten. Auch hier lasse ich die weiteren Eigenschaften dieser Fläche unberücksichtigt.

Flächen mit 12, 13, 14, 15 und 16 Knotenpuncten.

Die Flächen mit 16, 15 oder 14 Knotenpuncten liefern nur *je eine Art* und treten in der citirten Abhandlung von Herrn Kummer als Brennflächen der Strahlensysteme 2. Ordnung und

zweiter resp. dritter resp. vierter Classe auf; sie können deshalb hier übergangen werden.

Die Flächen *mit 13 Knotenpuncten* liefern *zwei Arten.* Die *eine Art* ist die Brennfläche des Strahlensystems 2. Ordnung und 5. Classe. Der Tangentenkegel 6. Ordnung zerfällt für *einen* Knotenpunct in 3 Ebenen und einen Kegel 3. Ordnung, für *drei* Knotenpuncte in zwei Ebenen und einen Kegel 3. Ordnung mit 3 Doppelkanten, und für *neun* Knotenpuncte in eine Ebene, einen Kegel 2. Ordnung und einen Kegel 3. Ordnung mit einer Doppelkante. Die *andere Art* besitzt 12 Knotenpuncte, deren Tangentenkegel in zwei Ebenen und einen Kegel 4. Ordnung mit drei Doppelkanten zerfällt, während der Tangentenkegel des letzten Knotenpunctes aus drei Kegeln 2. Ordnung besteht. Es kann diese Fläche aus derjenigen Fläche mit 12 Knotenpuncten erhalten werden, deren Knoten die Schnittpuncte von 4 Kegelschnitten bilden, die auf einer Fläche zweiten Grades liegen.

Die Flächen *mit 12 Knotenpuncten* bilden *vier verschiedene Arten.* Zwei Arten derselben findet Herr Kummer als Brennflächen der beiden Arten von Strahlensystemen 2. Ordnung und 6. Classe. Die *eine Art* besitzt 12 gleichberechtigte Knotenpuncte, deren Tangentenkegel in einen Kegel 2. Ordnung und einen Kegel 4. Ordnung mit drei Doppelkanten zerfallen. Die *andere Art* besitzt 6 Knotenpuncte, deren Tangentenkegel in zwei Kegel 3. Ordnung mit Doppelkante zerfällt, ferner 4 Knotenpuncte, deren Tangentenkegel aus einer Ebene, einem Kegel 2. Ordnung und einem Kegel 3. Ordnung besteht, endlich 2 Knotenpuncte mit einer Ebene und einem Kegel 5. Ordnung mit 6 Doppelkanten als Tangentenkegel.

Eine *dritte Art* findet sich bei Herrn Kummer unter den Flächen, welche von einer Schaar von Flächen 2. Grades eingehüllt werden. Sie besitzt 12 gleichberechtigte Knotenpuncte, deren Tangentenkegel in zwei Ebenen und einen Kegel 4. Ordnung mit zwei Doppelkanten zerfallen. Die 12 Knoten liegen auf einer Fläche 2. Grades und bilden die Durchschnittspuncte von vier Kegelschnitten.

Es gibt noch eine *vierte Art,* deren Tangentenkegel in den Knoten sich folgendermassen zusammensetzen. Für acht Knotenpuncte besteht derselbe aus einer Ebene und einem Kegel 5. Ordnung mit 6 Doppelkanten, für zwei Knotenpuncte aus zwei Ebenen und einem Kegel 4. Ordnung mit zwei Doppel-

kanten und für die übrigen beiden Knotenpuncte aus einem Kegel 2. Ordnung und einem Kegel 4. Ordnung mit drei Doppelkanten.

Hiermit sind die verschiedenen Arten der Flächen mit 8 bis 16 Knotenpuncten erschöpft, jedoch können die einzelnen Arten noch weiter specialisirt werden. Eine Angabe der Anordnung der Knotenpuncte für die einzelnen Arten, sowie ein genaueres Studium der verschiedenen Eigenschaften dieser Flächen liegt ausserhalb des Rahmens der vorliegenden Note.

SITZUNG AM 14. NOVEMBER 1884.

Felix Klein, *Zur Theorie der elliptischen Functionen* n^{ter} *Stufe.*

Die folgenden Entwickelungen knüpfen an einen Aufsatz an, den ich unter dem Titel: *Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* in den Berichten der Münchener Akademie vom Juli 1880 veröffentlicht habe, und der später im 17. Bande der mathematischen Annalen (p. 133 ff.) wieder abgedruckt worden ist. Es handelte sich damals um eine erste Formulirung gewisser Ideen, deren specielle Durchführung dann Hr. Bianchi in Angriff nahm; man vergleiche Hrn. Bianchi's ebenfalls im 17. Annalenbande (p. 234 ff.) publicirte Abhandlung: *Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung*, deren Titel genugsam die in ihm eingehaltene Umgränzung des Stoffes anzeigt*). Ich habe seit lange bemerkt, dass man die Sätze, welche Hr. Bianchi speciell bei der fünften Stufe entwickelt, fast ungeändert auf höhere Stufen von ungeradem Grade übertragen kann, worauf man Formeln erhält, welche für die allgemeine Theorie der Transformation von wesentlicher Bedeutung scheinen. Eben aus solchen Betrachtungen ist die Note *über gewisse Theilwerthe der θ-Function* entstanden, die sich im 17. Bande der mathematischen Annalen (p. 565 ff.) abgedruckt findet. Ich wünsche im Folgenden die Grundzüge dieser Verallgemeinerung in ihren allgemeinen Umrissen hinzustellen, wobei ich nur solche Einzelheiten, die mich besonders interessirten, genauer ausführen werde. Die Beschränkung auf ungerade n ist dabei

---

*) Man sehe ferner, was die vierte Stufe angeht: E. Lange, *Die 16 Wendeberührungspuncte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species*, im 28. Bande von Schlömilch's Zeitschrift.

nur durch die Gleichförmigkeit der abzuleitenden Resultate geboten, keineswegs aber im Wesen der Methode begründet.

Was die Bezeichnungen, die ich verwende, angeht, so bemerke ich gleich hier das Folgende. Zunächst, was die Formeln betrifft, so schliesse ich mich theils an Jacobi, theils an Weierstrass an, wobei ich freilich (wie dies bereits Hr. Bianchi gethan) insofern wieder abweiche, als ich die Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung nicht 2ω, $2\omega'$, bez. 2η. $2\eta'$, sondern ω_1, ω_2, resp. η_1, η_2 nenne*). Ich schreibe dann ferner:

$$(1)\quad e^{i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}} = q\,,\qquad e^{-i\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}} = r\,,\qquad g_2^3 - 27g_3^2 = \Delta\,.$$

Sei ferner hinsichtlich der Ausdrucksweise das Folgende bemerkt. Alle solche linearen Transformationen der Perioden ω_1, ω_2:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)\,,$$

welche den Congruenzen genügen:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1\,,\qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{n}\,,$$

nenne ich *modulo n zur Identität congruent* und rechne nun jede irgendwie gegebene elliptische Function *zur* n^{ten} *Stufe*, wenn sie bei sämmtlichen in Rede stehenden linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert bleibt, — es sei denn, dass diese Unveränderlichkeit schon bei einer Zahl $m < n$ eintritt, worauf die vorgelegte Function der m^{ten} Stufe zuzuweisen sein wird. Die hiermit gegebene Definition umfasst ohne Weiteres auch den Fall eines elliptischen Integrals und weicht daher von derjenigen, die ich in meiner ersten oben genannten Note verwandte, in formaler Hinsicht ab. Wenn wir ein elliptisches Integral, wie damals geschah und in der Folge wieder in Betracht kommt, an einer der elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung des Raumes von $(n-1)$ Dimensionen hinerstrecken, so ist es darum noch nicht im Sinne der jetzigen Ausdrucksweise von der n^{ten} Stufe. Es hat nur insofern Beziehung zur n^{ten} Stufe, als man

---

*) Indem wir annehmen (wie im Folgenden immer geschieht), dass der imaginäre Theil von $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ positiv sei, haben wir dann:

$$\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = 2i\pi\,.$$

die genannte Curve mit besonderer Leichtigkeit auf ein kanonisches Coordinatensystem beziehen kann, bei dem das Integral von der n^{ten} Stufe wird. Eben dieses war nun freilich der Kern meiner damaligen Mittheilung, so dass materiell die alte Auffassung mit der jetzigen übereinstimmt.

Ich erinnere hier noch an folgende Formeln. Wir haben zunächst:

$$(2)\qquad \sqrt[24]{\Delta} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot q^{\frac{1}{12}} \cdot \prod_1^\infty (1 - q^{2h})$$
$$= e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \cdot r^{\frac{1}{12}} \cdot \prod_1^\infty (1 - r^{2x}) \;,$$

woraus die im Folgenden zumeist gebrauchte Wurzel $\sqrt[8]{\Delta}$ durch Cubiren hervorgeht. Wir setzen ferner mit Jacobi:

$$(3)\qquad \vartheta_1(x, q) = \frac{1}{i} \sum_0^\infty (-1)^h \cdot q^{\frac{(2h+1)^2}{4}} \cdot \{e^{(2h+1)ix} - e^{-(2h+1)ix}\} \;.$$

Man hat dann für die Weierstrass'sche σ-Function:

$$(4)\qquad \sigma(u, \omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1}, q\right)$$
$$= e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \cdot \frac{e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2}, r\right) \;.$$

Uebrigens wolle man sich der Functionalgleichung erinnern:

$$(5)\qquad \sigma(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$$
$$= (-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2} \cdot e^{(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)\left(u + \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(u) \;.$$

Wir lassen jetzt Transformation n^{ter} Ordnung eintreten, indem wir setzen:

$$(6)\qquad \bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{n} \;, \qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2 \;.$$

Es ist dann nach der Legendre'schen Relation:

$$(7)\qquad \frac{\bar{\eta}_1}{2\bar{\omega}_1} - \frac{n\eta_1}{2\omega_1} = \frac{\bar{\eta}_2}{2\bar{\omega}_2} - \frac{n\eta_2}{2\omega_2} \;.$$

Den gemeinsamen Werth dieser Ausdrücke bezeichne ich mit G_1

(cf. Felix Müller, *de transformatione functionum ellipticarum*, Berlin 1867), und habe also in folgendem Ausdrucke:

$$(8) \qquad e^{-G_1 u^2} \cdot \frac{\sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma(u, \omega_1, \omega_2)^n}$$

eine doppeltperiodische Function von u mit den Perioden ω_1, ω_2.

Endlich finde folgende Bemerkung hier ihre Stelle. Ich habe meinen nachstehenden Entwickelungen zahlreiche Citate eingefügt, die sämmtlich *moderne* Arbeiten betreffen. Dem Kundigen wird aber nicht entgehen, wie viel ich aus den späteren Arbeiten Jacobi's geschöpft habe, aus denjenigen nämlich, die im ersten Bande der neuen Gesammtausgabe von Jacobi's Werken die zweite Hälfte ausmachen. In der That handelt es sich im ersten Abschnitte des Folgenden vielfach nur darum, die von Jacobi aufgestellten Methoden auf diejenigen Functionen anzuwenden, welche Hr. Weierstrass eingeführt hat, eine Aufgabe, welche zumeist eine sehr elegante Lösung gestattet.

Erster Abschnitt.

Einführung der X_α.

§. 1. Von den Functionen $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ und $\sigma_{\lambda,\mu}$.

Wann immer es sich um allgemeine Untersuchungen über Transformation n^{ter} Ordnung handelt, ist es nützlich, die folgenden Functionen zu Grunde zu legen:

$$(9) \qquad \sigma_{\lambda,\mu}(u, \omega_1, \omega_2)$$
$$= e^{\frac{\lambda\eta_1+\mu\eta_2}{n}\left(u-\frac{1}{2}\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)} \cdot \sigma\left(u - \frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right),$$

deren Nullwerthe ich, so lange die Perioden ω_1, ω_2 nicht ausdrücklich genannt werden müssen, mit $\sigma_{\lambda,\mu}$ bezeichne:

$$(10) \qquad \sigma_{\lambda,\mu} = -e^{-\frac{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}{2n^2}} \cdot \sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right).$$

Vermehrt man in (9) die (immer ganzzahlig zu denkenden) Indices λ, μ um ganzzahlige Multipla von n, so erhält man folgende Formel:

$$(11) \qquad \sigma_{\lambda+ln,\,\mu+mn}(u) = (-1)^{lm+l+m} \cdot e^{-\frac{i\pi}{n}(\lambda m-\mu l)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u).$$

Es ist also $\sigma_{\lambda + ln,\, \mu + mn}(u)$ von $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$ nur um einen constanten Factor unterschieden und wir haben im Wesentlichen nur n^2 Grössen $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$ in Betracht zu ziehen, von denen $\sigma_{0,\,0}(u)$ mit $\sigma(u)$ zusammenfällt. Die Nullwerthe $\sigma_{\lambda,\,\mu}$ aber reduciren sich auf $\frac{n^2-1}{2}$ Grössen, denn es ist, vermöge (5):

$$(12) \qquad e^{(\lambda-\mu)\frac{i\pi}{n}}\sigma_{\lambda,\,\mu} = \sigma_{n-\lambda,\, n-\mu}$$

und natürlich $\sigma_{0,\,0} = 0$ [wobei wir n, was übrigens an dieser Stelle noch nicht nöthig wäre, bereits als ungerade voraussetzen].

Wir vermehren ferner in (9) das Argument u um Perioden. Dies führt zu der Formel:

$$(13) \qquad \sigma_{\lambda,\,\mu}(u + l\omega_1 + m\omega_2)$$
$$= e^{\frac{2i\pi(m\lambda - l\mu)}{n}} \cdot (-1)^{lm+l+m} \cdot e^{(l\eta_1 + m\eta_2)\left(u + \frac{l\omega_1 + m\omega_2}{n}\right)} \cdot \sigma_{\lambda,\,\mu}(u)\,,$$

aus der sich für den Quotienten $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u) : \sigma(u)$ das folgende Verhalten ergibt:

$$(14) \qquad \frac{\sigma_{\lambda,\,\mu}(u + l\omega_1 + m\omega_2)}{\sigma(u + l\omega_1 + m\omega_2)} = e^{\frac{2i\pi(m\lambda - l\mu)}{n}} \cdot \frac{\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)}{\sigma(u)}\,.$$

Man vergleiche hierzu **Kiepert** im 76. Bande des Journals für Mathematik (p. 28 ff.), wo nur von vorneherein unserem Quotienten im Nenner der Factor $\sigma_{\lambda,\,\mu}$ zugesetzt ist, was für uns nicht zweckmässig sein würde, weil dann die Formeln (9), (10) nicht einzeln zur vollständigen Geltung gelangen.

Wir notiren jetzt die Formel:

$$(15) \qquad \sigma_{\lambda,\,\mu}(-u) = -\sigma_{-\lambda,\,-\mu}(u)$$

und unterwerfen endlich die Perioden ω_1, ω_2, η_1, η_2, welche in (9) vorkommen, einer linearen Transformation, welche modulo n zur Identität congruent ist, die wir also folgendermassen schreiben können:

$$\omega_1' = (an+1)\,\omega_1 + bn\,.\,\omega_2\,, \qquad \eta_1' = (an+1)\,\eta_1 + bn\,.\,\eta_2\,,$$
$$\omega_2' = cn\,.\,\omega_1 + (dn+1)\,\omega_2\,, \qquad \eta_2' = cn\,.\,\eta_1 + (dn+1)\,\eta_2\,,$$

wo:

$$(16) \qquad (ad - bc)\,n + (a + d) = 0\,.$$

Eine kurze Rechnung ergibt:

$$(17) \qquad \sigma_{\lambda,\,\mu}(u,\,\omega_1',\,\omega_2') = (-1)^{\lambda^2(ab+a+b)+\mu^2(cd+c+d)+\lambda\mu(ad+b}$$
$$\cdot\, e^{\frac{i\pi}{n}[-b\lambda^2+(a-d)\lambda\mu+c\mu^2]} \cdot \sigma_{\lambda,\,\mu}(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,.$$

Unsere $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$, oder ihre Nullwerthe $\sigma_{\lambda,\,\mu}$, erscheinen also, als Modulfunctionen aufgefasst, nicht etwa als Functionen der n^{ten} Stufe, sondern sie gehören zu denjenigen Functionen, welche man der n^{ten} Stufe *adjungirt* nennen könnte, insofern sie sich bei linearen Substitutionen, die modulo n zur Identität congruent sind, nur um eine als Factor vortretende Einheitswurzel ändern. Solche Functionen sind geeignet, um aus ihnen als Factoren Moduln der n^{ten} Stufe zusammenzusetzen, wozu wir im Folgenden mehrfache Beispiele gewinnen werden. Uebrigens ist der Factor, mit welchem $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$ rechter Hand in (17) verbunden auftritt, sobald wir n als ungerade Zahl voraussetzen, nur scheinbar eine $2n^{\text{te}}$ Einheitswurzel. Aus (16) folgt nämlich, dass für ungerade n immer folgende Relationen statt haben:

$$ab + a \equiv cd + c \equiv 0\,, \qquad ad + bc \equiv a - d \pmod{2}\,.$$

Wir können also (17), indem wir für (-1) die Potenz $e^{i\pi}$ einführen und übrigens, wie immer im Folgenden, für $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ ε schreiben, folgendermassen umgestalten:

$$(17_b) \qquad \sigma_{\lambda,\,\mu}(u,\,\omega_1',\,\omega_2')$$
$$= \varepsilon^{\frac{n-1}{2}[b\lambda^2-(a-d)\lambda\mu-c\mu^2]} \cdot \sigma_{\lambda,\,\mu}(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,,$$

wo jetzt nur eine n^{te} Einheitswurzel als Factor auftritt. *Die n^{te} Potenz:*

$$\sigma_{\lambda,\,\mu}(u,\,\omega_1,\,\omega_2)^n$$

ist also jetzt eine Modulfunction n^{ter} Stufe. Uebrigens kommt der betreffende Factor in (17_b) allgemein zu reden nur dann in Wegfall, wenn wir b, c und $a-d$, und also, wegen (16), auch a, d einzeln durch n theilbar annehmen. *In diesem Sinne gehören die $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u,\,\omega_1,\,\omega_2)$ zur Stufe n^2.*

Wir haben noch den functionentheoretischen Charakter unserer $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$ zu fixiren. Zunächst erschliesst man aus (14) in bekannter Weise, dass die Quotienten $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u) : \sigma(u)$ von den Fundamentalfunctionen $p(u)$, $p'(u)$ *algebraisch* abhängen. Wir erforschen ferner die Abhängigkeit von den Invarianten

g_2, g_3. Zu dem Zwecke tragen wir statt σ nach Formel (4) die ϑ_1-Reihe ein und bekommen:

(18) $$\frac{\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)}{\sigma(u)} = e^{-\frac{2i\pi\mu}{n\omega_1}\left(u - \frac{1}{2}\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)} \cdot \frac{\vartheta_1\left[\left(u - \frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)\frac{\pi}{\omega_1},\, q\right]}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1},\, q\right)}.$$

Der Factor, mit welchem hier rechter Hand der ϑ-Quotient multiplicirt ist, lässt sich in folgende Form setzen:

$$e^{\frac{i\pi\lambda\mu}{n^2}} \cdot q^{\frac{\mu^2}{n^2}} \cdot e^{-\frac{2i\pi\mu u}{n\omega_1}}.$$

Wir schliessen hieraus und aus (17) [vermöge einer Schlussweise, die hier nicht mit wenig Worten dargelegt werden kann, die aber beispielsweise in meinen früheren Arbeiten über elliptische Modulfunctionen (Mathematische Annalen) vielfach verwandt wurde], dass $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u) : \sigma(u)$ auch von g_2, g_3 *algebraisch* abhängt. Das Gleiche gilt dann für die Nullwerthe $\sigma_{\lambda,\,\mu}$.

§. 2. Beziehungen der $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$, $\sigma_{\lambda,\,\mu}$ zu anderen Grössen der Transformationstheorie.

Wir bemerkten bereits soeben, dass es ein Leichtes ist, aus den $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$, $\sigma_{\lambda,\,\mu}$ Modulfunctionen der n^{ten} Stufe zusammenzusetzen. In der That stellen sich *alle* Grössen, welche man gewöhnlich in der Theorie der Transformation n^{ter} Ordnung anwendet, in einfacher Weise durch die $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$, $\sigma_{\lambda,\,\mu}$ dar. Ich notire in dieser Hinsicht zunächst die Formeln:

(19) $$p\left(u - \frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\lambda'\omega_1+\mu'\omega_2}{n}\right) = -\frac{\sigma_{\lambda+\lambda',\,\mu+\mu'}(u)\cdot\sigma_{\lambda-\lambda',\,\mu-\mu'}(u)}{\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)^2\cdot\sigma^2_{\lambda',\,\mu'}},$$

(20) $$p'\left(u - \frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right) = -\frac{\sigma_{2\lambda,\,2\mu}(2u)}{\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)^4},$$

die man sofort durch Umsetzung bekannter Fundamentalformeln erhält und die u. A. gestatten, sämmtliche specielle Theilwerthe:

$$p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right), \quad p'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$$

durch die $\sigma_{\lambda,\,\mu}$ auszudrücken*). Ich erinnere ferner an eine Formel, welche Hr. Kiepert im 87. Bande des Journals für Mathematik (p. 203) mittheilt und die folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(21)\qquad \sqrt[24]{\frac{\bar{\Delta}}{\Delta^n}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,\,0}\,.$$

Hier bedeutet $\bar{\Delta}$ den transformirten Werth $\Delta\left(\frac{\omega_1}{n},\,\omega_2\right)$, wofern wir das ursprüngliche Δ ausführlicher mit $\Delta(\omega_1,\,\omega_2)$ bezeichnen; die 24te Wurzel aber ist durch Formel (2) definirt.

Wir können umgekehrt verlangen, solche Verbindungen der $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$, $\sigma_{\lambda,\,\mu}$, welche als Functionen von u die Perioden ω_1, ω_2 besitzen und als Modulfunctionen zur n^{ten} Stufe gehören, rational durch die $p(u)$, $p'(u)$, $p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ auszudrücken. Ich setze nur zwei hierauf bezügliche Formeln her, die wir später gebrauchen. Wir finden einmal, indem wir in (20) $u=0$ nehmen und in geeigneter Weise ausmultipliciren:

$$(22)\qquad \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,\,0}^3 = \frac{1}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} p'\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)}\,,$$

wir finden ferner, indem wir von (19) ausgehen:

$$(23)\qquad \left[\frac{\sigma_{0,\,\mu}(u)}{\sigma(u)}\right]^n = (-1)^{\mu} \cdot \frac{\prod_1^{\frac{n-1}{2}}\left[p(u) - p\left(\frac{\varrho\omega_2}{n}\right)\right]}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}}\left[p\left(u-\frac{\mu\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\varrho\omega_2}{n}\right)\right]}\,,$$

woraus für $u=0$ die Formel resultirt:

---

*) Um dies betreffs der $p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ auszuführen, hat man nur zu beachten, dass die $\Sigma p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, erstreckt über sämmtliche $\frac{n^2-1}{2}$ verschiedene Theilwerthe, gleich Null ist.

$$(24)\qquad \sigma_{0,\,\mu}^{n} = \frac{(-1)^{\mu+1}}{p'\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)\cdot\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}'\left[p\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)-p\left(\frac{\varrho\omega_2}{n}\right)\right]},$$

wo der dem Productzeichen beigefügte Accent bedeuten soll, dass der dem Werthe $\varrho = \mu$ entsprechende Factor ausgelassen werden muss. Uebrigens gehört hierher auch für $n = 6g \pm 1$ die Formel, welche Hr. Kiepert auf p. 202 des 87. Bandes des Journals für Mathematik mittheilt:

$$(25)\qquad \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{\lambda,\,0}^{2} = \frac{\pm 1}{\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left[p\left(\frac{2\lambda\omega_1}{n}\right)-p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)\right]}.$$

Combinirt man dieselbe mit (22), so erhält man (immer unter der Voraussetzung, dass die ungerade Zahl n durch 3 nicht theilbar sei) $\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{\lambda,\,0}$, d. h., nach Formel (21), $\sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$ rational durch die Theilwerthe von p und p' ausgedrückt.

§. 3. Definition der X_α, z_α, A_α'.

Ich führe nunmehr die Grössen X_α ein $[\alpha = 0, 1, \ldots (n-1)]$, welche für die gegenwärtige Arbeit fundamental sind. *Es sind gewisse transformirte Werthe der $\sigma_{\lambda,\,\mu}(u)$, nämlich folgende:*

$$\sigma_{0,\,\alpha}\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right),$$

denen aus Zweckmässigkeitsgründen nur noch zweierlei Factoren zugesetzt werden. Erstlich nämlich behafte ich diese $\sigma_{0,\,\alpha}$, damit $\frac{X_\alpha}{\sigma(u)^n}$ eine doppeltperiodische Function von u mit den Perioden ω_1, ω_2 sei, mit dem Factor $e^{-G_1 u^2}$ (siehe Formel (8) oben). Zweitens aber füge ich, um später bei linearer Transformation der Perioden möglichst einfache Formeln zu erhalten, den Factor $(-1)^\alpha \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$ hinzu. *Ich setze also definitiv:*

$$(26)\quad X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2) = (-1)^\alpha . \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} . e^{-G_1 u^2} . \sigma_{0,\alpha}\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) .$$

Es sind dies, wie ich gleich hier bemerken will, im Wesentlichen dieselben Ausdrücke, welche Hr. Bianchi bei $n = 3$ und $n = 5$ benutzt hat, nur dass Hr. Bianchi, der allein die Quotienten der X_α betrachtet, auf eine genaue Fixirung der vorzusetzenden von u unabhängigen Factoren kein Gewicht gelegt hat*). Wir finden sofort:

$$(27)\quad X_\alpha\left(u + \frac{\lambda\omega_1}{n}\right) = (-1)^\lambda . e^{\lambda\eta_1\left(u + \frac{\lambda\omega_1}{2n}\right)} . \varepsilon^{-\alpha\lambda} . X_\alpha(u) ,$$

$$(28)\quad X_\alpha\left(u + \frac{\mu\omega_2}{n}\right) = (-1)^\mu . e^{\mu\eta_2\left(u + \frac{\mu\omega_2}{2n}\right)} . X_{\alpha-\mu}(u) ,$$

sowie mit Rücksicht darauf, dass n eine ungerade Zahl sein soll:

$$(29)\quad X_{n+\alpha}(u) = X_\alpha(u) ,$$

$$(30)\quad X_\alpha(-u) = -X_{n-\alpha}(u) .$$

Vermöge (29) können wir α als einen ganzzahlig unbeschränkt veränderlichen Index betrachten, der modulo n in Betracht zu ziehen ist. Aus (28) schliessen wir insbesondere:

$$(28_b)\quad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha . e^{\alpha\eta_2\left(u - \frac{\alpha\omega_2}{2n}\right)} . X_0\left(u - \frac{\alpha\omega_2}{n}\right) ,$$

eine Formel, die wir gelegentlich als Definition der X_α anwenden.

Ich führe nunmehr für die *Nullwerthe der* X_α, wie auch für die *Nullwerthe ihrer Differentialquotienten*, besondere Bezeichnung ein, indem ich setze:

$$(31)\quad X_\alpha(0) = z_\alpha ,$$

$$(32)\quad \left(\frac{\partial X_0}{\partial u}\right)_{u=0} = A_0' , \quad \left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial u}\right)_{u=0} = \frac{1}{2} A_\alpha' ,$$

---

*) Ist $n = p . q$, so wird man statt der X_α, oder vielmehr neben denselben, auch solche Ausdrücke in Betracht ziehen können, welche aus

$$\sigma_{\lambda,\mu}\left(u, \frac{\omega_1}{p}, \frac{\omega_2}{q}\right)$$

durch Zufügen geeigneter Factoren entstehen. Dies ist namentlich der Fall, wenn n gerade ist oder eine Quadratzahl vorstellt. Hierher gehören bei $n = 4$ die Functionen $\sigma(2u)$, $\sigma_1(2u)$, $\sigma_2(2u)$, $\sigma_3(2u)$, welche Hr. Lange seiner citirten Arbeit zu Grunde legt.

wo in der zweiten Formel (32) der Index α nur die durch n nicht theilbaren Zahlen bedeuten soll. Man hat dann vermöge (30):

$$(33)\qquad z_0 = 0\,,\qquad z_\alpha = -z_{n-\alpha}\,,$$

$$(34)\qquad \mathrm{A}'_\alpha = \mathrm{A}'_{n-\alpha}\,,$$

so dass im Ganzen $\frac{n-1}{2}$ Grössen z und $\frac{n+1}{2}$ Grössen A' zu unterscheiden sind.

Die X_α, z_α sind in u, ω_1, ω_2 homogen von der $\frac{3n-1}{2}$ten Dimension, die A'_α ebenso von der $\frac{3n-3}{2}$ten Dimension.

§. 4. Darstellung der X_α durch transformirte ϑ_1-Functionen.

Führen wir vermöge (4) in die Definition der X_α statt der σ-Function die Function ϑ_1 ein, so erhalten wir:

$$(35)\qquad X_\alpha(u,\omega_1,\omega_2)$$
$$= (-1)^\alpha \cdot \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \cdot e^{-\frac{2i\pi u}{\omega_1}\cdot\alpha} \cdot q^{\frac{\alpha^2}{n}}}{(\sqrt[8]{\Delta})^n} \cdot \vartheta_1\left(\frac{nu-\alpha\omega_2}{\omega_1}\cdot\pi,\ q^n\right),$$

$$(36)\qquad X_\alpha(u,\omega_1,\omega_2)$$
$$= (-1)^\alpha \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot e^{\frac{3i\pi}{4}}}{(\sqrt[8]{\Delta})^n} \cdot \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2} - \frac{\alpha\pi}{n},\ r^{\frac{1}{n}}\right),\text{*)}$$

oder, wenn wir für die ϑ_1 die Reihenentwickelungen eintragen:

---

*) Insbesondere sind also die Nullwerthe z_α durch die Formel gegeben:

$$z_\alpha(\omega_1,\omega_2) = (-1)^{\alpha+1} \cdot \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{q^{\frac{\alpha^2}{n}}}{(\sqrt[8]{\Delta})^n} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\alpha\omega_2\pi}{\omega_1},\ q^n\right).$$

Vergleicht man hiermit meine zu Eingang citirte Note: Ueber gewisse Theilwerthe der ϑ-Function, so erkennt man, dass unsere jetzigen z_α von den damals ebenso bezeichneten Grössen nur um einen von α unabhängigen numerischen Factor unterschieden sind. Da alle später für die z_α aufzustellenden Relationen in den z_α homogen sind, so kommt bei ihnen der betreffende Factor nicht weiter in Betracht, womit der Zusammenhang meiner jetzigen Entwickelungen mit den damaligen hinreichend gekennzeichnet ist.

$$(37)\qquad X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$$

$$= (-1)^\alpha . \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} . \sqrt{n} . \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{i . q^{\frac{n}{4}} . \prod\limits_1^\infty (1 - q^{2h})^{3n}}$$

$$. \sum_0^\infty (-1)^h \left\{ \begin{array}{l} q^{\frac{[(2h+1)n-2\alpha]^2}{4n}} . e^{[(2h+1)n - 2\alpha]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ - q^{\frac{[-(2h+1)n-2\alpha]^2}{4n}} . e^{[-(2h+1)n - 2\alpha]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array} \right\},$$

$$(38)\qquad X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$$

$$= (-1)^\alpha . \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} . e^{(n-1)\frac{i\pi}{4}} . \frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{i . r^{\frac{n}{4}} . \prod\limits_1^\infty (1 - r^{2k})^{3n}}$$

$$. \sum_0^\infty (-1)^k . r^{\frac{(2k+1)^2}{4n}} \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{-(2k+1)i\pi\alpha}{n}} . e^{(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \\ - e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} . e^{-(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \end{array} \right\}.$$

Wir leiten aus diesen Formeln gleich hier zwei wesentliche Folgerungen ab.

Erstlich schliessen wir, dass zwischen den X_α keinerlei lineare Relation besteht:

$$\Sigma c_\alpha X_\alpha = 0 \;,$$

wo die c_α von u frei sind, *dass also die* X_α, wie wir es ausdrücken, *linear unabhängig sind.*

Zweitens aber lesen wir aus (36) ab:

$$\frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = C . \omega_2^{\frac{n-1}{2}} . \frac{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2} - \frac{\alpha\pi}{n}, r^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2}, r\right)^n},$$

wo C einen numerischen Factor bedeutet, den ich nicht explicite hinschreibe, weil er nicht weiter in Betracht kommt. Hier können wir nun für den rechts stehenden ϑ-Quotienten in bekannter Weise eine lineare partielle Differentialgleichung in Bezug auf $\frac{u}{\omega_2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ als Variabele aufstellen, wobei das Schöne ist, dass in ihr der Index α, der nur in der Verbindung $\frac{u\pi}{\omega_2} - \frac{\alpha\pi}{n}$ und dazu bloss in dem Argumente der einen ϑ-Function vor-

kommt, überhaupt wegfällt. Wir gestalten diese Differentialgleichung um, indem wir beachten, dass $X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$ eine homogene Function von u, ω_1, ω_2 ist, und führen endlich statt u, ω_1, ω_2 die Grössen $p(u) = p$, g_2, g_3 als unabhängige Veränderliche ein. *Auf solche Weise finden wir nach einiger Rechnung, dass sämmtliche Grössen:*

$$(39) \qquad \frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = \varrho$$

der folgenden partiellen Differentialgleichung genügen:

$$(40) \quad [4p^3 - g_2 p - g_3] \cdot \frac{\partial^2 \varrho}{\partial p^2} + \left[(6 - 4n)p^2 + \frac{4n-3}{6} \cdot g_2\right] \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial p}$$
$$- \frac{2n}{3}\left(18 g_3 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial g_2} + g_2 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial g_3}\right) + n(n-1)p \cdot \varrho = 0\,,$$

der dann noch die Homogeneitätsbedingung zutritt:

$$(41) \quad p \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial p} + 2g_2 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial g_2} + 3g_3 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial g_3} = \frac{n-1}{4} \cdot \varrho\,.$$

Man vergleiche hierzu Kiepert im 88. Bande des Journals für Mathematik, pag. 209, wo eben die Formel (40) in allerdings etwas anderer Anordnung für den Quotienten

$$\frac{X_0(u)}{\sigma(u)^n} = \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} \cdot e^{-G_1 u^2} \frac{\sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma(u, \omega_1, \omega_2)^n}$$

abgeleitet wird, oder auch Frobenius und Stickelberger im 92. Bande daselbst, pag. 327.

§. 5. Zusammenhang der X_α mit den $p(u)$, $p'(u)$ und deren Theilwerthen.

Aus den allgemeinen Formeln, die wir für die $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ aufstellten, können wir ableiten, dass die Quotienten $X_\alpha(u) : \sigma(u)^n$ einerseits doppeltperiodische Functionen von u mit den Perioden ω_1, ω_2, andererseits Modulfunctionen der n^{ten} Stufe sind. Berücksichtigen wir noch, was über den algebraischen Charakter der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ gesagt wurde, so folgt, dass die genannten Quotienten als rationale Functionen der $p(u)$, $p'(u)$ und der Theilwerthe $p\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$ müssen dargestellt werden können, was nunmehr geschehen soll.

Wir gehen dabei von der Fundamentalformel aus:

$$(42)\quad e^{-G_1 u^2}.\,\sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\,\sigma(u).\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sigma_{\lambda,0}(u).\,\sigma_{-\lambda,0}(u)}{\sigma_{\lambda,0}^2}$$

aus der wir vermöge (21), (28 $_b$) die folgende Definition der X_α ableiten:

$$(43)\quad X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2) = (-1)^\alpha.\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}.\prod_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,\alpha}(u)\;,$$

die wir auch folgendermassen schreiben können:

$$\frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = (-1)^\alpha.\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}^3.\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sigma_{\lambda,\alpha}(u).\,\sigma_{-\lambda,\alpha}(u)}{\sigma_{\lambda,0}^2.\,\sigma_{0,\alpha}(u)^2}.\left(\frac{\sigma_{0,\alpha}(u)}{\sigma(u)}\right)^n.$$

Jetzt haben wir $\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}^3$ in (22) und ebenso $[\sigma_{0,\alpha}(u) : \sigma(u)]^n$ in (23) durch $p(u)$, $p'(u)$ und die Theilwerthe ausgedrückt. Andererseits ist nach (19):

$$-\frac{\sigma_{\lambda,\alpha}(u).\,\sigma_{-\lambda,\alpha}(u)}{\sigma_{\lambda,}^2.\,\sigma_{0,\alpha}(u)^2} = p\left(u - \frac{\alpha\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right).$$

Indem wir eintragen, kommt unmittelbar die gesuchte Formel:

$$(44)\quad \frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{p\left(u - \frac{\alpha\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)}{p'\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)}$$

$$.\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{p(u) - p\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)}{p\left(u - \frac{\alpha\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)}.$$

Insbesondere finden wir für die Nullwerthe z_α:

$$(45)\quad z_\alpha = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p'\left(\frac{\alpha\omega_2}{n}\right).\prod_1^{'\frac{n-1}{2}}\left[p\left(\frac{\alpha\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)\right]}.\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{p\left(\frac{\alpha\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)}{p'\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)};$$

wo der Accent bei dem Productzeichen wieder bedeutet, dass ein bestimmtes Glied (dasjenige, welches $\mu = \alpha$ entsprechen würde) auszulassen ist. Die allgemeine Formel für die A'_α schreibe ich der Kürze halber nicht hin. Dagegen notiren wir, dass A'_0 nach (21), (22) selbstverständlich wird:

$$(46) \qquad A'_0 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} p'\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)}.$$

§. 6. Darstellung der p, p' etc. durch die X_α, z_α, A'_α.

Wir können jetzt den Zusammenhang zwischen den Quotienten $X_\alpha : \sigma(u)^n$ und den $p(u)$, $p'(u)$ noch auf andere Weise ausdrücken, was für uns um so wichtiger ist, als wir dadurch das Mittel finden, $p(u)$, $p'(u)$, $\sigma_{\lambda,\mu}(u)^n$ sowie die Theilwerthe $p\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $\sigma^n_{\lambda,\mu}$ durch die $X_\alpha(u)$, z_α, A'_α darzustellen, so dass einem Aufbau der gesammten Theorie der elliptischen Functionen unter durchgängiger Zugrundelegung der letztgenannten Grössen kein Hinderniss mehr entgegensteht. Bemerken wir zunächst, dass unsere Quotienten $X_\alpha : \sigma(u)^n$ *ganze* Functionen der $p(u)$, $p'(u)$ von einem leicht bestimmbaren Grade sind. Um unsere Formeln bequemer schreiben zu können, wollen wir jetzt statt der X_α die folgenden Combinationen der X_α einführen:

$$(47) \qquad A_0 = X_0,\ A_1 = X_1 + X_{n-1},\ \ldots\ldots\ A_{\frac{n-1}{2}} = X_{\frac{n-1}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}};$$

$$(48) \qquad B_1 = X_1 - X_{n-1},\ \ldots\ldots\ B_{\frac{n-1}{2}} = X_{\frac{n-1}{2}} - X_{\frac{n+1}{2}}.$$

Hier sind die A ungerade, die B gerade Functionen von u. Ferner coïncidiren die Nullwerthe der Differentialquotienten $\frac{dA_\alpha}{du}$ genau mit unseren früheren Grössen A'_α [Formel (32)], während die Nullwerthe der B_α gleich $2z_\alpha$ bez. zu setzen sein werden. Die Quotienten

$$\frac{A_\alpha}{\sigma(u)^n}, \quad \frac{B_\alpha}{\sigma(u)^n}$$

lassen sich diesen Bemerkungen zufolge auf Grund bekannter Sätze in folgende Formen bringen:

$$(49)\quad \frac{A_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = A'_\alpha \cdot p(u)^{\frac{n-1}{2}} + a_{\alpha,1} \cdot p(u)^{\frac{n-3}{2}} + \dots a_{\alpha,\frac{n-1}{2}},$$

$$(50)\quad \frac{B_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = p'(u)\left\{z_\alpha p(u)^{\frac{n-3}{2}} + b_{\alpha,1} p(u)^{\frac{n-5}{2}} + \dots b_{\alpha,\frac{n-3}{2}}\right\}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass wir die Moduln n^{ter} *Stufe* z_α, A'_α *bereits kennen, auch in der Lage sind, ihre nach* g_2, g_3 *genommenen Differentialquotienten zu berechnen* (eine Annahme, über welche in den unten folgenden Schlussbemerkungen Einiges hinzugefügt werden soll). Dann gestatten uns die Differentialgleichungen (40), (41) alle folgenden Coefficienten $a_{\alpha,1}, \dots a_{\alpha,\frac{n-1}{2}}$, $b_{\alpha,1}, \dots b_{\alpha,\frac{n-3}{2}}$ durch die A'_α und z_α unter Zuhülfenahme von g_2 und g_3 rational auszudrücken. *Ist dies geschehen, so brauchen wir, um unser Ziel zu erreichen, nur die Formeln* (49), (50) *zu invertiren.* In der That erfahren wir durch Auflösung der (49), (50) [die immer möglich sein muss, weil die X_α nach §. 4 linear unabhängig sind] die folgenden Grössen:

$$p(u)^{\frac{n-1}{2}}, \quad p(u)^{\frac{n-3}{2}}, \quad \dots, \quad p(u), \quad 1,$$

$$p'(u)p(u)^{\frac{n-3}{2}}, \quad \dots, \quad p'(u)p(u), \quad p'(u)$$

als lineare Verbindungen der Quotienten

$$\frac{A_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} \quad \text{bez.} \quad \frac{B_\alpha(u)}{\sigma(u)^n}.$$

Dies gibt uns, indem wir mit dem Nenner $\sigma(u)^n$ heraufmultipliciren, einmal $\sigma(u)^n$ als ganze lineare Function der A_α (was ein erstes Resultat ist), dann aber die successiven Potenzen:

$$p(u), \quad \dots, \quad p(u)^{\frac{n-3}{2}}, \quad p(u)^{\frac{n-1}{2}}$$

und die Producte

$$p'(u), \quad p'(u)p(u), \quad \dots, \quad p'(u)p(u)^{\frac{n-3}{2}}$$

als linear gebrochene Functionen der X_α. Ersetzen wir endlich in diesen Formeln das u durch $u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ und ziehen (27), (28) heran, so erfahren wir die $\sigma_{\lambda,\mu}(u)^n$ und die Functionen

$$p\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right), \quad p'\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right) \text{ etc.}$$

in entsprechender Form. Eine Darstellung der $\sigma^n_{\lambda,\mu}$, der $p\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$ etc. durch die A'_α, z_α und g_2, g_3 ist hier eingeschlossen. Wir haben also in der That das Ziel erreicht, welches zu Anfang des Paragraphen bezeichnet wurde.

Zweiter Abschnitt.

Ueber einige Eigenschaften der X_α.

§. 1. Die elliptischen Normalcurven C_n.

Die elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung des Raumes von $(n-1)$ Dimensionen, die ich hier mit C_n bezeichne, sind, wie ich in meiner ersten in der Einleitung genannten Note ausführte, in allgemeinster Weise definirt, wenn man die homogenen Coordinaten $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ eines Curvenpunctes mit n linear unabhängigen n-gliedrigen σ-Producten proportional setzt, deren Quotienten doppeltperiodisch sind*). Wir schreiben dementsprechend:

$$(51)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = A \,.\, \sigma(u-a_1) \,.\, \sigma(u-a_2) \,.\,.\,.\,.\,.\, \sigma(u-a_n)\,, \\ \varrho x_1 = B \,.\, \sigma(u-b_1) \,.\, \sigma(u-b_2) \,.\,.\,.\,.\,.\, \sigma(u-b_n)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varrho x_{n-1} = N \,.\, \sigma(u-n_1) \,.\, \sigma(u-n_2) \,.\,.\,.\,.\,.\, \sigma(u-n_n)\,, \end{cases}$$

wo

$$\Sigma a_i = \Sigma b_i = \ldots. = \Sigma n_i$$

zu nehmen ist und der gemeinsame Werth dieser Summen der Einfachheit halber gleich Null gesetzt werden mag. — Von den Eigenschaften dieser C_n heben wir hier nur die hervor, *dass sie n^2 singuläre Stellen besitzt, an denen n consecutive Puncte in einer Ebene liegen*, — es sind dies die Stellen $u = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ —, sowie die andere, *dass sie durch $2n^2$ Collineationen des Raumes*

*) Man sehe auch Clifford: on the classification of Loci, Philosophical Transactions, 1878.

von $(n-1)$ *Dimensionen in sich übergeht.* Von letzteren nennen wir diejenigen n^2, welche den Formeln $u' = u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ entsprechen, Transformationen der ersten Art; die Transformationen der zweiten Art sind durch $u' = -u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ gegeben.

Wir wollen nun zweierlei kanonische Darstellungen unserer C_n einander gegenüberstellen. Die erste benutzt ein Coordinatensystem, bei welchem eine und nur eine der n^2 singulären Stellen in charakteristischer Weise ausgezeichnet ist, und das also bei den n^2 Collineationen der ersten Art in n^2 neue, gleich einfache Lagen übergeht, worin man den Grund dafür zu erblicken hat, dass die Coefficienten der zwischen den Coordinaten bestehenden algebraischen Gleichungen in den Invarianten g_2, g_3 rational sind. Die andere legt ein Coordinatensystem zu Grunde, dessen Ebenen bei sämmtlichen Collineationen nur unter einander permutirt werden, das also zu Gleichungen mit wesentlich irrationalen Coefficienten führt, die sich als Moduln der n^{ten} Stufe erweisen.

Wir erhalten die erste Art der Darstellung, indem wir die homogenen Coordinaten x_0, x_1, ... *eines Curvenpunctes den eben betrachteten Potenzen und Producten von* $p(u)$ *und* $p'(u)$ *proportional setzen:*

$$(52)\qquad x_0 : x_1 : \ldots . x_{\frac{n-1}{2}} : x_{\frac{n+1}{2}} : \ldots . x_{n-1}$$
$$= 1 : p(u) : \ldots . p(u)^{\frac{n-1}{2}} : p'(u) : \ldots . p'(u)p(u)^{\frac{n-3}{2}} .$$

Hier haben wir einmal die Relation:

$$p'(u)^2 = 4p(u)^3 - g_2 p(u) - g_3 ,$$

und übrigens die selbstverständlichen Identitäten, die sich für die Potenzen und Producte zweier Grössen ergeben: wir sind also in der Lage, die Gesammtheit der algebraischen Flächen, die unsere Curve enthalten, in einfachster Weise zu discutiren.

Wir erhalten die zweite Art der Darstellung, wenn wir die rechten Seiten in (51) *durch die* X_α *des vorigen Abschnittes ersetzen, also schreiben:*

$$(53)\qquad \varrho x_\alpha = X_\alpha(u) .$$

In der That sind ja der Formel (43) zufolge die X_α n-gliedrige

σ-Producte von der in (54) vorausgesetzten Beschaffenheit. — Hier kennen wir vermöge (27), (28), (30) die $2n^2$ Collineationen, welche die C_n in sich überführen, in expliciter Form.

Man vergleiche jetzt die Formeln (49), (50). Offenbar gewinnen dieselben unseren jetzigen Festsetzungen gegenüber die Bedeutung, *den Uebergang von dem einen Coordinatensysteme zum anderen zu vermitteln*.

Wir werden nunmehr in den nachstehenden Paragraphen in genauem Anschlusse an die vorgenannte Bianchi'sche Arbeit der Reihe nach folgende Aufgaben behandeln: wir werden die quadratischen Relationen herstellen, welche von den X_α befriedigt werden, — wir werden das Integral erster Gattung u durch die X_α ausdrücken (Integral n^{ter} Stufe), — wir werden endlich untersuchen, wie sich die X_α bei linearer Transformation der Perioden ω_1, ω_2 verhalten, wie wir also vom Coordinatensysteme (53) zu anderen gleichberechtigten Coordinatensystemen übergehen. Daran knüpfen sich dann von selbst eine Reihe von Folgerungen, welche für die allgemeine Lehre von der Transformation der elliptischen Functionen Interesse haben dürften, und die sich leicht noch weiter ausführen liessen.

Vergleicht man diese Entwickelungen mit denjenigen von Hrn. Bianchi, so wird man sofort bemerken, dass alle die geometrischen Ueberlegungen, welche Letzterer anstellt, im Folgenden durch einfache Formeln aus der Theorie der doppeltperiodischen Functionen ersetzt sind. Die geometrische Redeweise, deren ich mich hier im Anschlusse an meine frühere Darstellung bediene, hat also bis auf Weiteres nur noch beiläufige Bedeutung: sie bezweckt einzig, gewisse Fragestellungen nahe zu legen und in bequemer Form übersichtlich zu machen. Es ist dies, was Selbständigkeit der Methode angeht, unverkennbar ein Rückschritt, der aber indicirt war, sofern es sich um expedite Ableitung bestimmter Formeln handelte.

Uebrigens ist deutlich, dass die ganze Art unserer Fragestellung einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig ist. Bei dem Coordinatensysteme (53) erscheinen die n^2 singulären Stellen in bestimmter Weise auf die n Ebenen des Coordinatensystems vertheilt, was dann später für sämmtliche Coordinatensysteme gilt, die aus dem ersten durch lineare Transformation der Perioden ω_1, ω_2 entstehen. Nun gibt es aber, wenn $n > 3$ ist, noch eine grosse Anzahl anderer Coordinatensysteme, welche

diese Bedingung erfüllen, worüber man, was speciell den Fall $n = 4$ angeht, die wiederholt citirte Arbeit von Hrn. Lange vergleichen mag. *Alle diese Coordinatensysteme könnten wir und sollten wir gleichfalls in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen.* Wir würden dann neue Beziehungen zwischen n-gliedrigen σ-Producten erhalten, welche Modulfunctionen n^{ter} Stufe sind, und vermuthlich alle solche Beziehungen erschöpfen, was ein wesentlicher Beitrag zur Lehre von den Moduln n^{ter} Stufe sein müsste.

§. 2. Die quadratischen Relationen zwischen den X_α.

Da sich aus den n Grössen X_α im Ganzen $\frac{n(n+1)}{2}$ Glieder zweiten Grades bilden lassen, deren jedes an $2n$ Stellen des Periodenparallelogrammes der u-Ebene verschwindet, so müssen nach dem bekannten Hermite'schen Satze (siehe meine erstgenannte Note) $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängige quadratische Relationen zwischen den X_α existiren. Für $n = 5$ hat Hr. Bianchi die betreffenden Relationen durch besondere Ueberlegungen aufgestellt*). Man erhält dieselben allgemein, indem man von der σ-Relation ausgeht:

$$(54)\qquad \begin{aligned} &\sigma(t+u)\,.\,\sigma(t-u)\,.\,\sigma(v+w)\,.\,\sigma(v-w)\\ +\,&\sigma(t+v)\,.\,\sigma(t-v)\,.\,\sigma(w+u)\,.\,\sigma(w-u)\\ +\,&\sigma(t+w)\,.\,\sigma(t-w)\,.\,\sigma(u+v)\,.\,\sigma(u-v)=0\,. \end{aligned}$$

Man verstehe hier nämlich unter σ speciell die σ-Function mit den Perioden $\frac{\omega_1}{n}$, ω_2 und substituire nun für t, u, v, w die folgenden Argumente:

$$\frac{u}{2}-\frac{\alpha_1\omega_2}{n},\quad \frac{u}{2}-\frac{\alpha_2\omega_2}{n},\quad \frac{u}{2}-\frac{\alpha_3\omega_2}{n},\quad \frac{u}{2}-\frac{\alpha_4\omega_2}{n}\,.$$

---

*) Dieselben Relationen finden sich auch, und zwar in ganz ähnlicher Weise abgeleitet, wie bei Hrn. Bianchi, in Halphen's grosser Abhandlung: *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*, siehe t. XXVIII der Mémoires présentés à l'Académie des Sciences (p. 289 der Abhandlung).

Wir bekommen dann eine Gleichung, die sich vermöge der in (26) enthaltenen Definition der X_α und der Bezeichnung z_α für ihre Nullwerthe sofort in folgende umsetzt:

$$(55)\qquad \begin{aligned} & z_{\alpha_1-\alpha_2}\cdot z_{\alpha_3-\alpha_4}\cdot X_{\alpha_1+\alpha_2}\cdot X_{\alpha_3+\alpha_4} \\ + \; & z_{\alpha_1-\alpha_3}\cdot z_{\alpha_4-\alpha_2}\cdot X_{\alpha_1+\alpha_3}\cdot X_{\alpha_4+\alpha_2} \\ + \; & z_{\alpha_1-\alpha_4}\cdot z_{\alpha_2-\alpha_3}\cdot X_{\alpha_1+\alpha_4}\cdot X_{\alpha_2+\alpha_3} = 0\,. \end{aligned}$$

Ich behaupte, dass in diese eine Formel die $\frac{n(n-3)}{2}$ gesuchten linear unabhängigen quadratischen Relationen bereits eingeschlossen sind.

Zum Beweise brauchen wir nur zu zeigen, dass unsere Relationen (55) *mindestens* mit $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängigen Relationen äquivalent sind: denn grösser kann die Zahl der linear unabhängigen Relationen nach dem Hermite'schen Satze ohnehin nicht sein. Nun enthält jede in (55) einbegriffene Gleichung nur Glieder $X_i\,X_k$ von einer bestimmten Indexsumme $i+k=s$. Linear abhängig können also nur solche Gleichungen sein, welche dasselbe s besitzen. *Unter ihnen finden sich nun*, wie ich zunächst bemerke, *jedesmal $\frac{n-3}{2}$ unabhängige.* Wählt man nämlich irgend zwei Terme von der Indexsumme s nach Belieben aus: $X_i\,.\,X_{s-i}$ und $X_{i'}\,.\,X_{s-i'}$, so gestattet die Formel (55), alle $\frac{n-3}{2}$ anderen Terme derselben Indexsumme durch diese linear auszudrücken. *Jetzt kann s im Ganzen die Werthe haben*: $0, 1, \ldots, (n-1)$. Daher haben wir in der That $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängige Relationen, was zu beweisen war. —

Setzen wir in (55) $u=0$, so bekommen wir biquadratische Relationen für die z_α. Diese Identitäten stimmen ohne Weiteres mit denjenigen überein, die ich im 17. Bande der Mathematischen Annalen (p. 573) angegeben habe und die dort in der That auch aus der Relation (54) [resp. der gleichlautenden ϑ-Relation] abgeleitet sind.

§. 3. Das Integral erster Gattung n^{ter} Stufe.

Um jetzt das Integral u durch die X_α auszudrücken, recurrire ich abermals auf die allgemeine Theorie der doppeltperiodischen Functionen. Es seien α, β irgend zwei in Bezug auf den Modul n verschiedene Indices. Wir bilden uns dann, indem wir $X_\alpha(u) : X_\beta(u)$ nach u differentiiren, den Ausdruck:

$$(56) \qquad \frac{X_\beta . dX_\alpha - X_\alpha . dX_\beta}{X_\beta^2 . du} .$$

Derselbe ist eine doppeltperiodische Function von u, welche $2n$-mal (je zweimal an jeder Stelle $X_\beta = 0$) im Periodenparallelogramm der u-Ebene unendlich und also auch $2n$-mal daselbst gleich Null wird. Er lässt sich also in die Gestalt setzen:

$$(57) \qquad \frac{\Sigma a_{ik} X_i X_k}{X_\beta^2} ,$$

wo die Summe zunächst über alle Indexcombinationen i, k zu nehmen sein wird. Wir werden unser Ziel erreicht haben, sobald wir die hier auftretenden a_{ik} kennen. Denn wir haben dann:

$$(58) \qquad u = \int \frac{X_\beta . dX_\alpha - X_\alpha . dX_\beta}{\Sigma a_{ik} X_i X_k} ,$$

und damit in der That unsere Aufgabe erledigt.

Ich sage jetzt zunächst, dass die a_{ik} der Mehrzahl nach gleich Null genommen werden können. Zunächst nämlich folgt, wenn wir Formel (27) in Anwendung bringen, also das u in den $X(u)$ um $\frac{\lambda \omega_1}{n}$ vermehren, wobei du ungeändert bleibt, dass alle diejenigen Terme in (57) sich gegenseitig wegheben, deren Indexsumme $(i + k)$ von $(\alpha + \beta)$ verschieden ist. Unter je dreien der sonach allein in Betracht kommenden Glieder $X_i X_k$ besteht aber, wie wir gerade sahen, eine lineare Relation. *Wir können unsere Summe also auf eine lineare Combination irgend zweier dieser Glieder beschränken.*

Wir setzen jetzt dem Gesagten entsprechend, indem wir mit γ eine Zahl bezeichnen, welche weder mit α noch mit β modulo n congruent ist:

$$(59)\quad X_\beta\cdot\frac{dX_\alpha}{du}-X_\alpha\cdot\frac{dX_\beta}{du}=aX_\alpha X_\beta+bX_\gamma X_{\alpha+\beta-\gamma}\,,$$

wo jetzt nur noch die beiden Constanten a, b zu bestimmen sind. Dies aber gelingt sofort vermöge unserer Nullwerthe z_α, A'_α. Durch geeignete Anwendung von (28) leiten wir nämlich aus (59) zuvörderst folgende zwei Gleichungen ab:

$$X_{\beta-\gamma}\cdot\frac{dX_{\alpha-\gamma}}{du}-X_{\alpha-\gamma}\cdot\frac{dX_{\beta-\gamma}}{du}=aX_{\alpha-\gamma}\cdot X_{\beta-\gamma}+bX_0\,.\,X_{\alpha+\beta-2\gamma}\,,$$

$$X_{\beta-\alpha}\cdot\frac{dX_0}{du}-X_0\,.\,\frac{dX_{\beta-\alpha}}{du}=aX_0X_{\beta-\alpha}+bX_{\gamma-\alpha}\cdot X_{\beta-\gamma}\,,$$

und erhalten hieraus, indem wir $u=0$ setzen:

$$(60)\quad\begin{cases}\dfrac{z_{\beta-\gamma}\cdot A'_{\alpha-\gamma}-z_{\alpha-\gamma}\cdot A'_{\beta-\gamma}}{2}=a\,.\,z_{\alpha-\gamma}\cdot z_{\beta-\gamma}\,,\\[2mm] z_{\beta-\alpha}\cdot A'_0\qquad\qquad\qquad\qquad=b\,.\,z_{\gamma-\alpha}\cdot z_{\beta-\gamma}\,,\end{cases}$$

was die gesuchten Formeln sind. Tragen wir in (59), (58) ein, *so haben wir folgenden allgemeinen Werth des Integrals erster Gattung n^{ter} Stufe erhalten:*

$$(61)\quad u=\int\frac{2z_{\alpha-\gamma}z_{\beta-\gamma}(X_\alpha dX_\beta-X_\beta dX_\alpha)}{(z_{\beta-\gamma}A'_{\alpha-\gamma}-z_{\alpha-\gamma}A'_{\beta-\gamma})X_\alpha X_\beta+2z_{\alpha-\beta}A'_0\,.\,X_\gamma X_{\alpha+\beta-\gamma}}\,.$$

Erst in den »Schlussbemerkungen« werden wir dazu kommen, dies Resultat mit demjenigen zu vergleichen, welches Hr. Bianchi bei $n=5$ abgeleitet hat, indem hierzu eine genauere Kenntniss des Zusammenhangs zwischen den z_α und A'_α erforderlich ist.

§. 4. Verhalten der X_α bei linearer Transformation der ω_1, ω_2 (Allgemeines).

Was das Verhalten der X_α bei linearer Transformation der Perioden ω_1, ω_2 angeht, so wissen wir bereits, dass die X_α Moduln n^{ter} Stufe sind, d. h. bei allen denjenigen linearen Transformationen ungeändert bleiben, die modulo n zur Identität congruent sind. Nun sieht man leicht, dass bei jeder anderen linearen Transformation die X_α sich ändern müssen. Es folgt

dies sofort, wenn man die Nullstellen der X_α im Periodenparallelogramm in Betracht zieht. *Wir schliessen hieraus, dass unsere X_α bei linearer Transformation der Perioden eine Gruppe von Umänderungen erleiden, welche mit dem Inbegriff der durch Congruenzzeichen definirten Operationen:*

$$(62)\quad \begin{cases} \omega_1' \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega_2\,, \\ \omega_2' \equiv \gamma\omega_1 + \delta\omega_2\,, \end{cases} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1) \quad [\text{mod.}\, n]$$

holoedrisch isomorph ist.

Ich sage nun zunächst, dass diese Umänderungen *homogene lineare Substitutionen der X_α* sein müssen. In der That, jedes $X_\alpha(u, \omega_1', \omega_2')$ [wo ω_1', ω_2' die transformirten Perioden sind] ist wieder ein n-gliedriges σ-Product der früher betrachteten Art, also, nach dem Hermite'schen Satze, in der Gestalt darstellbar:

$$(63)\qquad X_\alpha(u, \omega_1', \omega_2') = \Sigma c_{\alpha,\beta} \cdot X_\beta(u, \omega_1, \omega_2)\,,$$

wo die $c_{\alpha,\beta}$ von u unabhängig sind.

Es gilt jetzt, die $c_{\alpha,\beta}$ auszuwerthen, was sofort geschehen soll. Dabei ergibt sich dann das schöne Resultat, *dass die $c_{\alpha,\beta}$ auch von den Perioden ω_1, ω_2 unabhängig werden, dass also die in Aussicht genommene Gruppe von Umänderungen der X_α eine Gruppe linearer Substitutionen mit numerischen Coëfficienten ist.*

Um dies Resultat in einfachster Weise abzuleiten, benutze man, dass sich alle linearen Transformationen der ω_1, ω_2 bekanntermassen aus folgenden beiden:

$$S: \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\,, \\ \omega_2' = \omega_2 + \omega_1\,; \end{cases} \qquad T: \begin{cases} \omega_1' = -\omega_2\,, \\ \omega_2' = +\omega_1 \end{cases}$$

durch Wiederholung und Combination herstellen lassen. Nun ist der Erfolg von S aus der Formel (37) sofort abzulesen. Wir finden, in Uebeinstimmung mit unserer Behauptung:

$$(64)\quad X_\alpha(u, \omega_1, \omega_1 + \omega_2) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} \cdot X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)\,.$$

Es kommt also nur noch darauf an, $X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1)$ durch die ursprünglichen X_α darzustellen, was in den folgenden Paragraphen geschehen soll.

§. 5. Specielle Betrachtung von $X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1)$.

Den Entwickelungen von Hrn. Bianchi folgend, werde ich jetzt $X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1)$ zunächst nur bis auf einen von u freien Factor bestimmen. Wir setzen, der Formel (63) entsprechend:

$$X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^\beta c_{\alpha,\beta} \cdot X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) .$$

Jetzt vermehren wir u einmal um $\frac{\lambda\omega_1}{n}$, das andere Mal um $\frac{\mu\omega_2}{n}$. Wir haben in (27), (28) bestimmt, welche Umänderungen dabei die ursprünglichen $X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$ erleiden. Die Aenderungen von $X_\beta(u, \omega_1, \omega_2)$ wie von $X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1)$ ergeben sich daraus durch blosse Buchstabenvertauschung. Wir gewinnen so die beiden Formeln:

$$X_{\alpha-\lambda}(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^\beta c_{\alpha,\beta} \cdot \varepsilon^{-\lambda\beta} . X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

$$\varepsilon^{\mu\alpha} . X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^\beta c_{\alpha,\beta} \cdot X_{\beta-\mu}(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

die wir auch folgendermassen schreiben können:

$$X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^\beta c_{\alpha+\lambda,\beta} \cdot \varepsilon^{-\lambda\beta} . X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

$$X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^\beta c_{\alpha,\beta+\mu} \cdot \varepsilon^{-\mu\alpha} . X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

(wo jetzt die Indices als unbeschränkt veränderliche ganze Zahlen angesehen werden, die allein modulo n in Betracht kommen). *Daher ist überhaupt:*

$$c_{\alpha+\lambda,\beta} = \varepsilon^{\lambda\beta} . c_{\alpha,\beta} , \qquad c_{\alpha,\beta+\mu} = \varepsilon^{\mu\alpha} . c_{\alpha,\beta}$$

und also:

$$c_{\alpha,\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} . c_{0,0} .$$

Schreiben wir noch C für $c_{0,0}$ und lassen der Symmetrie halber die Summation über β von $-\frac{n-1}{2}$ bis $+\frac{n-1}{2}$ gehen, so haben wir:

$$(65)\quad X_\alpha(u,\,-\omega_2,\,\omega_1) = C\,.\sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_{\beta}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,.\,X_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,,$$

was die in Aussicht genommene Formel ist, auf die auch Hr. Bianchi auf p. 243 seiner Arbeit hinweist.

Wir wollen der grösseren Deutlichkeit halber die hier auftretende Grösse bis auf Weiteres mit $C(\omega_1,\,\omega_2)$ bezeichnen. Jedenfalls ist C eine Function nullter Dimension in $\omega_1,\,\omega_2$, denn die in (65) beiderseits auftretenden X sind in $u,\,\omega_1,\,\omega_2$ gemeinsam von der $\frac{3n-1}{2}$ ten Dimension. Wir schliessen jetzt aus (65) weiter:

$$X_{-\beta}(u,\,-\omega_1,\,-\omega_2) = C(-\omega_2,\,\omega_1)\,.\sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_{\gamma}\,\varepsilon^{-\beta\gamma}\,.\,X_\gamma(u,\,-\omega_2,\,\omega_1)\,.$$

Nun ist aber:

$$X_{-\beta}(u,\,-\omega_1,\,-\omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,X_{-\beta}(-u,\,\omega_1,\,\omega_2)$$

oder nach (29):

$$(66)\quad X_{-\beta}(u,\,-\omega_1,\,-\omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,X_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,,$$

eine Formel, auf die wir noch zurückkommen. — Demnach wird:

$$X_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)$$
$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,C(-\omega_2,\,\omega_1)\,.\sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_{\gamma}\,\varepsilon^{-\beta\gamma}\,.\,X_\gamma(u,\,-\omega_2,\,\omega_1)\,.$$

Tragen wir die so gewonnenen Werthe der ursprünglichen X_β in (65) rechter Hand ein, so heben sich, wie es sein muss, bei der Summation nach β alle Terme fort, in denen γ von α verschieden ist, während die Zusammenziehung der übrigen die Formel ergibt:

$$(67)\qquad C(\omega_1,\,\omega_2)\,.\,C(-\omega_2,\,\omega_1) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\,.$$

Wir schliessen hieraus, dass $C(\omega_1, \omega_2)$ in folgende Form gesetzt werden kann:

$$(68) \qquad C(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pm 1}{i^{\frac{n-1}{2}} . \sqrt{n}} . \frac{\varphi(\omega_1, \omega_2)}{\varphi(-\omega_2, \omega_1)},$$

wo φ eine homogene Function von ω_1, ω_2 bedeuten soll und das doppelte Vorzeichen zunächst unbestimmt ist.

Weiter kann die allgemeine hier eingehaltene Betrachtungsweise nicht führen, da bei der endgültigen Bestimmung von C einmal der Factor $\sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$ in Betracht kommt, den wir in die Definition der X_α mit aufgenommen haben, dann aber auch der Umstand, dass wir den imaginären Theil von $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ stets positiv nehmen. Wir greifen also jetzt auf die Reihenentwickelungen (37), (38) zurück, in welchen diese beiden Bemerkungen zur Geltung kommen. *Dabei ergibt sich dann, dass C einfach folgenden Werth hat:*

$$(69) \qquad C = \frac{1}{i^{\frac{n-1}{2}} . \sqrt{n}}$$

(unter $\sqrt{n}$ die positive Wurzel verstanden), *dass also* (65) *folgendermassen geschrieben werden kann:*

$$(70) \quad i^{\frac{n-1}{2}} . \sqrt{n} . X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_{\beta}\, \varepsilon^{\alpha\beta} . X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) .$$

Um noch einmal auf unsere allgemeine Ueberlegung zurückzukommen: wir können aus (68) schliessen, dass C auf alle Fälle gleich $\pm 1 : i^{\frac{n-1}{2}} . \sqrt{n}$ genommen werden kann, sobald wir statt der ursprünglichen $X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$ von vorne herein die Producte $\varphi(\omega_1, \omega_2) . X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$ in Betracht ziehen wollen. Wenn den Reihenentwickelungen (37), (38) zufolge das $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ einfach gleich 1 zu nehmen ist, so heisst dies, dass wir gleich anfangs die X_α mit dem richtigen nur von ω_1, ω_2 abhängigen Factor ausgestattet haben. In der That ist es die *Forderung* $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 1$ gewesen, welche mich ursprünglich

veranlasst hat, in die Definition der X_α den Factor $\sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$ mit aufzunehmen.

Das *Vorzeichen* von C wird durch die letzte Bemerkung wohlverstanden weder bestimmt noch überhaupt in Discussion gezogen. Vielmehr hängt dasselbe wesentlich von dem bereits erwähnten Umstande ab, dass $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ einen positiv imaginären Theil besitzen soll. Wollte man die entgegengesetzte Festsetzung machen (die an sich gerade so zulässig ist), so würde sich das Vorzeichen von C, wie überhaupt das Vorzeichen in allen auf die lineare Transformation der ϑ-Functionen bezüglichen Formeln, dadurch modificiren, dass $(-i)$ an die Stelle von $(+i)$ tritt.

§. 6. Bestimmung der Grösse C.

Zur Bestimmung der Grösse C genügt es natürlich, dem u in (65) irgend einen particulären Werth zu ertheilen, also beispielsweise die X_α durch die z_α zu ersetzen, wodurch man zu den Formeln zurückgeführt würde, die ich diesbezüglich im 17. Annalenbande (p. 571) gegeben habe. Wenn ich trotzdem auf die allgemeinen Reihenentwickelungen (37), (38) zurückgreife, so geschieht es, weil sie sich mit der gleichen Leichtigkeit behandeln lassen, wie irgendwelche specielle Fälle.

Wir werden zunächst an (37) anknüpfen. Indem wir der Kürze halber setzen:

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{i \cdot q^{\frac{n}{4}} \cdot \Pi(1-q^{2h})^{3n}} = M\,,$$

finden wir:

$$\sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_{\beta}\, \varepsilon^{\alpha\beta} \cdot X_\beta(u, \omega_1, \omega_2)$$

$$= \sqrt{n} \cdot M \cdot \sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_{\beta} \sum_{0}^{\infty}{}_{h} (-1)^{\beta+h} \cdot \varepsilon^{\alpha\beta} \left\{ \begin{array}{l} q^{\frac{[(2h+1)n-2\beta]^2}{4n}} \cdot e^{[(2h+1)n-2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ -\, q^{\frac{[-(2h+1)n-2\beta]^2}{4n}} \cdot e^{[-(2h+1)n-2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array} \right\}$$

oder, wenn wir je zwei Terme, welche dieselbe Potenz von q enthalten, zusammennehmen:

$$(71)\qquad \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} . X_\beta(u, \omega_1, \omega_2)$$

$$= \sqrt{n} . M . \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{h+\beta} . q^{\frac{[(2h+1)n+2\beta]^2}{4n}} . \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{-\alpha\beta} . e^{[(2h+1)n+2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ -\varepsilon^{\alpha\beta} . e^{[-(2h+1)n-2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array} \right\} .$$

Mit dieser Formel bringen wir jetzt die andere zum Vergleich, welche sich aus (38) für $X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1)$ ergibt und die folgendermassen lautet:

$$X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1)$$

$$= e^{(n-1)\frac{i\pi}{4}} . (-1)^\alpha . M . \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k . q^{\frac{(2k+1)^2}{4n}} . \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} . e^{(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ -e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} . e^{-(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array} \right\} .$$

Wir verwandeln zu dem Zwecke die in (71) rechter Hand auftretende Doppelsumme, indem wir $(2h+1)n + 2\beta = 2k + 1$ setzen und nun k von 0 bis ∞ laufen lassen. Dabei wird $(-1)^{h+\beta} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . (-1)^k$ sein, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ aber durch folgenden Ausdruck ersetzt werden können: $(-1)^\alpha . e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}}$. Solcherweise kommt:

$$\sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} . X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \sqrt{n} . (-1)^\alpha . M$$

$$. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k . q^{\frac{(2k+1)^2}{4n}} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} . e^{(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ -e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} . e^{-(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array} \right\} .$$

Daher lesen wir ab:

$$X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} . e^{(n-1)\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{n}} . \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} . X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

was mit der in Aussicht genommenen Formel (70) übereinstimmt.

Die Relation zwischen ϑ-Reihen, welche bei dem gerade durchgeführten Vergleiche zu Grunde liegt und die wir folgendermassen explicite schreiben können:

$$(72)\qquad (-1)^{\alpha}\cdot\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1}-\frac{\alpha\pi}{n},\ q^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sum_{\beta=+\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}(-1)^{\beta}\cdot\varepsilon^{\alpha\beta}\cdot q^{\frac{\beta^2}{n}}\cdot e^{-\frac{2\beta u\pi i}{\omega_1}}\cdot\vartheta_1\left(\frac{nu-\beta\omega_2}{\omega_1}\pi;\ q^{n}\right),$$

ist als solche natürlich von durchaus elementarem Charakter und in der That auch sonst gelegentlich bemerkt worden, wie ich in Berichtigung einer früheren Angabe hier constatiren muss. Ich will hier namentlich auf Hrn. Brioschi's Entwickelungen im 47. Bande der Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1858) verweisen (cf. p. 339 ff.: *Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques*), insofern Hr. Brioschi dort Zielpuncte verfolgt, die mit unseren eigenen auf das engste verwandt sind*). Man kann die Relation (72) auch als speciellen Fall der allgemeinen auf ϑ-Functionen mit p Veränderlichen bezüglichen Formel auffassen, welche die Herren Prym und Krazer im 3. Bande der Acta mathematica entwickelt haben (*Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel*), ein Umstand, auf den ich bei Gelegenheit zurückkommen möchte**). Wahrscheinlich umfasst die Prym-Krazer'sche Relation die Gesammtheit jener Coordinatenverwandlungen, die wir vorstehend am Schlusse von §. 1 (des gegenwärtigen Abschnitts) postulirten.

§. 7. Bemerkungen zur Substitutionsgruppe der X_α.

Die Substitutionsgruppe der X_α, welche aus den beiden erzeugenden Operationen (64), (70):

---

*) Man sehe auch Scheibner im Jahrgange 1862 dieser Berichte, p. 131.

**) Vergl. Krazer im 20. Bande der Mathematischen Annalen (*Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind*), wo der Verf. ausdrücklich an die von Hrn. Bianchi für $n = 3$ gegebenen Entwickelungen anknüpft.

$$(73)\left\{\begin{aligned} &S:\ X_\alpha(u,\omega_1,\omega_2+\omega_1)=\varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}.X_\alpha(u,\omega_1,\omega_2)\,,\\ &T:\ i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}\,.\,X_\alpha(u,-\omega_2,\omega_1)\\ &\qquad\qquad=\sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_\beta\,\varepsilon^{\alpha\beta}.X_\beta(u,\omega_1,\omega_2)\end{aligned}\right.$$

durch Wiederholung und Combination erwächst, scheint in mehrfacher Hinsicht besonderes Interesse zu besitzen. In der That bildet sie den naturgemässen Durchgangspunct zu den beiden anderen Gruppen linearer Substitutionen, welche man sonst in der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen betrachtet hat: der Gruppe von $\frac{n+1}{2}$ Variabeln, welche den sogenannten Jacobi'schen Gleichungen zu Grunde liegt, und der Gruppe von $\frac{n-1}{2}$ Variabeln, auf die ich im 15. Bande der Mathematischen Annalen (cf. p. 277 daselbst) und später im 17. Bande (p. 570) die Aufmerksamkeit lenkte*). Diese Gruppen entstehen einfach, wenn man in (73) statt der X_α die A_α, B_α aus (47), (48) einführt. Man findet dann nämlich einerseits:

$$(74)\left\{\begin{aligned} &S:\ \mathrm{A}_\alpha(u,\omega_1,\omega_2+\omega_1)=\varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}.\mathrm{A}_\alpha(u,\omega_1,\omega_2)\,,\\ &T:\left\{\begin{aligned} &i^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{n}\,.\,\mathrm{A}_0(u,-\omega_2,\omega_1)=\sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}_\beta\,\mathrm{A}_\beta(u,\omega_1,\omega_2)\,,\\ &i^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{n}\,.\,\mathrm{A}_\alpha(u,-\omega_2,\omega_1)=2\mathrm{A}_0(u,\omega_1,\omega_2)\\ &\qquad+\sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}_\beta(\varepsilon^{\alpha\beta}+\varepsilon^{-\alpha\beta})\mathrm{A}_\beta(u,\omega_1,\omega_2)\,,\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

wo α in der letzten Formel nur die Werthe $1, 2, \dots \frac{n-1}{2}$

---

*) Man vergl. wegen dieser Gruppen eine demnächst im 25. Annalenbande erscheinende Arbeit von Hrn. Morera: *Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen.*

zu durchlaufen hat, andererseits, unter derselben Beschränkung für die Werthe von α:

$$(75)\quad \begin{cases} S:\ \mathrm{B}_\alpha(u,\,\omega_1,\,\omega_2+\omega_1) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}\,.\,\mathrm{B}_\alpha(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,, \\ T:\ i^{\frac{n-1}{2}}\,.\,\sqrt{n}\,.\,B_\alpha(u,\,-\omega_2,\,\omega_1) \\ \qquad\qquad = \sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}^{\beta}(\varepsilon^{\alpha\beta}-\varepsilon^{-\alpha\beta})\,\mathrm{B}_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,, \end{cases}$$

was genau die in Betracht kommenden Formeln sind.

Aus dieser Ableitung der in Rede stehenden Substitutionsgruppen geht nun auch der wahre Grund für die merkwürdige Wechselbeziehung derselben hervor, die ich in Band XV der Mathematischen Annalen l. c. zur Sprache brachte. Wir fanden in (66):

$$X_{-\alpha}(u,\,-\omega_1,\,-\omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,X_\alpha(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,.$$

Daher folgt:

$$(76)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_\alpha(u,\,-\omega_1,\,-\omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,\mathrm{A}_\alpha(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,; \\ \mathrm{B}_\alpha(u,\,-\omega_1,\,-\omega_2) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\,.\,\mathrm{B}_\alpha(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,, \end{cases}$$

und hierin ist begründet, *dass immer nur eine der beiden neuen Substitutionsgruppen mit der Gruppe der Operationen* (62) *holoedrisch isomorph ist, der Isomorphismus der anderen aber hemiedrisch ist.*

Was die Jacobi'sche Gleichung angeht, zu welcher die hier mit A_α bezeichneten Theilgrössen gehören, so hat sie diejenigen Werthe zu Wurzeln, welche aus

$$X_0(u,\,\omega_1,\,\omega_2)$$

durch Anwendung der linearen Transformation der Perioden entstehen*). Um dieser Gleichung Coefficienten zu ertheilen,

*) Ich halte im Texte immer nur an der Annahme fest, dass n eine ungerade Zahl sein soll. Gewöhnlich denkt man sich, wenn von Jacobi'schen Gleichungen die Rede ist, das n überdies als Primzahl, so dass hier eine kleine, ob auch selbstverständliche Verallgemeinerung der üblichen Terminologie vorliegt. Ausserdem ist, was man nicht übersehen darf, X_0^2 und nicht X_0 diejenige Grösse, welche Hr. Brioschi als Wurzel der Jacobischen Gleichung bezeichnet. Man vergl. hierzu meine *Vorlesungen über das Ikosaeder etc.* (Leipzig 1884), insbesondere p. 148, Anmerkung.

die von $p(u)$, g_2, g_3 rational abhängen, wird man natürlich als Unbekannte den Quotienten $X_0 : \sigma(u)^n$ einführen, worauf unsere A_α entsprechend durch $A_\alpha : \sigma(u)^n$ zu ersetzen sein werden. Die so entstehende Jacobi'sche Gleichung ist übrigens wohlbekannt: man sehe Brioschi im 47. Bande der Comptes Rendus (l. c.) und im Jahrgange 1866 der Atti della R. Accademia di Napoli, Kronecker im Berliner Monatsbericht von 1861, Kiepert im 87. Bande des Journals für Mathematik [insbesondere p. 214 daselbst, Formel (33)]. Ein Vergleich der erstgenannten Arbeiten mit der unseren wird nur dadurch erschwert, dass beide Autoren durchweg an den Jacobi'schen Bezeichnungen festhalten und also $X_0 : \sigma(u)^n$ nicht nach $p(u)$, sondern nach $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ entwickeln.

Die Jacobi'sche Gleichung, der die verschiedenen Werthe von $\sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$ genügen, ist nach dem Früheren nur ein specieller Fall der gerade besprochenen Gleichung. Nun weiss man aber, dass allemal, wenn die ungerade Zahl n von der Form $6g \pm 1$ ist, bereits $\sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$ einer Jacobi'schen Gleichung genügt, deren Coefficienten ebenfalls in g_2, g_3 rational sind*), und es hat Hr. Kiepert gezeigt, dass man auch diese Gleichungen so verallgemeinern kann, dass neben g_2, g_3 das $p(u)$ in den Coefficienten vorkommt**). Indem ich versuchte, mir die Theilwerthe zu berechnen, die zu dieser Kiepert'schen Gleichung gehören, und die ich fornerhin mit $A_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$ bezeichnen werde, wurde ich zu einem zweiten einfachen Systeme von n Grössen geführt, welches sich bei linearer Transformation der Perioden ganz ähnlich verhält, wie das System der X_α. Ich will die betreffenden Formeln hier um so lieber mittheilen, als ich die Nullwerthe der $A_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$, die ich schlechthin A_α nenne, sogleich (in den Schlussbemerkungen) ohnehin gebrauche.

---

*) Statt alle einschlägigen Citate hier noch einmal zusammenzustellen, will ich hier nur auf die Abhandlung von Hurwitz verweisen, in der man sie vereinigt findet: *Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe*, Bd. 18 der Mathematischen Annalen.

**) Journal für Mathematik, Bd. 87, p. 213.

§. 8. Die Functionen $\tau(u)$, $\varphi(x, q)$ und die Y_γ.

Um die neuen Grössen, die ich Y_γ nenne, aufzustellen, seien $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ die Weierstrass'schen Functionen:

$$(77)\quad \begin{cases} \sigma_1(u) = -\dfrac{e^{\frac{\eta_1 u}{2}} \cdot \sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}\,; \\ \sigma_2(u) = -\dfrac{e^{\frac{\eta_2 u}{2}} \cdot \sigma\left(u - \frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}\,, \\ \sigma_3(u) = -\dfrac{e^{\frac{(\eta_1+\eta_2)u}{2}} \cdot \sigma\left(u - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}\,, \end{cases}$$

die sich übrigens, wenn wir die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes (§. 1) aufnehmen, als specielle Fälle der Quotienten $\sigma_{\lambda,\mu}(u) : \sigma_{\lambda,\mu}$ darstellen. Sei ferner, der Einfachheit halber:

$$(78)\qquad \sigma_1(u) \cdot \sigma_2(u) \cdot \sigma_3(u) = \tau(u)\ .$$

Hr. Kiepert hat nun l. c. bemerkt, dass diese τ-Function einer Reihenentwickelung fähig ist, welche der Entwickelung durchaus analog ist, die man für die σ-Function selbst aus der Jacobischen ϑ-Reihe ableitet [siehe oben Formel (3), (4)]. Man setze nämlich:

$$(79)\quad \tau(u, \omega_1, \omega_2) = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot e^{\frac{3\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt[24]{\Delta}} \cdot \varphi\left(\frac{u\pi}{\omega_1}, q\right) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \cdot e^{\frac{3\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt[24]{\Delta}} \cdot \varphi\left(\frac{u\pi}{\omega_2}, r\right),$$

wo $\sqrt[24]{\Delta}$ beidemal denselben durch Formel (2) definirten Werth bedeuten soll. *Dann hat man für $\varphi(x, q)$ die folgende Reihe:*

$$(80)\quad \varphi(x, q) = \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k \cdot q^{\frac{(6k+1)^2}{12}} \cdot \{e^{(6k+1)ix} + e^{-(6k+1)ix}\},$$

Das Gelingen unseres Ansatzes scheint darin begründet, dass in dieser Reihe nur quadratische Exponenten einer festen Potenz von q $(q^{\frac{1}{n}})$ auftreten und übrigens $\tau(u, \omega_1, \omega_2)$ als Modulfunction betrachtet von der ersten Stufe ist*).

In genauer Analogie mit dén auf $\sigma(u)$ bezüglichen Entwickelungen unseres ersten Abschnittes setze ich jetzt zunächst:

$$(81)\qquad \tau_{\lambda,\mu}(u, \omega_1, \omega_2)$$
$$= e^{3\frac{\lambda\eta_1+\mu\eta_2}{n}\left(u-\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)}\cdot\tau\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

und ferner:

$$(82)\qquad Y_\gamma(u, \omega_1, \omega_2)$$
$$= (-1)^\gamma\cdot\sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}\cdot e^{-3G_1u^2}\cdot\tau_{0,\gamma}\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)\;.$$

Tragen wir nunmehr die Reihenentwickelungen (79), (80) ein, so erhalten wir einmal, der Substitution S entsprechend:

$$(83)\quad S:\ Y_\gamma(u, \omega_1, \omega_2+\omega_1) = \varepsilon^{-\frac{3\gamma(n-\gamma)}{2}}\cdot Y_\gamma(u, \omega_1, \omega_2)\;,$$

dann aber, indem wir die Rechnungen des §. 6 mutatis mutandis wiederholen:

$$(84)\quad T:\ i^{\frac{n\pm1}{6}}\cdot\sqrt{n}\cdot Y_\gamma(u, -\omega_2, \omega_1)$$
$$= \sum_{\delta=-\frac{n-1}{2}}^{\delta=\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{3\gamma\delta}\cdot Y_\delta(u, \omega_1, \omega_2)\;.$$

Hier ist über das doppelte Vorzeichen in dem Exponenten von i so zu verfügen, dass derselbe eine ganze Zahl wird. — *Dies sind nun in der That Formeln, welche den für die X_α gültigen* (73) *genau entsprechen.* Allerdings sind wir nicht in der Lage, die auf τ bezügliche Formel, wie dies für die X_α in §. 5 geschah, a priori der Art nach zu erschliessen. Denn die Y_γ sind $3n$-gliedrige σ-Producte und es erscheint also keineswegs von vornherein als nothwendig, dass sich ihre transformirten Werthe

---

*) Ausser der Reihe (80) und der Reihe für ϑ_1 kennt man bis jetzt keine andere, welche beide Eigenschaften verbindet, aber es wäre sehr merkwürdig, wenn in der That keine weiteren Reihen dieser Art existiren sollten.

durch die ursprünglichen n allemal linear darstellen. Ich vermuthe übrigens, dass man dieses Verhalten aus dem Umstande ableiten kann, dass $\tau(u, \omega_1, \omega_2)$ eine Modulfunction erster Stufe ist.

Aus den Y_γ können wir jetzt wieder den Formeln (47), (48) folgend Systeme von $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ Variabeln zusammensetzen, die sich für sich linear transformiren. Wir wollen dieselben A_γ, B_γ nennen und also schreiben:

$$(85)\quad \begin{cases} A_0(u) = Y_0(u)\,, \quad A_1(u) = Y_1(u) + Y_{n-1}(u)\,, \quad \ldots. \\ \qquad A_{\frac{n-1}{2}}(u) = Y_{\frac{n-1}{2}}(u) + Y_{\frac{n+1}{2}}(u)\,, \\ B_1(u) = Y_1(u) - Y_{n-1}(u)\,, \quad \ldots\ldots \\ \qquad B_{\frac{n-1}{2}}(u) = Y_{\frac{n-1}{2}}(u) - Y_{\frac{n+1}{2}}(u)\,. \end{cases}$$

Insbesondere benennen wir die Nullwerthe der $A_\gamma(u)$, wie wir bereits sagten, mit A_γ. Diese A_γ sind dann diejenigen Theilwerthe, welche bei der Jacobi'schen Gleichung in Betracht kommen, von der

$$(86)\qquad Y_0(0) = \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta'}}$$

abhängt.

Schlussbemerkungen.

Wir haben in den voranstehenden Entwickelungen alle in Betracht kommenden Constanten durch die Moduln z_α und A'_α ausgedrückt, zu denen soeben noch, unter der Voraussetzung, an der wir jetzt festhalten, dass nämlich n durch 3 nicht theilbar sei, die A_γ hinzugetreten sind. Es fragt sich, wie diese Grössen von einander abhängen und wie wir sie als Functionen der rationalen Invarianten berechnen wollen. Ich beschränke mich in diesen Schlussbemerkungen darauf, einige vorläufige diesbezügliche Angaben zu machen.

Bemerken wir zunächst die selbstverständliche Formel:

$$\mathrm{A}'_0 = A_0^3\,.$$

Lassen wir hier beiderseits die Operation T eintreten, so erhalten wir:

$$\pm n \cdot \sum_0^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{A}'_\alpha = \left(\sum_0^{\frac{n-1}{2}} A_\gamma \right)^3 ,$$

wo das — oder das +-Zeichen anzuwenden ist, jenachdem $n+1$ oder $n-1$ durch 6 theilbar ist. Hieraus, indem wir ν-mal mit S operiren:

$$(87) \quad \pm n \cdot \sum_0^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{-\nu \frac{\alpha . n - \alpha}{2}} . \mathrm{A}'_\alpha = \left(\sum_0^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{-3\nu \frac{\gamma(n-\gamma)}{2}} . A_\gamma \right)^3 .$$

Hier müssen, wie schon Hr. Brioschi bemerkt hat*), die Potenzen von ε linker und rechter Hand übereinstimmen. Dies gibt einmal $\frac{n-1}{2}$ cubische Relationen für die A_γ, *andererseits aber finden wir, worauf es hier ankommt, die* A'_α *als rationale ganze Functionen dritten Grades der* A_γ.

Wir greifen jetzt auf eine wohlbekannte σ-Relation zurück, die sich hier so schreibt:

$$\tau(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma(2u)}{\sigma(u)}$$

und leiten aus ihr die Formel ab:

$$\frac{Y_\gamma(u)}{A_0} = \frac{X_{2\gamma}(2u)}{X_\gamma(u)} ,$$

aus der für $u = 0$ die folgende hervorgeht:

$$(88) \quad \frac{A_\gamma}{A_0} = \frac{z_{2\gamma}}{z_\gamma} ,$$

auf die ich auch im 17. Bande der Annalen (p. 569) aufmerksam machte. *Combiniren wir* (88) *mit* (87), *so haben wir das Resultat erreicht, dass wir unsere sämmtlichen Constanten durch* A_0 *und die* z_α *rational ausdrücken können.*

Was die Berechnung von A_0 angeht, so geschieht dieselbe direct aus jener eben besprochenen Gleichung (der Multiplicatorgleichung erster Stufe), deren Coefficienten in g_2, g_3 rational sind: wir haben einfach eine Wurzel dieser Gleichung zu berechnen. Eine weitere Frage, die wir hier nur berühren und

*) *Sopra una classe di equazioni modulari,* Annali di Matematica, ser. 2, t. IX, p. 167 ff.

auf die gelegentlich näher eingegangen werden muss, ist die, wie man am einfachsten die z_α berechnet, nachdem einmal A_0 bereits gefunden ist. Ich will in dieser Hinsicht hier nur folgende Formel mittheilen:

$$(89) \qquad z_1 . z_2 \ldots . z_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}} A_0^{\frac{n-3}{2}} . \Delta^{\frac{n^2-1}{24}} .$$

Dieselbe gestattet uns, im Falle $n = 5$, das A_0 rational durch die z_α, d. h. also durch z_1, z_2, auszudrücken [wie dies allemal möglich sein muss, wenn $n \equiv 1$ (mod. 4)]. Die Werthe der A' werden dann aus (86), (87) die folgenden:

$$A_0' = -z_1^3 z_2^3 : \Delta^3 ,$$

$$A_1' = -\frac{z_1^5 - 3 z_2^5}{5} . z_1 : \Delta^3 ,$$

$$A_2' = +\frac{3 z_1^5 + z_2^5}{5} . z_2 : \Delta^3 .$$

Wir wollen diese Werthe insbesondere in (61) eintragen. Wir finden dann für das »Integral erster Gattung fünfter Stufe«, indem wir l. c. $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$ setzen:

$$(90) \qquad u = \int \frac{-5\Delta^3 (X_1 dX_2 - X_2 dX_1)}{[(2z_1^5 - z_2^5) X_1 X_2 + 5 z_1^3 z_2^2 X_0 X_3]} ,$$

was mit dem Resultate, das Hr. Bianchi auf p. 261, 262 des 17. Annalenbandes angibt, übereinstimmt. Die unbestimmte Constante C, welche bei Hrn. Bianchi als Multiplicator auftritt und die in (90) fehlt, findet dadurch ihre Begründung, dass Hr. Bianchi nirgendwo die absoluten Werthe der X_α fixirt hat und also auch nicht die z_1, z_2 selbst, sondern nur deren Quotienten in Betracht zieht.

A. Mayer. *Zur Aufstellung der Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale bei variabeln Grenzwerthen* *).

Bei den Problemen des Maximums oder Minimums einfacher Integrale, welche eine oder mehrere unbekannte Functionen und ihre ersten Differentialquotienten enthalten, hat man die zweite Variation bisher hauptsächlich nur für den Fall untersucht, wo die Grenzen des Integrales, sowie die Werthe, welche die unbekannten Functionen in diesen Grenzen annehmen sollen, fest gegeben sind [1]. In der That ist dies auch der Hauptfall in der eigentlichen Variationsrechnung, d. h. in dem Theile der allgemeinen Theorie der Maxima und Minima, der vollständig der Integralrechnung angehört. Denn bei nicht gegebenen Grenzwerthen kann man die Aufgabe in zwei Theile zerlegen, von denen der erste eben jenes Hauptproblem ist, während der zweite, erst nach diesem zu behandelnde, sich auf eine blosse Aufgabe des gewöhnlichen Maximums oder Minimums reducirt.

Soll nämlich beispielsweise eine gewisse Curve $y = y\,(x)$ von allen Curven der Ebene, deren Endpunkte $x_0\,y_0$ und $x_1\,y_1$ auf zwei gegebenen Curven liegen, diejenige sein, für welche ein gegebenes Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f\,(x, y, y')\,dx$$

---

*) Vorgelegt und zum Druck übergeben in der Sitzung am 14. Nov. 1884.

1) Soweit mir bekannt ist, sind bei variabeln Grenzwerthen solche Probleme über die erste Variation hinaus nur verfolgt worden von Lundström in der Abhandlung »Distinction des max. et min. dans un problème isopérimétrique«, Nova acta reg. soc. sc. Upsaliensis, Ser. 3, Vol. VII, und von G. Erdmann in dem Aufsatze »Zur Untersuchung der zweiten Variation einfacher Integrale«, Schlömilch's Zeitschrift, Bd. XXIII, wobei aber noch hinzuzufügen ist, dass auch bereits Jacobi in einer Königsberger Vorlesung die Frage bei willkürlichen Grenzwerthen von y allgemein für das Problem $\int_{x_0}^{x_1} f\,(x, y, y')\,dx = \text{Min.}$ behandelt hat.

einen kleinsten Werth erhält, so muss diese Curve dieselbe Minimums-Eigenschaft nothwendig auch dann beibehalten, wenn man ihre Endpunkte als fest gegeben betrachtet. Sie muss also im Besonderen auch unter allen Curven der Ebene, die mit ihr diese festen Endpunkte gemein haben, diejenige oder eine solche sein, welche das Integral zu einem Minimum macht. Diese letztere Forderung — das Hauptproblem, wie ich sie kurz nennen will — bestimmt aber durch die Differentialgleichung, auf welche sie führt, allein schon vollständig die Natur der gesuchten Curve, d. h. den analytischen Ausdruck

$$y = \varphi(x, a, b)$$

ihrer Ordinate, in welchem die beiden Integrationsconstanten a und b selbst wieder durch die beiden Bedingungen

$$\varphi(x_0, a, b) = y_0, \quad \varphi(x_1, a, b) = y_1$$

bestimmt werden, und damit ist auch der Minimumswerth des Integrales selbst in bestimmter Weise als Function der Grenzwerthe x_0, y_0, x_1, y_1 definirt, sodass derselbe sich gar nicht mehr anders ändern kann, als dadurch, dass diese Grössen ihre Werthe ändern. Sind daher die Endpunkte nicht fest, sondern eben bloss an zwei gegebene Curven

$$\psi_0(x_0, y_0) = 0 \text{ und } \psi_1(x_1, y_1) = 0$$

gebunden, so tritt zu der früheren Aufgabe nur noch die neue hinzu, die, diesen beiden Relationen unterworfenen Grenzwerthe nun so zu bestimmen, dass jene bestimmte Function derselben, welche den Minimumswerth des Integrales angiebt, ihrerseits selbst wieder ein Minimum wird.

Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass man im Falle variabler Grenzwerthe nothwendig gerade in dieser Weise verfahren muss. Man kann vielmehr das Problem auch ungetheilt angreifen, und Lundström sowohl wie Erdmann halten dies für klarer als die Theilung. Es liegt mir fern, die Frage, welcher Weg vorzuziehen sei, entscheiden zu wollen. Jedenfalls sind beide zulässig und es wird jeder seine Vorzüge und Nachtheile haben. Mich interessirten die Aufgaben des gewöhnlichen Maximums und Minimums, auf welche die erste Methode in ihrem zweiten Theile führt, schon an und für sich und wegen der eigenthümlichen Schwierigkeiten, die sie darbieten.

Man kann nämlich, weil hierzu im Allgemeinen die Auflösung transcendenter Gleichungen erforderlich ist, fast niemals

die Integrationsconstanten wirklich durch die Grenzwerthe ausdrücken[1]) und also auch den Maximums- oder Minimumswerth des Integrales nicht explicite als Function der Grenzwerthe allein darstellen. Daher ist man genöthigt, die Gleichungen, welche die Integrationsconstanten mit den Grenzwerthen verknüpfen, als Bedingungsgleichungen beizubehalten und darauf auszugehen, beide, Constanten und Grenzwerthe, gleichzeitig so zu bestimmen, dass der Werth, den das Integral für die Lösungen der Differentialgleichungen des Hauptproblems annimmt, ein Maximum oder ein Minimum wird. Dieser Werth stellt sich bei der gewöhnlichen Integrationsart der Differentialgleichungen zunächst als eine Function der Integrationsconstanten und der beiden Grenzen des Integrales dar. Mit Hülfe der Bedingungsgleichungen zwischen Integrationsconstanten und Grenzwerthen kann man aber diese Function ebenso wie die Bedingungsgleichungen selbst in mannigfacher Weise umformen, und es ist für die Bewältigung der Aufgabe, das Maximum oder Minimum des Integralwerthes zu finden, durchaus nicht gleichgültig, von welcher Ausdrucksweise des Integralwerthes und der Bedingungsgleichungen man ausgeht. Vielmehr führt eine ungeeignete Form des ersteren oder der letzteren schon in der ersten Hälfte der Aufgabe, bei der es nur auf die Bestimmung der Unbekannten ankommt, zu so verwickelten Gleichungen, dass die Auflösung oder geometrische Deutung im günstigsten Falle nur mit grosser Mühe und nach langen Rechnungen gelingt.

Es war mir daher höchst merkwürdig, als ich an dem Beispiele von § 4 mit einem Male erkannte, dass diese Schwierigkeiten sich ganz von selbst heben, wenn man die Differentialgleichungen des Hauptproblems durch Zurückführung auf ihre HAMILTON'sche partielle Differentialgleichung integrirt hat. Jede vollständige Lösung dieser Gleichung ergiebt nämlich in sich selbst einen äusserst geeigneten Ausdruck des Maximums- oder Minimumswerthes des Integrales, und zugleich liefern die aus dieser vollständigen Lösung hervorgehenden kanonischen Integralgleichungen des Problems unmittelbar die für diesen Ausdruck zweckmässigste Form der Bedingungsgleichungen zwischen

---

1) Trotzdem werde ich natürlich weiterhin, so oft es der Klarheit wegen wünschenswerth erscheint, solche Operationen, die der Theorie nach möglich sind, gerade ebenso behandeln, als ob sie sich jeder Zeit wirklich ausführen liessen.

Grenzwerthen und Integrationsconstanten[1]. Hierbei tritt auch der ganz eigene Charakter zu Tage, der alle Aufgaben dieser Art vor anderen Problemen des gewöhnlichen Maximums und Minimums auszeichnet und, weit entfernt die Aufgaben zu erschweren, vielmehr die Ursache ist, dass sich dieselben in allen Theilen ganz auffallend vereinfachen. Enthält z. B. das vorgelegte Problem die unabhängige Variable nicht explicite und lässt dasselbe zugleich eine Lösung zu, sowohl wenn alle Grenzwerthe, als auch wenn dieselben nur bis auf die obere Grenze fest gegeben sind, so erfordert im letzten Falle die Bildung der zweiten Variation des Integralwerthes gar keine andere Rechnung, als welche man im Allgemeinen schon im ersten Falle zur Discussion der zweiten Variation des Integrales selbst ausführen musste.

Diese Anwendung der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung zur Ableitung der Kriterien des Maximums und Minimums bei variabeln Grenzwerthen auseinanderzusetzen, ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes. Es versteht sich von selbst, dass die erhaltenen Regeln und Kriterien immer nur im Allgemeinen richtig sein können, d. h. dass ich von allen solchen besonderen Ausnahmefällen absehen muss, die eben allgemeinen Gesetzen sich nicht unterordnen lassen. So muss ich namentlich hervorheben, dass ich mich immer auf den Fall beschränke, wo bei festen Grenzwerthen die zweite Variation des Integrales allein schon das Maximum oder Minimum entscheidet, während der Fall, wo dieselbe bei sonst festem Zeichen noch zum Verschwinden gebracht werden kann, sich meinen Untersuchungen gänzlich entzieht. Auch will ich damit, dass ich die folgende Methode gewissermassen als die im Allgemeinen beste für die betrachteten Probleme des gewöhnlichen Maximums und Minimums mir in Vorschlag zu bringen erlaube, natürlich keineswegs behaupten, dass sie auch in jedem einzelnen Beispiele

---

1) In der wichtigen Abhandlung »Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten«, Borchardt's J. 55, der man die allgemeine Zurückführung der Differentialgleichungen der Variationsrechnung auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung verdankt, geht auch Clebsch von einer vollständigen Lösung der Hamilton'schen Gleichung aus; er benutzt sie aber auf ganz andere Weise, nämlich direct zur Umformung der zweiten Variation des Integrales.

stets die beste sei, oder dass man in bestimmten Problemen nicht auf anderem Wege noch einfacher und leichter zum Ziele gelangen könne.

§ 1.

Die Kriterien des Maximums und Minimums bei festen Grenzwerthen.

Das allgemeine Problem, mit dem sich diese Untersuchungen beschäftigen, ist das folgende:

Man soll unter allen Functionen $y_1, \cdots, y_n$ *von* x, *welche* m *von einander unabhängige Bedingungsgleichungen*

$$\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_m = 0 \quad (m < n)$$

erfüllen, diejenigen herausfinden, für welche das Integral

$$F = \int_{x_0}^{x_1} f dx$$

einen kleinsten oder grössten Werth erhält.

Hierin sollen $f, \varphi_1, \cdots, \varphi_m$ gegebene Functionen der unabhängigen Variabeln x, der unbekannten Functionen $y_1, \cdots, y_n$ und ihrer ersten Differentialquotienten $y'_1, \cdots, y'_n$ bedeuten, und es wird vorausgesetzt, *dass das Problem möglich und bestimmt sei bei festen, aber unbestimmten Grenzwerthen von* x, y_1, $\cdots$, y_n.

Setzt man dann:

1) $$\Omega = f + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_m \varphi_m,$$

wo die Multiplicatoren λ als neue unbekannte Functionen von x aufzufassen sind, so bestimmen die $n + m$ Gleichungen:

2) $$\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad \varphi_k = 0,$$

stets die $n + m$ Unbekannten $y'_1, \cdots, y'_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$, und ihre Elimination aus diesen Gleichungen und der Gleichung:

3) $$\frac{dV}{dx} \equiv \frac{\partial V}{\partial x} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial V}{\partial y_i} y'_i = f$$

liefert die HAMILTON'sche partielle Differentialgleichung des Problems.

Ist:

4) $$V = V(x, y_1, \cdots, y_n, a_1, \cdots, a_n) + \text{Const.}$$

irgend eine vollständige Lösung derselben, so erhält man die gesuchten Functionen y zunächst als Functionen von x und von den $2n$ willkürlichen Constanten $a_1, \cdots, a_n, \alpha_1, \cdots \alpha_n$ aus den n Gleichungen:

$$5)\qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} = \alpha_i,$$

worauf sich die zugehörigen Werthe der Multiplicatoren λ (und die Differentialquotienten y') aus den Gleichungen 2) ergeben. Ich will die so erhaltenen Werthe der y und λ durch

$$6)\qquad y_i = [y_i],\ \lambda_k = [\lambda_k]$$

und *ihre Substitution immer durch* [] *bezeichnen.*

Nach 3) ist dann:

$$[f] \equiv \frac{d[V]}{dx}.$$

Daher wird, ausgedrückt in den Constanten $a_1, \cdots, a_n$ und in den Anfangs- und Endwerthen von $x, y_1, \cdots, y_n$, die durch Anhängung der untern Indices 0 und 1 unterschieden werden mögen:

$$7)\qquad F = V_1 - V_0$$

der Maximums- oder Minimumswerth des vorgelegten Integrales, wobei natürlich

$$V_1 = V(x_1, y_{11}, \cdots, y_{n1}, a_1, \cdots, a_n),$$
$$V_0 = V(x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}, a_1, \cdots, a_n)$$

ist. Will man denselben als Function der Grenzwerthe allein definiren, so braucht man ihm nur die n aus 5) folgenden Gleichungen

$$8)\qquad \frac{\partial V_1}{\partial a_i} - \frac{\partial V_0}{\partial a_i} \equiv \frac{\partial F}{\partial a_i} = 0$$

hinzuzufügen, Gleichungen, welche die n Unbekannten a sicher bestimmen, da sonst gegen die Voraussetzung das Problem auf eine Relation zwischen den Grenzwerthen allein führen würde[1].

---

1) Hierbei ist zu beachten, dass (wie das Beispiel von § 4 unmittelbar zeigt) sowohl der Werth 7) als auch die Relation 8) an und für sich im Allgemeinen nur zwischen gewissen Grenzen richtig bleiben. Der eine wie die anderen müssen sich aber (Unstetigkeiten zwischen den Grenzen schliesse ich natürlich durchweg von der Betrachtung aus) immer auf allgemein gültige Formen bringen lassen mit Hülfe der Glei-

Sind nun zunächst alle Grenzwerthe fest gegeben, so hat man die $2n$ Integrationsconstanten a und α aus den $2n$ Gleichungen

9) $$[y_i]_0 = y_{i0}, \; [y_i]_1 = y_{i1}$$

zu bestimmen, in denen linker Hand die Indices 0 und 1 die Substitutionen $x = x_0$ und $x = x_1$ anzeigen, und jedes Werthsystem der Constanten, welches diese Bedingungen erfüllt, liefert, in die Gleichungen 6) substituirt, ein System Lösungen $y_i = [y_i]$ des Problems. Nach 5) kann man diese Lösungen auch dadurch erhalten, dass man die Gleichungen 8) und

10) $$\frac{\partial (V - V_0)}{\partial a_i} = 0$$

nach den $2n$ Unbekannten $y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots a_n$ auflöst.

Hat man aber ein bestimmtes System Auflösungen $a_1 \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Gleichungen 9) und damit auch ein bestimmtes System Lösungen 6) des Problems gefunden, so bewirken diese Lösungen noch nicht nothwendig auch stets ein wirkliches Maximum oder Minimum des gegebenen Integrales, sondern dies tritt erst dann ein, wenn für dieselben die zweite Variation des Integrals ein festes Zeichen besitzt.

Hierzu aber sind im Wesentlichen, d. h. solange nicht irgend welche Unstetigkeiten zwischen den Grenzen eintreten, und wenn wir überdies ein für allemal die Fälle von der Betrachtung ausschliessen, in denen die zweite Variation allein das Maximum oder Minimum noch nicht sicher stellt, die folgenden beiden Bedingungen nothwendig und hinreichend:

---

chungen 8) selbst, weil (vgl. die Anmerkung am Schlusse dieses §) die Gleichungen 10) allein schon die Lösungen des Problems definiren. Und hierin liegt die Berechtigung dazu, diese Formeln wie im folgenden § auch dort zu Grunde zu legen, wo es darauf ankommt, die Grenzwerthe und Integrationsconstanten so zu bestimmen, dass der Werth, den das Integral für jene Lösungen annimmt, selbst wieder ein relatives Maximum oder Minimum wird. Wenn man nämlich überhaupt die Maxima oder Minima einer gegebenen Function F sucht, zwischen deren Variabeln gegebene Relationen bestehen, so ist es vom rein theoretischen Standpunkte aus, d. h. abgesehen von der grösseren oder geringeren Schwierigkeit der Lösung, nothwendiger Weise ganz einerlei, ob man die gegebene Function unverändert beibehält oder aber ihr irgend eine andere Function Φ substituirt, sobald nur die Gleichung $\Phi = F$ eine Folge der gegebenen Relationen ist, und ebenso steht es ganz frei, wie und in welcher Form man die letzteren benutzen will.

Es muss[1]) erstens die homogene Function zweiter Ordnung:

$$11)\qquad 2\delta'^2\Omega = \sum_1^n{}^h \sum{}^i \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h \partial y'_i}\right] \delta y'_h \delta y'_i ,$$

deren n willkürliche Argumente $\delta y'_1, \ldots, \delta y'_n$ den m Bedingungsgleichungen

$$12)\qquad \delta'\varphi_\varkappa \equiv \sum_1^n{}^i \left[\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_i}\right] \delta y'_i = 0$$

zu unterwerfen sind, zwischen den Grenzen x_0 und x_1 beständig negativ oder beständig positiv bleiben. Und es darf zweitens bei festem x_0 die obere Grenze x_1 die zunächst an x_0 gelegene Wurzel x der *Grenzengleichung:*

$$13)\qquad \Delta(x, x_0) \equiv \sum \pm \frac{\partial [y_1]}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial [y_n]}{\partial a_n} \frac{\partial [y_1]_0}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial [y_n]_0}{\partial \alpha_n} = 0$$

weder überschreiten, noch auch selbst erreichen, weil man sonst[2]) die zweite Variation des Integrales immer noch zum Verschwinden bringen kann. Diese letztere Bedingung lässt sich aber auch so aussprechen:

Betrachtet man x_0 und die erhaltenen Werthe der Constanten a und α als unveränderlich, denkt sich aber die obere Grenze x_1 von x_0 aus wachsend, so darf dieselbe nicht bis zu demjenigen Werthe von x_1 ausgedehnt werden, für welchen zum ersten Male ein anderes System Auflösungen a, α der Gleichungen 9) mit dem zu Grunde gelegten zusammenfällt (oder falls zufällig die $[y_i]$ nur lineare Functionen der a und α sind, für welchen die Gleichungen 9) diese Constanten nicht mehr bestimmen).

Die Auflösung der Gleichungen 9) lässt sich aber auf die Bestimmung der n Unbekannten $a_1, \ldots, a_n$ aus den n Gleichungen 8) zurückführen. Denn hat man die Werthe der a aus den Gleichungen 8) gefunden, so ergeben sich nach 5) die Werthe der Constanten α eindeutig aus den Gleichungen:

$$\alpha_i = \frac{\partial V_0}{\partial a_i} \text{ oder } \alpha_i = \frac{\partial V_1}{\partial a_i} .$$

---

1) Vgl. Borchardt's J. 69 p. 260.

2) Ebenda p. 258.

Daher können die Gleichungen 9) nur dann zusammenfallende Wurzelsysteme a, α besitzen, wenn die Gleichungen 8) vielfache Wurzeln zulassen, oder wenn die Gleichung:

$$14)\qquad \sum \pm \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_n \partial \alpha_n} = 0$$

eine blosse Folge der Gleichungen 8) wird, und man kann also die zweite Bedingung auch so aussprechen:

15) *Die obere Grenze x_1 muss zwischen x_0 und der zunächst an x_0 gelegenen Wurzel x_1 derjenigen Gleichung bleiben, in welche die Gleichung 14) übergeht, wenn man aus ihr entweder die a oder die y_{i1} mittelst der Gleichungen 8) eliminirt.* —

Wie schon in der Einleitung bemerkt, lassen sich aber in der Regel die Integrationsconstanten nicht explicite durch die Grenzwerthe ausdrücken. Man ist daher im Allgemeinen gezwungen, die Auffassung gewissermassen umzukehren und nicht die Grenzwerthe der y, sondern geradezu die Integrationsconstanten selbst als das ursprünglich Gegebene zu betrachten, wobei dann die Grenzwerthe erst durch die Gleichungen 9) definirt werden.

In dieser neuen, durch die Umstände gebotenen Auffassung erhält man die zweite Form der Grenzengleichung, indem man die Werthe 9) der y_{i0} und y_{i1} in die Gleichung 14) einsetzt, und dann lässt sich nach 7) die letzte Bedingung offenbar auch so aussprechen: *x_1 muss zwischen x_0 und der zunächst an x_0 gelegenen Wurzel x der Gleichung:*

$$16)\quad \Pi(x, x_0) \equiv \left[\sum \pm \frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} \frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial \alpha_n \partial \alpha_n}\right] = 0$$

bleiben.

Diese Gleichung lässt sich auch direct aus der ursprünglichen Gleichung 13) ableiten.

Setzt man nämlich in den Gleichungen $y_h = [y_h]$ umgekehrt wieder für die α_i ihre Werthe 5), so werden diese Gleichungen identisch, da sie ja nach Voraussetzung die Auflösungen der Gleichungen 5) sind. Denkt man sich also den α_i die Werthe 5) beigelegt, so wird identisch $[y_h] = y_h$ und also auch durch partielle Differentiation nach a_i:

$$\frac{\partial [y_h]}{\partial a_i} + \sum_1^n{}_k \frac{\partial [y_h]}{\partial \alpha_k} \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial a_i} = 0\,.$$

Daher hat man

$$\frac{\partial [y_h]}{\partial a_i} + \sum_1^n {}_k \frac{\partial [y_h]}{\partial \alpha_k} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial a_i}\right] \equiv 0 .$$

Aus diesen Identitäten ergiebt sich aber leicht die Relation:

$$\Delta(x, x_0) \equiv (-1)^n Y_0 Y \Pi(x, x_0) ,$$

worin:

$$Y = \sum \pm \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_1} \frac{\partial [y_2]}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_n}$$

ist und Y_0 daraus durch die Substitution $x = x_0$ entsteht[1]).

---

1) Nach den Gleichungen 10) kann man endlich noch an Stelle der a_i und α_i auch geradezu die a_i und die y_{i0} als Integrationsconstanten zu Grunde legen. Man hat dann diejenigen Auflösungen:

$$y_i = \psi_i (x, x_0, a_1, \ldots, a_n, y_{10}, \ldots, y_{n0})$$

der Gleichungen 10) zu nehmen, die sich für $x = x_0$ auf $y_i = y_{i0}$ reduciren, sodass

$$\frac{\partial \psi_{i0}}{\partial a_h} = 0 , \quad \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial y_{h0}} = 0 \text{ oder } 1$$

ist. Wählt man daher diese Form der Lösungen des Problems, so reducirt sich die Gleichung 13) auf:

$$\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial a_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial a_n} = 0$$

und gleichzeitig wird für diese Lösungen:

$$\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial a_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial a_n} \sum \pm \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_2} \cdots \frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_n}$$
$$= (-1)^n \sum \pm \frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial a_1 \partial a_1} \frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial a_2 \partial a_2} \cdots \frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial a_n \partial a_n} .$$

Denn sie erfüllen mit den Gleichungen 10) zugleich die durch partielle Differentiation nach a_k daraus entspringenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial a_i \partial a_k} + \sum_1^n {}_h \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial y_h} \frac{\partial \psi_h}{\partial a_k} = 0 .$$

§ 2.

Die Kriterien des Maximums und Minimums bei variabeln Grenzwerthen.

Indem ich nunmehr übergehe zu dem Falle, wo die Grenzwerthe von $x, y_1, \ldots, y_n$ nicht mehr fest gegeben sind, will ich gleich allgemein annehmen, *dass zwischen denselben* $r < 2n + 2$ *von einander unabhängige Bedingungsgleichungen*

$$17)\qquad f_\varrho(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, x_1, y_{11}, \ldots, y_{n1}) = 0$$

vorgeschrieben seien (die natürlich so gewählt sein müssen, dass das vorgelegte Problem durch dieselben nicht etwa unmöglich wird oder den Sinn verliert, wie z. B. das Problem der Curve, die mit den Radii vectoren ihrer gegebenen Endpunkte die grösste oder kleinste Fläche umschliesst, wenn man die Curvenlänge nicht als fest gegeben betrachtet, sondern willkürlich lässt).

Dann tritt zu der früheren Aufgabe noch die neue hinzu, die den Gleichungen 17) unterworfenen Grenzwerthe so zu bestimmen, dass der durch 7) und 8) als Function der Grenzwerthe definirte Maximums- oder Minimumswerth des Integrales selbst wieder einen relativ grössten oder kleinsten Werth erreicht, und die Substitution der so erhaltenen Grenzwerthe oder der durch dieselben bedingten Werthe der Integrationsconstanten a und α in die Lösungen $y_i = [y_i]$ des früheren Problems liefert die Lösungen der ganzen Aufgabe. Damit aber die so erhaltenen Lösungen ein wirkliches Maximum oder Minimum des Integrales unter den angenommenen Bedingungen bewirken, muss mit dem Integralwerthe gleichzeitig auch das Integral selbst, wenn man ihm die gefundenen Grenzwerthe als fest gegeben vorschreibt, ein Maximum oder ein Minimum werden, müssen also (bei unserer Beschränkung auf den Fall, wo bei festen Grenzwerthen die zweite Variation des Integrales allein schon das Maximum oder Minimum vollständig sichern soll) im Besonderen die erhaltenen Werthe der Grenzen und Integrationsconstanten der zweiten Forderung des vorigen § genügen.

Behält man aber die durch die Gleichungen 8) definirten Unbekannten a bei — und man wird eben hierzu gezwungen, so oft sich diese Gleichungen nicht wirklich auflösen lassen — so stellt sich die neue Aufgabe so:

Die $3n+2$ *Variabeln*

$$x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, x_1, y_{11}, \ldots, y_{n1}, a_1, \ldots, a_n,$$

zwischen denen die r Gleichungen 17) *und die n Gleichungen* 8) *bestehen, sind so zu bestimmen, dass der gegebene Ausdruck*

$$7) \quad F = V_1 - V_0$$

ein relatives Maximum oder Minimum wird.

Bezeichnet man, um die Formeln kürzer schreiben zu können, *die Grenzwerthe*

$$x_0, x_1, y_{10}, \ldots, y_{n0}, y_{11}, \ldots, y_{n1}$$

im Folgenden durch

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n+2}, c_{n+3}, \ldots, c_{2n+2}$$

und setzt

$$18) \qquad W = F + \sum_1^n {}_h \, \mu_h \frac{\partial F}{\partial a_h} + \sum_1^r {}_\varrho \, \nu_\varrho f_\varrho ,$$

so führt diese Aufgabe auf die $3n+2$ Gleichungen:

$$19) \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial a_i} \equiv \dfrac{\partial F}{\partial a_i} + \sum_1^n {}_h \, \mu_h \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_h \partial a_i} = 0 , \\ \dfrac{\partial W}{\partial c_\sigma} \equiv \dfrac{\partial F}{\partial c_\sigma} + \sum_1^n {}_h \, \mu_h \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_h \partial c_\sigma} + \sum_1^r {}_\varrho \, \nu_\varrho \dfrac{\partial f_\varrho}{\partial c_\sigma} = 0 . \end{cases}$$

In Folge der Gleichungen 8) reduciren sich aber die n ersten Gleichungen 19) auf:

$$\sum_1^n {}_h \, \mu_h \frac{\partial^2 F}{\partial a_h \partial a_i} = 0 .$$

Nun darf nach 15) und nach dem eben Festgesetzten für die Lösung unserer neuen Aufgabe:

$$20) \qquad \sum \pm \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_1} \frac{\partial^2 F}{\partial a_2 \partial a_2} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial a_n \partial a_n} \text{ nicht } = 0$$

werden, also hat man nothwendig

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$$

zu nehmen. Hierdurch reduciren sich die n ersten Gleichungen

19) auf die Gleichungen 8) und die $2n + 2$ letzten auf die Gleichungen

$$21) \qquad \frac{\partial F}{\partial c_\sigma} + \sum_1^r{}^{\varrho}\, \nu_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial c_\sigma} = 0\,,$$

sodass es nur darauf ankommt, die $3n + 2 + r$ Unbekannten a, c, ν aus den Gleichungen 8), 17) und 21) zu bestimmen.

Damit ferner für ein System reeller Auflösungen der Integralwerth F ein wirkliches Maximum oder Minimum erreiche, muss nach Substitution der Auflösungen für alle Werthe der Variationen δa und δc, welche den $n + r$ aus 8) und 17) entspringenden Bedingungsgleichungen:

$$22) \qquad \delta \frac{\partial F}{\partial a_i} \equiv \sum_1^n{}^{h} \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_h} \delta a_h + \sum_1^{2n+2}{}^{\sigma} \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial c_\sigma} \delta c_\sigma = 0\,,$$

$$23) \qquad \delta f_\varrho \equiv \sum_1^{2n+2}{}^{\sigma} \frac{\partial f_\varrho}{\partial c_\sigma} \delta c_\sigma = 0$$

genügen, die zweite Variation $\delta^2 W$ der Function W ein festes Zeichen bewahren [1]).

Da aber die μ sämmtlich verschwinden, so wird:

$$24) \qquad \delta^2 W = \delta^2 F + \sum_1^r{}^{\varrho}\, \nu_\varrho \delta^2 f_\varrho\,.$$

Hierin ist:

$$\delta^2 F = \sum_1^n{}^{i}\, \delta a_i \delta \frac{\partial F}{\partial a_i} + \sum_1^{2n+2}{}^{\sigma} \delta c_\sigma \delta \frac{\partial F}{\partial c_\sigma}$$

und reducirt sich also in Folge der Bedingungsgleichungen 22) auf:

---

1) Ich setze selbstverständlich voraus, dass man ein solches System Auflösungen der Gleichungen 8), 17), 21) gefunden habe, welches der Bedingung 20) genügt und für welches auch nicht etwa eine der Gleichungen 23) eine blosse Folge der übrigen wird. Das Auftreten anderer als solcher Auflösungen wäre ja eben immer nur ein sehr besonderer Ausnahmefall. Auch darf natürlich keiner der zweiten partiellen Differentialquotienten von F für die erhaltenen Werthe der Unbekannten unendlich oder unbestimmt werden, was bei geometrischen Problemen mitunter die Folge einer ungeeigneten, zu speciellen Wahl des Coordinatensystems sein kann.

$$\delta^2 F = \sum_1^{2n+2}{}^{\sigma}\, \delta c_\sigma \delta \frac{\partial F}{\partial c_\sigma}$$

oder:

$$25)\quad \delta^2 F = \sum_1^{n}{}^{i}\, \delta a_i \sum_1^{2n+2}{}^{\sigma} \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial c_\sigma} \delta c_\sigma + \overline{\underline{\sum^{\sigma}\sum^{\tau}}}_1^{2n+2} \frac{\partial^2 F}{\partial c_\sigma \partial c_\tau} \delta c_\sigma \delta c_\tau ,$$

wofür man wiederum nach 22) auch setzen kann:

$$\delta^2 F = \overline{\underline{\sum^{\sigma}\sum^{\tau}}}_1^{2n+2} \frac{\partial^2 F}{\partial c_\sigma \partial c_\tau} \delta c_\sigma \delta c_\tau - \overline{\underline{\sum^{h}\sum^{i}}}_1^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial a_h \partial a_i} \delta a_h \delta a_i .$$

Deutet man also durch die Charakteristiken δ_1, δ_2 an, dass nur die Grenzwerthe c, respective nur die Constanten a zu variiren sind, so kann man einfach schreiben:

$$26)\qquad \delta^2 F = \delta^2_1 F - \delta^2_2 F .$$

Doch wird man in der Regel dem weniger eleganten Ausdrucke 25) von $\delta^2 F$ den Vorzug geben, weil derselbe die Variationen δa nur linear enthält, und diese also mittelst der Bedingungsgleichungen 22) bequemer aus ihm als aus der Formel 26) eliminirt werden können.

Nun tritt aber gerade bei der vorliegenden Aufgabe recht häufig der Fall ein, dass die zweite Variation $\delta^2 W$ unter den Bedingungen 22) und 23) zwar nicht zur Zeichenänderung, wohl aber noch zum Verschwinden gebracht werden kann. Ein wirkliches Maximum oder Minimum kann dann nur eintreten, wenn gleichzeitig auch die dritte Variation von W verschwindet, d. h. wenn die Gleichung:

$$27)\qquad \delta^3 W \equiv \delta^3 F + \sum_1^{r}{}^{\varrho}\, \nu_\varrho \delta^3 f_\varrho = 0$$

eine Folge wird der Gleichungen 22), 23),

$$28)\quad \sum_1^{n}{}^{h} \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_h} \delta^2 a_h + \sum_1^{2n+2}{}^{\sigma} \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial c_\sigma} \delta^2 c_\sigma + \delta^2 \frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 ,$$

$$29)\qquad \sum_1^{2n+2}{}^{\sigma} \frac{\partial f_\varrho}{\partial c_\sigma} \delta^2 c_\sigma + \delta^2 f_\varrho = 0$$

und der Gleichung $\delta^2 W = 0$. Nun ist:

$$\delta^3 F = \sum_1^n{}^i \left(3\,\delta^2 a_i \delta \frac{\partial F}{\partial a_i} + \delta a_i \delta^2 \frac{\partial F}{\partial a_i}\right)$$
$$+ \sum_1^{2n+2}{}^\sigma \left(3\,\delta^2 c_\sigma \delta \frac{\partial F}{\partial c_\sigma} + \delta c_\sigma \delta^2 \frac{\partial F}{\partial c_\sigma}\right)$$

und reducirt sich also in Folge der Bedingungen 22) auf:

30) $$\delta^2 F = \sum_1^n{}^i \delta a_i \delta^2 \frac{\partial F}{\partial a_i} + \sum_1^{2n+2}{}^\sigma \left(3\,\delta^2 c_\sigma \delta \frac{\partial F}{\partial c_\sigma} + \delta c_\sigma \delta^2 \frac{\partial F}{\partial c_\sigma}\right).$$

Ueberdies bestimmen die Gleichungen 28) nur die in 30) und also auch in 27) gar nicht mehr vorkommenden zweiten Variationen $\delta^2 a$. Daher lässt sich die obige Forderung einfacher so aussprechen: Der Ausdruck 27) muss verschwinden für alle Werthe der Variationen δa, δc und $\delta^2 c$, welche den Gleichungen 22), 23), 29) und der Gleichung $\delta^2 W = 0$ genügen. —

Bei der Anwendung der vorhergehenden Theorie auf bestimmte Beispiele muss man beachten, dass es sich schliesslich immer nur darum handelt, welche Werthe man den Constanten a und α in den Auflösungen $y_i = [y_i]$ der Gleichungen 5) zu geben hat, damit diese Functionen Lösungen des vorgelegten Problems werden. Man wird daher in der Regel besser thun, gar nicht erst die a und c zu bestimmen, sondern in den gewonnenen Gleichungen und Formeln durch die Substitution [ ] der Werthe

$$y_{i0} = [y_i]_0\,, \quad y_{i1} = [y_i]_1$$

gleich die a und α an Stelle der y_{i0}, y_{i1} und a als die eigentlichen Unbekannten der Aufgabe einzuführen. Hierdurch werden nach 5) die Gleichungen 8) identisch erfüllt und es bleiben zur Bestimmung der Unbekannten

$$a_1, \ldots, a_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \quad x_0, \quad x_1, \quad \nu_1 \ldots, \nu_r$$

nur die $r + 2n + 2$ Gleichungen 17) und 21) übrig[1]).

---

1) In Folge der aus 2) und 3) entspringenden Identitäten:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial y_i}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}\right], \quad \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] \equiv \left[f - \sum_1^n{}^i y'_i \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}\right]$$

fallen die Gleichungen 21) dann zusammen mit den Gleichungen, auf

Diese Anordnung der Rechnung gestattet auch, die erhaltenen Resultate wohl am Klarsten in der folgenden Weise zusammenzufassen, wobei ich mich der Homogenität wegen auf den Fall beschränke, in welchem die Glieder zweiter Ordnung allein den Ausschlag geben, und daran erinnere, dass jetzt die Grössen $c_{2+i} \equiv y_{i0}$ und $c_{n+2+i} \equiv y_{i1}$ überall zu ersetzen sind durch die Ausdrücke $[y_i]_0$ und $[y_i]_1$, während c_1 und c_2 für x_0 und x_1 steht:

Unter den Grenzbedingungen 17) wird das vorgelegte Problem gelöst durch diejenigen Functionen $y_i = [y_i]$, die man als Auflösungen der Gleichungen 5) erhält, und in denen die 2n Integrationsconstanten $a_1, \ldots, a_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zusammen mit den $r + 2$ weiteren Unbekannten x_0, x_1, $\nu_1, \ldots, \nu_r$ aus den $r + 2n + 2$ Gleichungen 17) und 21) zu bestimmen sind.

Damit die irgend einem bestimmten System Auflösungen dieser letzten Gleichungen zugehörigen Functionen $y_i = [y_i]$ ein wirkliches Maximum oder Minimum des gegebenen Integrales bewirken, muss für diese Functionen und Auflösungen:

I. die homogene Function 11) unter den Bedingungen 12) zwischen den erhaltenen Grenzen x_0 und x_1 ein festes Zeichen bewahren, muss

II. die homogene Function 24) unter den Bedingungen 22) und 23) dasselbe feste Zeichen besitzen und muss endlich

III. x_1 zwischen x_0 und der nächsten Wurzel x der Grenzengleichung 13) oder 16) gelegen sein. —

---

welche der gewöhnliche Ausdruck der ersten Variation des Integralwerthes

$$\delta F = \left[\left(f - \sum_1^n {}^i\, y'_i \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}\right) \delta x + \sum_1^n {}^i\, \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}\, \delta y_i\right]_{x_0}^{x_1}$$

führt. In der That erhält man unter Berücksichtigung der Identitäten:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial a_i}\right]_1 - \left[\frac{\partial V}{\partial a_i}\right]_0 \equiv 0$$

durch Variation von x_0, x_1, $a_1, \ldots, a_n$, $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ aus:

$$F = [V]_1 - [V]_0$$

direct:

$$\delta F = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\, \delta x + \sum_1^n {}^i\, \frac{\partial V}{\partial y_i}\, \delta [y_i]\right]_{x_0}^{x_1}.$$

§ 3

Betrachtung eines besonderen Falles.

Bei festen Grenzwerthen von x, y_1, ..., y_n hat in dem vorgelegten Probleme die zweite Variation des Integrales den Werth

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta^2 \Omega\, \delta x\,,$$

wo:

$$\delta^2\Omega = \sum_1^n{}^h \sum{}^i \left\{ \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_h \partial y_i}\right] \delta y_h \delta y_i + 2\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_h \partial y'_i}\right] \delta y_h \delta y'_i \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h \partial y'_i}\right] \delta y'_h \delta y'_i \right\}$$

die zweite Variation der Function Ω ist und die Variationen δy_i den m Differentialgleichungen:

$$\delta \varphi_\varkappa \equiv \sum_1^n{}^i \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i}\right] \delta y_i + \left[\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_i}\right] \delta y'_i \right\} = 0$$

genügen müssen.

Es tritt nun nicht selten der Fall ein, dass $\delta\Omega$, aufgefasst als eine Function der $2n$ willkürlichen Variabeln δy_i und $\delta y'_i$, entweder an sich oder in Folge der Bedingungsgleichungen $\delta\varphi_\varkappa = 0$ stets positiv oder stets negativ bleibt und auch nicht verschwinden kann, ausser wenn man alle n Variationen $\delta y'_i = 0$ setzt. Da in Folge der Bedingungen

$$\delta y_{i0} = \delta y_{i1} = 0$$

das identische Verschwinden von

$$\delta y'_i \equiv \frac{d\delta y_i}{dx}$$

zugleich auch das von δy_i selbst bedingt, so ist bei festen Grenzwerthen dann auch die zweite Variation des Integrales stets positiv oder stets negativ und verschwindet nur, wenn alle Variationen $\delta y_i \equiv 0$ werden.

In einem solchen Falle erzeugen alle die Lösungen $y_i = [y_i]$ des Problems immer ein Minimum oder ein Maximum des Integrales, wie weit auch die Grenzen x_0 und x_1 genommen wer-

den mögen, und die zweite Variation des Integrales lässt sich nicht mehr zum Verschwinden bringen. Letzteres ist aber immer möglich, wenn die Gleichung 13) oder 16) noch eine andere reelle Wurzel ausser $x = x_0$ besitzt. In dem angenommenen Falle können daher diese Gleichungen eben nur die eine reelle Wurzel $x = x_0$ zulassen, und bei den Grenzbedingungen 17) reducirt sich daher das vorhergehende Kriterium für das Maximum oder Minimum unseres Integrales einfach auf die Forderung:

Die homogene Function 24) muss unter den Bedingungen 22) und 23) ein festes Zeichen besitzen, und zwar dasselbe Zeichen wie die Function $\delta^2 \Omega$.

Doch darf man nicht glauben, dass alsdann überhaupt die Bildung und Discussion der Function $\Pi(x, x_0)$ ganz könnte umgangen werden. Denn die Auflösungen der Gleichungen 22) nach den δa_i führt immer die Determinante $\Pi(x_1, x_0)$ als Nenner in $\delta^2 W$ ein und daher hängt das Zeichen von $\delta^2 W$ wesentlich mit ab von dem Zeichen dieser Determinante.

§ 4.

Ein Beispiel.

Um die vorhergehende Theorie an einem bekannten und bewährten Beispiele zu erproben, möge dieselbe jetzt auf die folgende Aufgabe angewandt werden.

Man sucht diejenige ebene Curve von gegebenen Endpunkten, welche bei voller Umdrehung um eine in ihrer Ebene gelegene feste Axe eine Fläche von möglichst kleinem Flächeninhalte erzeugt.

Diese Aufgabe gehört zu denjenigen geometrischen Problemen der Variationsrechnung, welche einen vernünftigen Sinn behalten, sowohl wenn die Curvenlänge gegeben, als auch wenn sie willkürlich gelassen wird — und dieser letztere Fall bildet natürlich hier die eigentliche Aufgabe. Diese Probleme erhalten die im Vorhergehenden betrachtete Form, sobald man den Curvenbogen s zur unabhängigen Variabeln nimmt, was zugleich den Vortheil gewährt, dass von vornherein keine Coordinate vor der andern bevorzugt und überdies eine einheitliche Behandlung der beiden verschiedenen Aufgaben gewonnen wird, welche im obigen Sinne in der gegebenen enthalten sind.

Zeigen wir durch Accente jetzt die Differentiationen nach

s an, nehmen die horizontal gelegte feste Axe zur x-Axe, die positive y-Axe nach oben gerichtet und denken uns die Endpunkte stets so gelegt, dass keine Curve von der betrachteten Länge l von ihnen aus unter die x-Axe herabsteigen kann, so nimmt hierdurch unsere Aufgabe die folgende analytische Gestalt an:

Unter allen Functionen x, y von s, welche der Bedingung:

31) $$x'^2 + y'^2 = 1$$

genügen und für $s = 0$, wie für $s = l$ gegebene Werthe x_0, y_0 und x_1, y_1 annehmen, diejenigen zu finden, für welche das Integral

$$F = \int_0^l y\,ds$$

einen kleinsten Werth erhält.

Hier ist:

$$\Omega = y + \frac{\lambda}{2}(x'^2 + y'^2 - 1).$$

Die partielle Differentialgleichung des Problems wird also gebildet, indem man x', y', λ aus den Gleichungen:

$$\lambda x' = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \lambda y' = \frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{\partial V}{\partial s} + \lambda = y$$

und der Gleichung 31) eliminirt, und ist somit:

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = y.$$

Sie besitzt die vollständige Lösung

32) $$V = a_1 x + a_2 s + \int dy\,\sqrt{(y - a_2)^2 - a_1^2}$$

und aus derselben erhält man als vollständige Integralgleichungen des Problems:

$$33)\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial a_1} \equiv x - a_1 \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{(y-a_2)^2 - a_1^2}} \\ \quad \equiv x - a_1 \log \dfrac{y - a_2 + \sqrt{(y-a_2)^2 - a_1^2}}{a_1} = \alpha_1 , \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_2} \equiv s - \displaystyle\int \frac{(y-a_2)\,dy}{\sqrt{(y-a_2)^2 - a_1^2}} \equiv s - \sqrt{(y-a_2)^2 - a_1^2} = \alpha_2 .\end{cases}$$

Diese ergeben, wenn man zur Abkürzung der späteren Rechnung hyperbolische Sinus und Cosinus einführt, also:

$$34)\begin{cases}\mathfrak{Cos}\,\xi = \dfrac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\,\xi = \dfrac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} \\ \text{und } \dfrac{x - \alpha_1}{a_1} = \xi \text{ setzt:} \\ \lambda = y - a_2 = a_1\,\mathfrak{Cos}\,\xi , \\ s - \alpha_2 = \sqrt{(y-a_2)^2 - a_1^2} = a_1\,\mathfrak{Sin}\,\xi .\end{cases}$$

Weiter ist *bei festem l* die zweite Variation unseres Integrales:

$$\int_0^l \delta^2 \Omega\, ds = \int_0^l \lambda (\delta x'^2 + \delta y'^2)\, ds .$$

Sie hat also stets dasselbe Zeichen wie a_1 und kann auch nicht mehr zum Verschwinden gebracht werden. Um das Minimum zu erhalten, muss man daher

$$a_1 > 0$$

nehmen, d. h. geometrisch ausgedrückt:

Unter allen Curven der Ebene, welche dieselbe Länge und dieselben Endpunkte besitzen, ist die nach unten convexe Kettenlinie:

$$35)\qquad y = a_2 + a_1\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x - \alpha_1}{a_1}$$

die Erzeugende der kleinsten Rotationsfläche.

Zugleich folgt aus der hervorgehobenen Beschaffenheit der zweiten Variation des Integrales, dass die Grenzengleichung:

$$36)\quad \Pi(s, 0) \equiv \left[\frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial a_1^2}\,\frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial a_2^2} - \left(\frac{\partial^2 (V - V_0)}{\partial a_1 \partial a_2}\right)^2\right] = 0$$

keine andere reelle Wurzel hat als $s = 0$.

Dies verificirt man auch leicht durch die Rechnung. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

37) $y - a_2 + \sqrt{(y-a_2)^2 - a_1^2} = u\,, \quad \sqrt{(y-a_2)^2 - a_1^2} = v\,,$

so hat man nach 33)

38) $$\frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2} = -\log u + \frac{a_1^2}{uv} + \log a_1 + 1\,,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_2} = \frac{a_1}{v}\,, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_2^2} = \frac{y - a_2}{v}\,.$$

Nach 34) wird also ausgedrückt in ξ:

39) $$\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2}\right] = -\xi + \frac{\mathfrak{Cos}\,\xi}{\mathfrak{Sin}\,\xi}\,, \\ &\left[\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_2}\right] = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\xi}\,, \quad \left[\frac{\partial^2 V}{\partial a_2^2}\right] = \frac{\mathfrak{Cos}\,\xi}{\mathfrak{Sin}\,\xi}\,. \end{aligned}\right.$$

Bildet man aber mit diesen Werthen die Determinante 36), setzt

40) $$\xi - \xi_0 \equiv \frac{x - x_0}{a_1} = \Theta$$

und benutzt die Relationen:

41) $$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{Cos}^2\,\xi - \mathfrak{Sin}^2\,\xi \equiv 1\,, \\ &\mathfrak{Sin}\,(\xi - \xi_0) \equiv \mathfrak{Sin}\,\xi\;\mathfrak{Cos}\,\xi_0 - \mathfrak{Cos}\,\xi\;\mathfrak{Sin}\,\xi_0\,, \\ &\mathfrak{Cos}\,(\xi - \xi_0) \equiv \mathfrak{Cos}\,\xi\;\mathfrak{Cos}\,\xi_0 - \mathfrak{Sin}\,\xi\;\mathfrak{Sin}\,\xi_0\,, \end{aligned}\right.$$

so findet man:

42) $$\Pi(s, 0) = \frac{\psi(\Theta)}{\mathfrak{Sin}\,\xi\;\mathfrak{Sin}\,\xi_0}\,,$$

worin:

43) $$\psi(\Theta) = 2 - 2\,\mathfrak{Cos}\,\Theta + \Theta\,\mathfrak{Sin}\,\Theta$$

ist. Nun hat man:

$$\psi'\Theta = \Theta\,\mathfrak{Cos}\,\Theta - \mathfrak{Sin}\,\Theta\,,$$
$$\psi''\Theta = \Theta\,\mathfrak{Sin}\,\Theta\,.$$

Die Gleichung $\psi''\Theta = 0$ besitzt demnach nur die eine reelle Wurzel $\Theta = 0$ und wegen $\psi''(\pm\infty) = +\infty$ wird also $\psi''\Theta$ niemals negativ. Daher wächst $\psi'\Theta$ fortwährend mit wachsendem Θ und hat wegen $\psi' 0 = 0$ stets dasselbe Zeichen wie Θ.

Wegen $\psi(0) = 0$ *bleibt daher die Function* $\psi(\Theta)$ *selbst beständig positiv*, ausser eben für $\Theta = 0$, und die Gleichung 36) besitzt also in der That nur die eine reelle Wurzel $\Theta = 0$, d. h. $\xi = \xi_0$, oder nach 34) $s = 0$. —

Aus 32) folgt nun als Minimumswerth des Integrales:

$$44)\quad F = V_1 - V_0 \equiv a_1(x_1 - x_0) + a_2 l + \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{(y - a_2)^2 - a_1^2}\,.$$

Ist also, wie unsere eigentliche Aufgabe vorschreibt, *die Curvenlänge l nicht gegeben*, *sondern beliebig*, so tritt die neue Aufgabe an uns heran, die durch die Bedingungsgleichungen

$$45)\qquad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0$$

verbundenen Variabeln a_1, a_2 und l so zu bestimmen, dass der Ausdruck 44) selbst wieder ein Minimum wird.

Nach § 2 fügt diese Aufgabe den beiden Gleichungen 45) noch die dritte hinzu:

$$\frac{\partial F}{\partial l} \equiv a_2 = 0\,,$$

sodass man aus 34) als Lösungen unseres Problems erhält:

$$46)\quad y = a_1 \operatorname{Cos} \xi\,, \quad s - a_2 = a_1 \operatorname{Sin} \xi\,, \quad \xi = \frac{x - a_1}{a_1}\,.$$

Damit aber ein wirkliches Minimum des Ausdruckes 44) eintrete, muss die zweite Variation desselben, d. i. nach der Formel 25)

$$\delta^2 F = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial l}\,\delta a_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial a_2 \partial l}\,\delta a_2\right)\delta l + \frac{\partial^2 F}{\partial l^2}\,\delta l^2\,,$$

oder

$$\delta^2 F = \delta a_2\,\delta l$$

unter den Bedingungen:

$$47)\quad \begin{cases} \delta \dfrac{\partial F}{\partial a_1} \equiv \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1^2}\,\delta a_1 + \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2}\,\delta a_2 = 0 \\[2ex] \delta \dfrac{\partial F}{\partial a_2} \equiv \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_2 \partial a_1}\,\delta a_1 + \dfrac{\partial^2 F}{\partial a_2^2}\,\delta a_2 + \delta l = 0 \end{cases}$$

immer positiv bleiben, wenn man überall $a_2 = 0$ und für y_0 und y_1 die aus 46) folgenden Werthe einsetzt.

Aus diesen Bedingungsgleichungen folgt nun mit Rücksicht auf 36) und 44)

48) $$\Pi(l, o)\,\delta a_2 = -\frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2}\,\delta l\,,$$

also erhält man:

49) $$\delta^2 F = -\frac{1}{\Pi(l,0)}\frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2}\,\delta l^2\,.$$

Nach 39) und 46) ist aber:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2}\right] = -\frac{x-\alpha_1}{a_1} + \frac{y}{a_1\frac{dy}{dx}}$$

und folglich wird:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2} = -\frac{1}{a_1}\left\{x_1 - \frac{y_1}{\frac{dy_1}{dx_1}} - \left(x_0 - \frac{y_0}{\frac{dy_0}{dx_0}}\right)\right\}.$$

Wegen $a_1 > 0$ hat daher nach 42) und 46) $\delta^2 F$ dasselbe Zeichen wie das Produkt

$$P = \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_0}{dx_0}\left\{x_1 - \frac{y_1}{\frac{dy_1}{dx_1}} - \left(x_0 - \frac{y_0}{\frac{dy_0}{dx_0}}\right)\right\},$$

oder da

$$X = x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$$

die Abscisse des Punktes ist, in welchem die Tangente der Curve $y = y(x)$ die x-Axe schneidet, wie

$$P = \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_0}{dx_0}(X_1 - X_0)\,.$$

Nun haben $\frac{dy_0}{dx_0}$ und $\frac{dy_1}{dx_1}$ dasselbe Zeichen, solange

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{Sin}\,\xi$$

zwischen den beiden Endpunkten nicht durch 0 hindurchgegangen ist, d. h. solange diese beiden Punkte auf derselben Seite des tiefsten Punktes unserer Kettenlinie:

$$50)\qquad y = a_1 \operatorname{Cos} \frac{x-a_1}{a_1}$$

liegen, und ebenso lange ist auch, weil nur ein einziger tiefster Punkt existirt, $X_1 > X_0$. Liegen aber die beiden Endpunkte auf verschiedenen Seiten des tiefsten Punktes, so ist

$$\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_0}{dx_0} < 0$$

und es muss dann also

$$X_1 < X_0$$

sein, wenn ein Minimum stattfinden soll. Beide Fälle lassen sich zusammenfassen in den bekannten Satz:

Unter allen Curven der Ebene, welche mit der nach unten convexen Kettenlinie 50) dieselben festen Endpunkte gemein haben, ist diese Curve die Erzeugende der kleinsten Rotationsfläche[1], *so lange ihre Anfangs- und Endtangente sich oberhalb der x-Axe schneiden. Sie verliert dagegen diese Eigenschaft, sobald sich diese Tangenten erst unterhalb der x-Axe begegnen.* —

Es fragt sich aber noch, was tritt in dem Grenzfalle ein, wo die beiden Tangenten sich gerade auf der x-Axe schneiden?

In diesem Falle wird $\frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2}$ und damit nach 48) und 49) auch δa_2 und $\delta^2 F = 0$, und man muss also unter diesen Voraussetzungen die dritte Variation von F untersuchen. Nach der allgemeinen Formel 30) hat diese den Werth:

$$\delta^3 F = \delta a_1 \delta^2 \frac{\partial F}{\partial a_1} + \delta a_2 \delta^2 \frac{\partial F}{\partial a_2} + 3\delta^2 l \delta \frac{\partial F}{\partial l} + \delta l \delta^2 \frac{\partial F}{\partial l}$$

und reducirt sich, weil

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial l} = \frac{\partial^2 F}{\partial l^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a_2 \partial l} = 1$$

und somit alle zweiten partiellen Differentialquotienten von

---

1) Ich sehe hier ab von derjenigen geometrischen Lösung unserer Aufgabe, die aus den beiden, von den Endpunkten auf die x-Axe gefällten Lothen und dem dazwischen liegenden Stücke der x-Axe selbst besteht. Denn diese ist keine Lösung unseres analytischen Problems an sich, sondern wird erst zu einer solchen, wenn man ihm explicite die Bedingung hinzufügt, dass zwischen den Grenzen des Integrales y niemals negativ werden darf.

$\frac{\partial F}{\partial l}$ verschwinden, auf:

$$\delta^3 F = \delta a_1{}^2 \delta \frac{\partial^2 F}{\partial a_1{}^2} + 2 \delta a_1 \delta a_2 \delta \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2} + \delta a_2{}^2 \delta \frac{\partial^2 F}{\partial a_2{}^2}$$
$$+ 3 \delta^2 l \frac{\partial^2 F}{\partial l \partial a_2} \delta a_2 ,$$

oder endlich, weil sie nur zu untersuchen ist für den Fall $\delta^2 F = 0$ oder $\delta a_2 = 0$, auf:

$$\delta^3 F = \frac{\partial^3 F}{\partial a_1{}^3} \delta a_1{}^3 .$$

Nun folgt aus 37) und 38)

$$\frac{\partial^3 V}{\partial a_1{}^3} = \frac{a_1}{u v} \left(3 + \frac{a_1{}^2}{v^2} + \frac{a_1{}^2}{u v}\right) + \frac{1}{a_1}$$

und nach 34) wird

$$u = a_1 e^{\xi} , \quad v = \frac{a_1}{2} (e^{\xi} - e^{-\xi}) .$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\left[\frac{\partial^3 V}{\partial a_1{}^3}\right] - \frac{1}{a_1} = \frac{2}{a_1 (e^{2\xi} - 1)(e^{\xi} - e^{-\xi})^2} (3 e^{2\xi} + e^{-2\xi}) ,$$

ein Ausdruck, der stets dasselbe Zeichen hat wie ξ.

In dem betrachteten Falle ist aber $\xi_0 < 0$ und $\xi_1 > 0$. Denn jetzt liegt zwischen diesen Grenzwerthen von ξ nothwendig der Werth $\xi = 0$, der dem tiefsten Punkte unserer Kettenlinie entspricht, und wegen:

$$\frac{ds}{d\xi} = a_1 \operatorname{Cos} \xi$$

wächst ξ beständig mit dem Bogen s. Daher ist:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial a_1{}^3} \equiv \left[\frac{\partial^3 V}{\partial a_1{}^3}\right]_1 - \left[\frac{\partial^3 V}{\partial a_1{}^3}\right]_0$$

nothwendig > 0, die dritte Variation verschwindet also nicht zugleich mit der zweiten und man sieht:

Schon in dem Grenzfalle, wo Anfangs- und Endtangente der Kettenlinie 50) sich gerade auf der x-Axe schneiden, erzeugt dieselbe nicht mehr eine kleinste Rotationsfläche. —

§ 5.

Dasselbe Beispiel mit einer anderen Grenzbedingung.

Um von unserer Methode auch eine Anwendung anderer Art zu geben, will ich zum Schluss noch die folgende Modification des früheren Problems behandeln:

Unter allen Curven von gegebener Länge in der Ebene, von denen ein Endpunkt fest ist, während der andere nur auf einer gegebenen Curve liegen soll, diejenige zu finden, welche durch eine volle Umdrehung um eine feste Axe der Ebene die kleinste Rotationsfläche erzeugt.

Auch diese Aufgabe ist zur Erprobung der Methode sehr geeignet. Denn einerseits ist die Gleichgewichtslage eines Fadens stets dadurch charakterisirt, dass sein Schwerpunkt sich möglichst tief stellen muss, und andererseits fällt unser Problem in Folge seines analytischen Ausdrucks zusammen mit der Frage nach der Curve von gegebener Länge und tiefstem Schwerpunkt. Combinirt man aber diese beiden Bemerkungen, so kann man unmittelbar voraussagen, was bei der Aufgabe herauskommen muss.

Machen wir den Endpunkt der Curve fest, so tritt gegen früher nur der Unterschied ein, dass jetzt bloss die Curvenlänge l und die Grenzwerthe x_1, y_1 fest gegeben sind, während der Anfangspunkt $x_0\, y_0$ willkürlich auf der gegebenen Curve $y_0 = f(x_0)$ genommen werden kann.

Die neue Aufgabe verlangt also, die drei Variabeln a_1, a_2, x_0, welche durch die Relationen 45) verbunden sind, so zu bestimmen, dass der Ausdruck 44) einen kleinsten Werth erreicht, wobei y_0 durch $f(x_0)$ zu ersetzen ist.

Zu den Gleichungen 45) tritt daher als dritte jetzt die Gleichung hinzu:

$$\frac{dF}{dx_0} \equiv \frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} f'x_0 = 0 .$$

Diese reducirt sich aber, da nach 44) und 34)

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \equiv -a_1 , \quad \frac{\partial F}{\partial y_0} \equiv -\sqrt{(y_0 - a_2)^2 - a_1^2} = -a_1 \frac{dy_0}{dx_0}$$

ist, auf:

51) $$1 + \frac{dy_0}{dx_0} f'x_0 = 0$$

und sagt also aus, dass unsere Kettenlinie 35) in ihrem Anfangspunkte $x_0 y_0$ senkrecht stehen muss auf der gegebenen Curve.

Weiter wird jetzt die zweite Variation von F:

$$\delta^2 F = \left(\frac{d\frac{\partial F}{\partial a_1}}{dx_0}\,\delta a_1 + \frac{d\frac{\partial F}{\partial a_2}}{dx_0}\,\delta a_2\right)\delta x_0 + \frac{d^2 F}{dx_0^2}\,\delta x_0^2$$

und ihr sind die Bedingungsgleichungen:

$$\delta\frac{\partial F}{\partial a_1} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2}\,\delta a_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2}\,\delta a_2 + \frac{d\frac{\partial F}{\partial a_1}}{dx_0}\,\delta x_0 = 0\,,$$

$$\delta\frac{\partial F}{\partial a_2} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial a_2 \partial a_1}\,\delta a_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial a_2^2}\,\delta a_2 + \frac{d\frac{\partial F}{\partial a_2}}{dx_0}\,\delta x_0 = 0$$

hinzuzufügen.

Substituirt man in den

$$\frac{d\frac{\partial F}{\partial a_1}}{dx_0} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial x_0} + \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial y_0}\,f'x_0$$

u. s. w. die Werthe, welche die partiellen Differentialquotienten von $\frac{\partial F}{\partial x_0}$ und $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ durch die Substitutionen 34) annehmen, und setzt zugleich nach 51)

$$f'x_0 = -\frac{1}{\frac{dy_0}{dx_0}} = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\xi_0}\,,$$

so ergiebt sich:

$$\delta^2 F = -\left(\frac{\mathfrak{Cos}^2\xi_0}{\mathfrak{Sin}^2\xi_0}\,\delta a_1 + \frac{\mathfrak{Cos}\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}^2\xi_0}\,\delta a_2\right)\delta x_0$$
$$- \left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}^3\xi_0} + a_1\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0 f''x_0\right)\delta x_0^2$$

und aus den Bedingungsgleichungen:

$$\Pi(l, 0)\,\delta a_1 = \frac{\mathfrak{Cos}\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}^2\xi_0}\left(\mathfrak{Cos}\,\xi_0\,\frac{\partial^2 F}{\partial a_2^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2}\right)\delta x_0\,,$$

$$\Pi(l, 0)\,\delta a_2 = -\frac{\mathfrak{Cos}\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}^2\xi_0}\left(\mathfrak{Cos}\,\xi_0\,\frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2}\right)\delta x_0\,.$$

Die Einsetzung dieser Werthe von δa_1 und δa_2 liefert:

52) $$\frac{\delta^2 F}{\delta x_0^2} = \frac{\mathfrak{Cos}^2\xi_0}{\mathfrak{Sin}^4\xi_0}\,\frac{M}{\Pi(l, 0)} - \frac{\mathfrak{Cos}\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}^3\xi_0} - a_1\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0 f''x_0\,,$$

wo:

$$M = -\,\mathfrak{Cos}^2\,\xi_0\,\frac{\partial^2 F}{\partial a_2^2} + 2\,\mathfrak{Cos}\,\xi_0\,\frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2}\,,$$

also, wenn man $\xi_1 - \xi_0 = \Theta_1$ und für die partiellen Differentialquotienten von F die aus 39) folgenden Werthe setzt, nach den Relationen 41):

$$M = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\xi_0\,\mathfrak{Sin}\,\xi_1}\,\{(1 + \mathfrak{Cos}^2\,\xi_0)\,\mathfrak{Sin}\,\Theta_1 - 2\,\mathfrak{Cos}\,\xi_0(\mathfrak{Sin}\,\xi_1 - \mathfrak{Sin}\,\xi_0) + \Theta_1\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\,\mathfrak{Sin}\,\xi_1\}$$

ist. Setzt man endlich für $\Pi(l,\,0)$ seinen Werth aus 42) ein, so kann man die Formel 52) so schreiben:

$$53)\qquad \frac{\mathfrak{Sin}^4\,\xi_0}{\mathfrak{Cos}\,\xi_0}\,\psi(\Theta_1)\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} = N - a_1\frac{\mathfrak{Sin}^5\,\xi_0}{\mathfrak{Cos}\,\xi_0}\,f''x_0\,,$$

worin:

$$N = \mathfrak{Cos}\,\xi_0\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\,\mathfrak{Sin}\,\xi_1\,M - \mathfrak{Sin}\,\xi_0\,\psi(\Theta_1)$$

oder nach 43)

$$N = \mathfrak{Cos}\,\xi_0\,\{(1 + \mathfrak{Cos}^2\,\xi_0)\,\mathfrak{Sin}\,\Theta_1 - 2\,\mathfrak{Cos}\,\xi_0\,(\mathfrak{Sin}\,\xi_1 - \mathfrak{Sin}\,\xi_0) + \Theta_1\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\,\mathfrak{Sin}\,\xi_1\} - \mathfrak{Sin}\,\xi_0\,(2 - 2\,\mathfrak{Cos}\,\Theta_1 + \Theta_1\,\mathfrak{Sin}\,\Theta_1\}$$

ist. Differentiirt man nun N partiell nach ξ_1, und wendet neben den Formeln 41) noch die beiden folgenden

$$1 - \mathfrak{Cos}\,\xi = -\,2\,\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\xi}{2}\,,\qquad \mathfrak{Sin}\,2\,\xi = 2\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,\mathfrak{Cos}\,\xi$$

an, so findet man:

$$\frac{\partial N}{\partial \xi_1} = \mathfrak{Cos}\,\xi_0\,\{\mathfrak{Cos}^2\,\xi_0\,\mathfrak{Cos}\,\Theta_1 - \mathfrak{Cos}\,\xi_0\,\mathfrak{Cos}\,\xi_1 + \Theta_1\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\,\mathfrak{Cos}\,\xi_1\} - \mathfrak{Sin}\,\xi_0(\Theta_1\,\mathfrak{Cos}\,\Theta_1 - \mathfrak{Sin}\,\Theta_1)\,,$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \xi_1^2} = 2\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\xi_0}{2}\left\{\mathfrak{Cos}\,\xi_0\,\mathfrak{Cos}\,\frac{\xi_0}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\Theta_1 + \Theta_1\,\mathfrak{Cos}\left(\xi_1 - \frac{\xi_0}{2}\right)\right\}.$$

Da $\mathfrak{Cos}\,\xi$ stets positiv und $\mathfrak{Sin}\,\xi$ dasselbe Zeichen hat wie ξ, so ist $\frac{\partial^2 N}{\partial \xi_1^2} > 0$ für jedes $\xi_1 > \xi_0$. Daher sind auch $\frac{\partial N}{\partial \xi_1}$ und N selbst, die beide für $\xi_1 = \xi_0$ verschwinden, stets positiv für $\xi_1 > \xi_0$.

Ist daher gleichzeitig:

$$\xi_0 < 0 \text{ und } f''x_0 \geqq 0,$$

oder aber

$$\xi_0 > 0 \text{ und } f''x_0 \leqq 0,$$

so hat die rechte Seite der Formel 53) und also, weil $\psi(\Theta_1)$ stets positiv ist, auch $\delta^2 F$ selbst für jedes $\xi_1 > \xi_0$ das positive Zeichen. Woraus das auch schon von LUNDSTRÖM abgeleitete allgemeine Kriterium hervorgeht:

Von allen gleichlangen Curven der Ebene, welche die gegebene Curve mit dem festen Punkte verbinden, erzeugt diejenige nach unten convexe Kettenlinie 35), welche senkrecht zur gegebenen Curve von dieser ausgeht, jedenfalls dann die kleinste Rotationsfläche, wenn sie und die gegebene Curve auf verschiedenen Seiten derjenigen Tangente der letzteren liegen, deren Berührungspunkt der Anfangspunkt der Kettenlinie ist, oder auch wenn die gegebene Curve in diesem Punkte die Krümmung Null besitzt, also z. B. eine gerade Linie ist.

Friedrich Schur, *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung* (vorgelegt von *Prof. Klein*).

Im 5. Bde. p. 199 der Acta mathematica hat Herr Le Paige eine Erzeugungsart der Flächen 3. Ordnung angegeben, welche desshalb nicht ohne Interesse ist, weil sie einmal als eine Verallgemeinerung einer von Grassmann für ebene Curven 3. Ordnung angegebenen Erzeugungsart angesehen werden kann, und weil sie zweitens mit beachtenswerthen Eigenschaften der Flächen 3. Ordnung in Zusammenhang steht.

Diese Erzeugung lässt sich folgendermassen aussprechen:

Sind in einer Ebene α vier gerade Linien $g_1\ g_2\ g_3\ g_4$ gegeben, ferner im Raume, diesen zugeordnet, vier andere gerade Linien $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$, welche nicht auf derselben Fläche 2. Grades liegen, und sind die Ebenenbüschel $(g_1)\ (g_2)\ (g_3)\ (g_4)$ derart quadrilinear auf einander bezogen, dass je vier Ebenen einander entsprechen, deren Schnittpunkte mit den resp. Geraden $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$ in je einer Ebene ε liegen, so ist der Ort der Puncte, in denen sich vier entsprechende Ebenen schneiden, eine Fläche 3. Ordnung F^3, welcher das vollständige Vierseit $g_1\ g_2\ g_3\ g_4$ eingeschrieben ist.

Schneiden die beiden Transversalen g und g' der vier Geraden $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$ diese in resp. $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$ und $B'_1\ B'_2\ B'_3\ B'_4$, so sind die zweimal vier Ebenen $g_1 B_1 = \alpha_1$, $g_2 B_2 = \alpha_2$, $g_3 B_3 = \alpha_3$, $g_4 B_4 = \alpha_4$ und $g_1 B'_1 = \alpha'_1$, $g_2 B'_2 = \alpha'_2$, $g_3 B'_3 = \alpha'_3$, $g_4 B'_4 = \alpha'_4$ die Seitenflächen zweier der F_3 eingeschriebener Tetraeder $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ und $A'_1\ A'_2\ A'_3\ A'_4$, welche in Beziehung auf ein in F^3 enthaltenes Perspectivitätscentrum A perspectiv liegen. Das erste Tetraeder ist die reciproke Polare des zweiten in Beziehung auf die Fläche 2. Grades, welche ich in meiner Habilitationsschrift (Math. Ann. Bd. 18, p. 12) F^2 genannt habe; ebenso ist natürlich A der Pol von α. Unsere Erzeugung gehört nämlich vermöge gewisser, auf F^3

gelegener Raumcurven 3. Grades, welche sie liefert, einer SCHLÄFLI'schen Doppelsechs zu.

Diese Raumcurven, $g_1^3\ g_2^3\ g_3^3\ g_4^3$, entstehen einmal, wenn die Ebene ε sich um die Geraden $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$ resp. dreht, und zweitens durch diejenigen Ebenen ε, welche je drei der Geraden $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$ in drei Puncten einer Geraden schneiden; diese, dem zum Netze der ersten vier conjugirten Netze angehörig, wollen wir $c_1^3\ c_2^3\ c_3^3\ c_4^3$ nennen. Jede dieser Raumcurven enthält 5 Puncte unserer Configuration, so z. B. c_1^3 und g_1^3 die 5 Puncte A_1, A'_1, $(g_2\, g_3)$, $(g_3\, g_4)$, $(g_4\, g_2)$. Ausserdem geht auch durch die 5 Puncte $A\ A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ sowohl als durch $A\ A'_1\ A'_2\ A'_3\ A'_4$ je eine Curve jedes der beiden Netze; wir wollen sie c^3, g^3 und c'^3, g'^3 nennen. *Somit stellen sich die 15 Puncte unserer Configuration als die Eckpuncte zweier vollständigen Sechsseite dar, deren Seiten Raumcurven der beiden Netze sind.*

Bis auf das letzte Resultat sind diese Sätze in der o. c. Abhandlung und in einer Note der Comptes rendus vom 29. Sept. 1884 von Herrn LE PAIGE angegeben worden. Er zeigt dort ferner, wie die 5 Schnittpuncte von irgend zwei Raumcurven 3. Ordnung conjugirter Netze, wie c^3 und g^3, auf einer gegebenen Fläche 3. Ordnung 5 Puncte unserer Configuration und damit diese selbst liefern, und hat endlich in den Berichten der Belgischen Akademie vom Aug. 1884 bewiesen, dass man auch die Geraden $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$ oder g und g' so finden kann, dass durch die Erzeugung die gegebene Fläche resultirt. Es stützt sich dieser Beweis auf eine specielle Form, welche man der Gleichung der Fläche geben kann, sodass er einen ziemlichen Apparat analytischer Hülfsmittel voraussetzt, vor Allem aber lässt er uns über die besondere Beziehung der Geraden g und g' zu unmittelbar gegebenen Elementen der Fläche im Unklaren, sodass er zur constructiven Bestimmung dieser Geraden, falls man die Configuration als gefunden voraussetzt, nicht benutzt werden kann.

Diese Ergänzung wird nun durch den folgenden Satz geliefert. Bezeichnen wir nämlich mit Herrn REYE die Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen einer Raumcurve 3. Grades als Axe derselben, so lautet der Satz:

Die Gerade g resp. g' ist die Axe einer Raumcurve 3. Grades γ^3 resp. γ'^3, welche die reciproke Polare von g'^3 resp. g^3 in Bezug auf die oben erwähnte Fläche 2. Grades F^2 ist.

Diesen Satz als bewiesen vorausgesetzt, ist es nunmehr leicht, nachdem die aus der Ebene α und den beiden Tetraedern bestehende Configuration für eine gegebene Fläche F^3 gefunden ist, die Geraden $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$ so zu bestimmen, dass F^3 durch die Le Paige'sche Erzeugung resultirt. Denn durch die Configuration sind nun auch die Raumcurven g^3 und g'^3, also auch γ'^3 und γ^3 gegeben. Nehmen wir also je eine Axe dieser Raumcurven als die Gerade g' resp. g an und bestimmen hiernach $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$, so muss nach unserm Satze die so resultirende Fläche 3. Ordnung durch g^3 und g'^3 gehen, muss also mit der gegebenen F^3 identisch sein. Natürlich hätten wir g^3 und g'^3 auch dem conjugirten Netze entnehmen können.

Den Beweis unseres Satzes können wir folgendermassen skizziren. Die durch die 5 Ebenen $\alpha\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ als Schmiegungsebenen und g als Axe eindeutig bestimmte Raumcurve 3. Grades wollen wir mit γ^3 bezeichnen. Durch die Axen derselben sind die drei Ebenen $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ collinear auf einander bezogen. Wir wollen diese als in drei collinearen räumlichen Systemen enthalten betrachten, in welchen noch die drei Geraden $h_2\ h_3\ h_4$ einander so entsprechen, dass je drei entsprechende Puncte derselben in gerader Linie liegen. Dann beweist man leicht, dass je drei entsprechende Puncte der drei Systeme in einer Geraden liegen. Denn sind $\beta_2\ \beta_3\ \beta_4$ irgend drei entsprechende Ebenen durch $h_2\ h_3\ h_4$ resp., so liegen auf diesen drei Ebenen erstens je drei entsprechende Puncte der Geraden $h_2\ h_3\ h_4$ und zweitens je drei entsprechende Puncte der Geraden $(\beta_2\ \alpha_2)\ (\beta_3\ \alpha_3)\ (\beta_4\ \alpha_4)$ in je einer Geraden; da nun durch die Zuordnung gerade dieser Puncte die collineare Beziehung der drei Ebenen bestimmt ist, so liegen je drei entsprechende Puncte derselben auf einer Axe der durch dieselben erzeugten Raumcurve 3. Grades.

Es bestimmen folglich unsere drei collinearen Systeme zu je zweien denselben tetraedralen Complex. Das Tetraeder desselben ist nun ersichtlich der Raumcurve γ^3 umschrieben. Aber es ist auch der Raumcurve c_1^3 eingeschrieben, weil diese durch die drei unseren collinearen Systemen angehörigen collinearen Ebenenbüschel $(g_2)\ (g_3)\ (g_4)$ erzeugt wird. Da zweitens auch das von den Ebenen $\alpha\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ gebildete Tetraeder sowohl der γ^3 umschrieben, als der c_1^3 eingeschrieben ist, so giebt es nach einem Satze meines Freundes Hurwitz (Math. Ann. Bd. 20,

p. 135) einfach unendlich viel solche Tetraeder, deren Kanten also sowohl Axen von γ^3 als Secanten von c_1^3 sind. Diese Kanten bilden nun eine geradlinige Fäche 6. Grades, welche c_1^3 zur dreifachen Curve hat.

Nennt man ebenso die durch $\alpha\, \alpha'_1\, \alpha'_2\, \alpha'_3\, \alpha'_4$ als Schmiegungsebenen und durch g' als Axe eindeutig bestimmte Raumcurve 3. Grades γ'^3, so beweist man in derselben Weise, dass es unendlich viel Geraden giebt, die gleichzeitig Axen von γ'^3 und Secanten von c_1^3 sind. Diese bilden wiederum eine c_1^3 als dreifache Curve habende geradlinige Fläche 6. Grades, welche demnach mit der ersten Fläche 9 gerade Linien gemeinsam hat. Dies sind nun erstens die 3 Geraden $g_2\, g_3\, g_4$ und zweitens die 6 gemeinsamen Axen von γ^3 und γ'^3, welche die eine Hälfte einer Schläfli'schen Doppelsechs bilden. Diese 6 Geraden sind also auch Secanten von c_1^3 und genau aus denselben Gründen auch von c_2^3, c_3^3 und c_4^3, sie bilden folglich die eine Hälfte der Schläfli'schen Doppelsechs unserer F^3. Die reciproken Polaren von γ^3 und γ'^3 in Bezug auf F^3 müssen daher die andere Hälfte derselben zu Secanten haben und durch $A\, A'_1\, A'_2\, A'_3\, A'_4$ resp. $A\, A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ gehen, sind folglich die Curven g'^3 und g^3, wie unser Satz behauptet.

So gewinnt durch unsern Satz nicht nur die constructive Bestimmung der zu einer gegebenen Fläche 3. Ordnung gehörigen Le Paige'schen Erzeugungen dieser den gewünschten Abschluss, sondern es erhalten nun auch die fünfte und sechste Seite des unsere Configuration bestimmenden vollständigen Sechsseits ihre Entstehung aus der Erzeugung selbst.

Corrado Segre, *Sur un cas particulier de la surface de Kummer. Lettre à M. K. Rohn.* (Vorgelegt von *Prof. Klein.)*

Dans votre note *Ueber einige specielle Fälle der Kummerschen Fläche* (Berichte der k. sächs. Gesellschaft der Wissensch. Mai 1884) vous avez étudié ces cas particuliers de la surface de Kummer qui sont 2, 3, 4 fois tétraédroïdes, mais il semble que vous n'ayez pas vu qu' il y a en outre une surface qui est *six* fois tétraédroïde.

Voici de quelle manière j'y suis parvenu. J'indique avec vous par 1 2 3 4 5 6 les six complexes linéaires fondamentaux d'une surface de Kummer. Dans la série des complexes quadratiques dont elle est la surface singulière ces six complexes forment une involution, par exemple l'involution (12) (34) (56), lorsque la surface est tétraédroïde relativement au tétraèdre fondamental (12) (34) (56) (c'est-à-dire au tétraèdre dont les couples d'arêtes opposées sont les directrices des congruences 12, 34, 56). Or six éléments 1 2 3 4 5 6 peuvent former plusieurs involutions seulement dans les cas ayant les types suivants: 1° (12) (45) (36), (12) (35) (46): on a alors une surface doublement tétraédroïde par rapport aux deux tétraèdres ayant ces mêmes symboles. — 2° (12) (45) (36), (16) (34) (25), (14) (23) (56) (les six éléments forment alors deux cycles (135) (246) d'une même homographie cyclique): deux de ces involutions ayant par conséquence la troisième on en déduit fort simplement le théorème de M. Stéphanos que les trois tétraèdres représentés par ces symboles forment un système *desmique*[1]; la surface correspondante est tétraédroïde par rapport à ces

---

1) C. Stéphanos. *Sur les systèmes desmiques des tétraèdres* (Bulletin des sciences math. 2e série, t. III, 1879, 1e partie).

trois tétraèdres. — 3° les trois involutions précédentes avec la (14) (25) (36): (les six éléments forment le cycle projectif [1 2 3 4 5 6]): la surface est quatre fois tétraédroïde. — 4° enfin les six involutions:

$$A_{pq} \cdot\cdot (12)\ (45)\ (36) \qquad A_{pr} \cdot\cdot (16)\ (34)\ (25) \qquad A_{ps} \cdot\cdot (14)\ (23)\ (56)$$
$$A_{rs} \cdot\cdot (12)\ (35)\ (46) \qquad A_{qs} \cdot\cdot (15)\ (34)\ (26) \qquad A_{qr} \cdot\cdot (13)\ (24)\ (56)\ ;$$

les trois couples 12, 34, 56 sont alors deux-à-deux harmoniques, c'est-à-dire ils forment le covariant sextique T d'une forme quartique, ou bien, en les représentant sur la sphère, *l'octaèdre*[1]).

Or vous avez bien considéré les trois premiers cas, mais non pas ce quatrième: il conduit aux conséquences suivantes.

Il y a une surface de Kummer qui est tétraédroïde six fois (le nombre maximum de fois) par rapport à six tétraèdres qui forment 3 couples $A_{pq}A_{rs}$, $A_{pr}A_{qs}$, $A_{ps}A_{qr}$ de tétraèdres ayant deux arêtes opposées communes, et 4 ternes desmiques de tédraèdres (trois tétraèdres ayant commun un indice forment une terne). Les 3 couples d'arêtes opposées communes aux 3 couples sont les arêtes d'un nouveau tétraèdre fondamental T (12) (34) (56) (qui détermine parfaitement les six tétraèdres A, comme étant ceux qui ont commun avec lui un couple d'arêtes opposées).

Cette surface de Kummer, sans invariants absolus, n'est pas un cas particulier de celle qui est 4 fois tétraédroïde. La disposition de ses points et plans singuliers est bien remarquable. On peut diviser les 16 points singuliers en 4 groupes de quatre points, sommets de tétraèdres I, II, III, IV desmiques avec T: j'indiquerai en conséquence les points singuliers par les couples de symboles I1, ... I4, ..., IV1, ... IV4; et analoguement pour les plans singuliers. Alors je trouve le tableau suivant, qui donne les six points ou plans singuliers appartenant à chaque plan ou point singulier et qui lui correspondent par rapport aux six complexes fondamentaux 1, ... 6:

I	1	II3	II4	III4	III2	IV2	IV3
	2	II4	II3	III3	III1	IV1	IV4
	3	II1	II2	III2	III4	IV4	IV1
	4	II2	II1	III1	III3	IV3	IV2

II	1	I3	I4	IV4	IV2	III2	III3
	2	I4	I3	IV3	IV1	III1	III4
	3	I1	I2	IV2	IV4	III4	III1
	4	I2	I1	IV1	IV3	III3	III2

---

2) Ces six involutions correspondent aux six rotations d'un demi-tour qui superposent l'octaèdre à soi-même sans laisser fixe aucun de ses sommets.

I	1	IV3	IV4	I4	I2	II2	II3
	2	IV4	IV3	I3	I1	II1	II4
	3	IV1	IV2	I2	I4	II4	II1
	4	IV2	IV1	I1	I3	II3	II2

IV	1	III3	III4	II4	II2	I2	I3
	2	III4	III3	II3	II1	I1	I4
	3	III1	III2	II2	II4	I4	I1
	4	III2	III1	II1	II3	I3	I2

De là on peut aussi tirer la manière suivant laquelle les éléments singuliers de la surface se correspondent par rapport aux quadriques fondamentales. On sait que les 10 quadriques fondamentales se divisent par rapport au tétraèdre T en deux groupes de 4 et de 6. Or la notation, que j'ai choisie, est telle qu'un point et un plan singuliers, lorsqu'ils sont polaires par rapport à une quadrique du premier groupe ont commun le premier symbole, et en particulier lorsqu' ils sont polaires par rapport à la quadrique (135) (246) ils sont représentés par les deux mêmes symboles; tandis que s'ils sont polaires par rapport à l'une des trois quadriques (124) (356), (125) (346), (134) (256) appartenant au groupe de 6, ils ont commun le second symbole.

Je trouve en outre cet autre tableau qui donne les quatre points ou plans singuliers appartenant aux faces ou aux sommets des six tétraèdres fondamentaux $\mathcal{A}$, par rapport auxquels la surface est tétraédroïde:

$\mathcal{A}_{pq}$	I3	I4	II3	II4
	I1	I2	II1	II2
	III3	III4	IV3	IV4
	III1	III2	IV1	IV2

$\mathcal{A}_{pr}$	I2	I4	III2	III4
	I1	I3	III1	III3
	II2	II4	IV2	IV4
	II1	II3	IV1	IV3

$\mathcal{A}_{ps}$	I2	I3	IV2	IV3
	I1	I4	IV1	IV4
	II2	II3	III2	III3
	II1	II4	III1	III4

$\mathcal{A}_{rs}$	I3	I4	II1	II2
	I1	I2	II3	II4
	III3	III4	IV1	IV2
	III1	III2	IV3	IV4

$\mathcal{A}_{qs}$	I2	I4	III1	III3
	I1	I3	III2	III4
	II2	II4	IV1	IV3
	II1	II3	IV2	IV4

$\mathcal{A}_{qr}$	I3	I2	IV1	IV4
	I1	I4	IV2	IV3
	II2	II3	III1	III4
	IV1	II4	III2	III3

Chaque plan singulier contient six points, sommets des six tétraèdres $\mathcal{A}$ et sommets du quadrilatère complet d'intersection du plan avec T, quadrilatère dont le triangle diagonal coupe la conique du plan (par rapport à laquelle il est conjugué) suivant les six points singuliers de celui-ci.

Je vous ai montré ces deux tableaux, parce qu'ils donnent toutes les propriétés de la configuration dont il s'agit; mais je ne m'arrêterai pas à les relever. Remarquez seulement que chacun des quatre tétraèdres I, II, III, IV, dans lesquels j'ai décomposé le système des points singuliers, forme une terne desmique avec le tétraèdre analogue de plans singuliers repré-

senté par le même symbole et avec T. De plus ces quatre tétraèdres de points singuliers (ou ceux de plans singuliers) sont demisques entre eux deux-à-deux: ainsi I et II forment une terne demisque avec un tétraèdre ayant deux sommets communs avec A_{pq} (sur une arête de T) et les deux autres communs avec A_{rs} (sur l'arête opposée de T); etc.

Quant à l'équation de la surface, on peut lui donner la forme très-simple

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 4\, x_1 x_2 x_3 x_4 = 0\,,$$

en prenant T pour tétraèdre des coordonnées. Cette équation, d'où l'on peut tirer toutes les propriétés de la surface, montre qu'elle se transforme en elle-même par un groupe de $16 \cdot 24$ homographies différentes (et par autant de corrélations). — Si on considère le faisceau de surfaces du 4e ordre

$$\Sigma x_i^4 + 4\lambda x_1 x_2 x_3 x_4 = 0\,,$$

il contient seulement quatre surfaces ayant des points singuliers (en exceptant T): celles qui correspondent à $\lambda = \pm 1$ ou bien à $\lambda = \pm\sqrt{-1}$; et elles sont toutes des surfaces de KUMMER de mon espèce. Les deux premières (ou bien les deux autres) ont mêmes complexes fondamentaux; les configurations de leurs points et plans singuliers sont telles que les quatre tétraèdres I, II, III, IV de points singuliers de l'une forment par leurs faces les quatre tétraèdres homologues de plans singuliers de l'autre, et réciproquement.

Turin, le 9. Août 1881.

Dr. **Ambronn,** *Zur Mechanik des Windens.*

Vorwort.

Nach dem Erscheinen der SCHWENDENER'schen Abhandlung »Ueber das Winden der Pflanzen«[1]), in welcher eine exacte Erklärung für das Zustandekommen der Schraubenwindungen versucht wurde, ist dieser Gegenstand von mehreren anderen Botanikern ebenfalls behandelt worden. Zunächst hat SACHS in einer kleinen Notiz[2]) hervorgehoben, dass Schraubenwindungen auch ohne Mitwirkung einer Stütze sich bilden können. Auf diesen Einwurf hat SCHWENDENER[3]) bereits genügend geantwortet und ich brauche mich deshalb im Folgenden damit nicht näher zu beschäftigen. Sodann hat WORTMANN[4]) bei der Besprechung der SCHWENDENER'schen Arbeit in der Botan. Zeitung einige Einwürfe erhoben; da dieselben sich im Wesentlichen in einer später erschienenen Abhandlung von KOHL wiederfinden, so werde ich bei der Besprechung der letzteren Schrift einige Bemerkungen darüber einfügen.

Ausser in jener Notiz hat SACHS in seinen »Vorlesungen über Pflanzenphysiologie«[5]) sich noch mit der Frage nach der Mechanik des Windens beschäftigt, ohne jedoch eine exacte Theorie aufzustellen; er begnügt sich vielmehr nur mit einigen aphoristischen Bemerkungen über Reizbarkeit und der etwas bedenklichen Vermuthung, dass er den Weg angegeben habe, auf welchem die wahren Ursachen des Windens zu finden sein werden.

---

1) Monatsberichte der k. Akad. d. Wiss. Berlin, December 1881.
2) Arbeiten d. Würzb. Bot. Inst. Bd. II.
3) PRINGSHEIM's Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. XIII.
4) Botan. Zeit. 1882. S. 573 ff.
5) Leipzig 1882.

Ich kann deshalb im Folgenden mit wenigen Worten über die Sachs'schen Einwürfe hinweggehen. Eine eingehendere Besprechung fordern nur die beiden zuletzt erschienenen Arbeiten von Baranetzky [1]) und Kohl [2]). Während Baranetzky keine bestimmte Theorie aufstellt, sondern nur die Beziehungen zwischen Nutation und Geotropismus mehr hervorhebt, als dies von Schwendener geschehen ist, sucht Kohl sich wiederum auf den Standpunkt Mohl's zu stellen und durch Annahme einer Reizbarkeit der windenden Internodien die Bildung der Schraubenwindungen zu erklären. Da in der Baranetzky'schen Arbeit zahlreiche Versuche beschrieben sind, die scheinbar unseren jetzigen Anschauungen über das Zusammenwirken von Nutations- und geotropischen Krümmungen widersprechen, so bin ich genöthigt, bei der Besprechung derselben etwas weitläufig zu sein, zumal jene Versuche oft unvermittelt neben einander gestellt und, wie mir scheint, überhaupt nicht nach einem einheitlichen leitenden Gesichtspunkte zusammengeschrieben sind. Es ist schwer, sich in dieser Menge von Beobachtungen zurecht zu finden, und man muss sich oft fragen: was will eigentlich der Verfasser durch diesen Versuch beweisen?

Auch bei Besprechung der Kohl'schen Arbeit bin ich gezwungen ausführlicher zu werden, als mir eigentlich wünschenswerth schien; der Grund dafür liegt theils darin, dass Kohl durch Beibringung von vielem Zahlenmaterial seine Annahme der Reizbarkeit zu beweisen sucht, theils weil er die wichtigste Stütze der Schwendener'schen Theorie, die sog. Greifbewegung, durch mehrere Versuche widerlegen zu können glaubt.

Wenn es unter diesen Umständen erklärlich ist, dass der kritische Theil der vorliegenden Abhandlung umfangreicher sich gestaltet, als die im zweiten Theil folgenden eigenen Untersuchungen, so ist dies auch schon deshalb zu entschuldigen, weil meine Beobachtungen nur eine Ergänzung der Schwendener'schen Theorie bilden sollen.

Leipzig, October 1884.

---

1) Die kreisförmige Nutation u. das Winden d. Stengel. Mem. d. Petersb. Ac. VII. Ser.

2) Beitrag zur Kenntniss des Windens d. Pflanzen. Pringsheim's Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. XV.

I. Theil.

§ 1.

Sachs hat in seinen Vorlesungen die Schwendener'sche Abhandlung als »auf mangelhaften Beobachtungen beruhend« bezeichnet, ohne jedoch den Beweis für diese Behauptung zu erbringen, ja ohne auch nur *bestimmte* Einwürfe zu erheben. Er hält die Mechanik für zur Zeit noch unaufgeklärt und nimmt eine Art von Reizbarkeit an, die jedoch nicht näher charakterisirt ist; er sagt blos: »Vor Allem handelt es sich darum, was man mit dem Worte Reizbarkeit meint, ich verstehe, wie schon gesagt, darunter jede Art von Reaction, welche ausschliesslich der lebende Organismus als solcher und in Folge seiner Lebensthätigkeit äusseren Einflüssen gegenüber zu erkennen giebt. Wenn man nun findet, dass eine umgekehrte Schlingpflanze sich von selber wieder von der Stütze abwickelt, wenn der um eine Stütze gewundene Gipfel künstlich abgewickelt von selbst gerade wird und nutirt, wenn die blosse Aufrechtstellung des Sprosses ihn veranlasst Schraubenwindungen zu machen, als ob er eine Stütze hätte, so finde ich darin die wesentlichen Merkmale von Reizerscheinungen in dem angegebenen Sinne, womit natürlich über die wahre Mechanik des Windens noch keine Erklärung gegeben ist.« Der Schluss dieses Satzes ist unzweifelhaft richtig. Die drei angeführten Erscheinungen, welche jene eigenthümliche Art von Reizbarkeit beweisen sollen, müssen etwas näher betrachtet werden. Dass bei einer Schlingpflanze, welche umgekehrt wird, die obersten Windungen sich abwickeln ist richtig, lässt sich aber durch die relative Aenderung der Nutationsrichtung, sowie durch die ebenfalls geänderte Einwirkung der Schwerkraft ganz ungezwungen erklären, wie ich im zweiten Theile zeigen werde. Der zweite Punkt, dass beim künstlichen Abwickeln der oberen Windungen der Stengel gerade wird, ist ganz selbstverständlich, denn der Geotropismus bewirkt in den noch wachsthumsfähigen Partien eine Streckung, bei der die vorhandenen Krümmungen allmählich ausgeglichen werden. Es ist mir unerklärlich, wie man auf Grund dieser Erscheinungen zur Annahme einer Reizbarkeit gelangen kann. Die Bildung von freien Schraubenwindungen an einem aufrecht gestellten Sprosse, die als dritter

Grund für die Reizbarkeit angeführt wird, tritt in der That an gesunden, normal entwickelten Sprossen nicht ein, wie schon Schwendener in seiner Entgegnung auf die erste Notiz von Sachs genügend dargelegt hat. Die diesbezüglichen Angaben von Sachs (Vorlesungen S. 822) beruhen wahrscheinlich auf »mangelhaften Beobachtungen«.

Auch dazu liegt durchaus kein Grund vor, dass man den Einfluss der Schwerkraft auf die schlingenden Sprosse von dem gewöhnlichen negativen Geotropismus orthotroper Sprosse unterscheiden muss, wie Sachs das (vergl. S. 870) anzunehmen scheint. Allerdings ist nicht zu leugnen, dass die Schwerkraft eine bestimmte Wirkung auf die Nutation der Sprosse ausübt.

Baranetzky hat eine eigenthümliche Beziehung zwischen Nutation und Schwerkraft nachgewiesen, die sich darin kund giebt, dass die kreisförmige Nutation aufhört, wenn die Pflanze der Wirkung der Schwerkraft durch langsame Rotation um eine horizontale Achse entzogen wird. Aber dieses Resultat berechtigt doch nicht zu der Annahme, welche Sachs macht. Die Versuche Baranetzky's kann ich nach meinen Beobachtungen nur bestätigen, und es erklärt sich daraus ganz ungezwungen das Abwickeln der obersten Windungen an Pflanzen, welche jener Rotation unterworfen werden, denn bei dieser Versuchsstellung fallen die beiden Factoren weg, welche die Bildung bleibender Krümmungen ermöglichen, nämlich die Greifbewegung, die beim Aufhören der Nutation nicht mehr stattfinden kann, und die Wirkung der Schwerkraft. Es ist demnach gar nicht anders möglich, als dass die noch wachsthumsfähigen bezw. nutationsfähigen Internodien sich nahezu gerade strecken und nur einige unregelmässige schwache Krümmungen zeigen.

Ueber die weiteren Bemerkungen Sachs' betreffs des Windens kann ich hinweggehen, da, wie schon hervorgehoben, keine Theorie von ihm aufgestellt worden ist, sondern nur einzelne Beobachtungen, die zum Theil gar nicht dahin gehören — wie die Besprechung der Schraubenwindungen an weiblichen Blüthenständen von Vallisneria spiralis — zusammengestellt sind. Nur auf zwei Punkte muss ich noch Einiges erwidern. Sachs giebt an, dass die Windungen mit zunehmendem Alter steiler würden (S. 825). Dies ist nur insofern richtig, als es die noch nicht fertig gebildeten Schraubenwindungen betrifft, d. h. diejenigen, welche bei Rotation um horizontale Achse wieder abgewickelt

werden würden, und deren Anzahl je nach der Dicke der Stütze und den Wachsthumsverhältnissen der einzelnen Pflanzen natürlich eine verschiedene ist. In späteren Stadien findet weder ein Aufrichten, noch überhaupt eine Veränderung des Abstandes zweier Windungen von einander statt. Ferner sagt Sachs (S. 826) »dass die zahlreichen verschiedenen Torsionen, welche man an vielen windenden Sprossen wahrnimmt, mit dem eigentlichen Problem des Windens nichts zu thun haben«. Das ist entschieden unrichtig, denn wie schon Schwendener theilweise nachgewiesen hat und wie ich im II. Theil ausführlicher zeigen werde, sind sowohl scheinbare als wirkliche antidrome Torsionen unbedingt nothwendig für das Zustandekommen von Schraubenwindungen um eine Stütze. Allerdings giebt Sachs zu, dass mit dem Winden — »weil es nach den Gesetzen der Mechanik nicht anders möglich sei« — eine Torsion nothwendig verbunden sein müsse. Welche Art der Torsion er aber damit meint, geht aus seinen Worten nicht hervor. Er sagt: »Da diese unvermeidliche Torsion gewöhnlich gar nicht zu sehen ist, thut man gut, sich von ihrer nothwendigen Existenz überhaupt zu überzeugen.«

Diese »Ueberzeugung« wird nun auf folgende Weise gewonnen: »Man denke sich einen langen Kautschukschlauch in Form einer Schneckenlinie auf den Tisch gelegt; man halte das äussere Ende des Schlauches mit der einen Hand fest, mit der anderen fasse man das innere Ende und hebe den Arm so lange, bis der ganze Schlauch vertical steht; hat man vorher eine schwarze oder weisse gerade Linie auf den Schlauch gezeichnet und diesen so auf den Tisch gelegt, dass sie überall z. B. auf der convexen Seite der Schneckenwindungen hinläuft, so bemerkt man nun, nachdem der Schlauch in der angegebenen Weise gerade gestreckt worden ist, dass unsere Linie den Schlauch in Form einer Schraubenlinie umläuft und zwar so, dass auf jede Windung der ursprünglichen Schneckenlinie nunmehr ein Umlauf dieser Torsionslinie kommt, der aber der ursprünglichen Schneckenwindung entgegengesetzt ist.« Die Torsion, welche bei diesem Experiment auftritt, ist eine wirkliche antidrom verlaufende. Die wirklichen antidromen Torsionen, welche beim Winden auftreten, kommen auf ganz andere Weise zu Stande, als bei jenem Schlauche; sie werden durch den Widerstand, welche die Stütze den Nutationsbewegungen entgegensetzt, erzeugt und sind immer deutlich zu sehen, wenn

sie auch manchmal, z. B. an sehr dünnen Stützen, durch die homodromen Torsionen nachträglich wieder verdeckt werden. Da übrigens nach Sachs Windungen auch ohne Mitwirkung einer Stütze zu Stande kommen sollen, so kann natürlich an solchen eine derartige wirkliche antidrome Torsion überhaupt nicht auftreten; höchstens könnten durch das Eigengewicht der Sprossgipfel in dem Sinne, wie es de Vries[1]) angiebt, geringfügige Torsionen entstehen, auf die sich aber die Sachs'sche Bemerkung jedenfalls nicht bezieht.

Um die wirkliche antidrome Torsion, wie sie bei normal windenden Sprossen auftreten muss, deutlich zu machen, ist also der Versuch mit dem Kautschukschlauch nicht geeignet, aber noch weniger dazu, um die scheinbare Torsion zu erklären, die sich zeigt, wenn ein cylindrischer Stab schraubenlinig in der Weise gekrümmt wird, dass die einzelnen Querschnittsscheiben gegen einander um einen constanten Winkel und um eine zur Längsrichtung des Stabes senkrechte Achse gekrümmt werden. Diese scheinbare antidrome Torsion ist selbstverständlich etwas ganz Anderes als diejenige, welche man an einem künstlich gedrehten Kautschukschlauche wahrnimmt.

Wenn Sachs, wie schon erwähnt wurde und wie aus mehreren seiner Bemerkungen hervorgeht, die Mitwirkung der Stütze für überflüssig bei der Bildung von Windungen hält, so wäre es wohl denkbar und »nach den Gesetzen der Mechanik« durchaus zulässig, dass Schraubenwindungen ohne antidrome Torsion entstünden.

§ 2.

Ich wende mich nun zur Besprechung der Baranetzky'schen Arbeit. Dieselbe zerfällt in zwei Theile: der erste handelt über die kreisförmige Nutation und der zweite über das Winden selbst. Wie schon erwähnt wurde, hat Baranetzky nachgewiesen, dass die kreisförmige Nutation sistirt wird, sobald man die Pflanze langsam um eine horizontale Achse rotiren lässt. Die Versuche, die ich in dieser Hinsicht anstellte, ergaben stets dasselbe Resultat. In der ersten Stunde etwa, nachdem die Pflanze auf den Rotationsapparat gebracht worden war, ging die Nutation noch ziemlich regelmässig vor sich, später aber hörte

1) Arbeiten des Bot. Instituts zu Würzburg, Bd. I, S. 333, 334.

sie auf; die Bewegungen, welche die Sprossspitze ausführte, waren sehr unbedeutend und unregelmässig, mehr pendelartig als revolutiv. In welcher Weise die Schwerkraft bei der Nutation betheiligt ist, muss vorerst ganz unerklärt bleiben. Für die Mechanik des Windens ist diese Thatsache insofern von Bedeutung, als das Resultat der Rotationsversuche nicht mehr zu der Schlussfolgerung berechtigt, dass der Geotropismus nothwendig für das Zustandekommen der Schraubenwindungen ist. Denn wir wissen jetzt, dass zugleich mit der Wirkung der Schwerkraft auch die Nutation aufhört, und dass beide Factoren bei den Rotationsversuchen nicht auseinander gehalten werden können. Demnach müssen die Angaben Schwendener's (S. 1088, 89) in der Weise berichtigt werden, dass der Satz »Von den beiden Wirkungen der Schwerkraft fällt also das Eigengewicht ausser Betracht, der Geotropismus allein ist Bedingung des Windens« nicht auf Grund beweiskräftiger Versuche aufgestellt worden ist. Damit soll aber durchaus nicht etwa gesagt sein, dass der Geotropismus überhaupt kein integrirender Factor des Windens ist; wir werden später sehen, welche wichtige Rolle geotropische Krümmungen beim Vorgange des Windens spielen.

Dass die Stengel der Schlingpflanzen sogar ausserordentlich empfindlich für die Einwirkung der Schwerkraft sind und negativen Geotropismus zeigen, geht unzweifelhaft daraus hervor, dass nach abwärts gekehrte lebhaft wachsende Sprossenden von Calystegia dahurica oft schon nach $^1/_2$ — $^3/_4$ Stunde sich wieder geotropisch aufrichten.

Aus der von ihm gefundenen Thatsache, dass die Nutation aufhört, wenn der Geotropismus eliminirt ist, schliesst nun Baranetzky, dass die normale Nutation überhaupt nur dann stattfinden könne, wenn der Sprossgipfel, um welchen das stärkere Wachsthumsbestreben herumwandert, aufrecht stehe, dass dagegen bei horizontaler Lage die Nutation wesentlich modificirt werde. Er hat viele Versuche in dieser Richtung angestellt und glaubt daraus nachweisen zu können, dass eine andere Art der Nutation in diesem Falle stattfindet, die er zur Unterscheidung von der kreisförmigen symmetrischen der aufrechten Sprosse als *asymmetrische* bezeichnet. Diese asymmetrische Nutation geht in folgender Weise vor sich. Legt man einen nutationsfähigen Sprossgipfel horizontal und zwar so, dass die vorhandene Krümmung homodrom, d. h. mit der Nutationsrich-

tung gleich verlaufend ist, so muss in der nächsten Nutationsphase das stärkere Ausdehnungsbestreben auf die nach unten gekehrte Seite wandern. Inzwischen ist aber in dieser unteren Seite eine geotropische Krümmung entweder schon eingetreten oder doch wenigstens inducirt worden. Die Folge davon wird sein, dass im Verlaufe dieser Phase nicht eine Verticalstellung der Krümmungsebene, sondern nur eine Schiefstellung derselben stattfinden kann, wie dies in einer von mir in den Ber. der Deutsch. Bot. Ges. gemachten vorläufigen Mittheilung[1]) kurz angedeutet worden ist. In der nächsten Nutationsphase wird nun allmählich die Verticalstellung erreicht, und es tritt auch öfters eine geringe Krümmung nach der anderen Seite ein, hauptsächlich in dem oberen Theile des Sprosses, welcher durch die vorhergehende Bewegung in eine nahezu verticale Stellung gebracht worden war. Bei nochmaligem Weitergehen der Nutation um 90° tritt ein allmähliches Aufrollen der Krümmung ein, denn jetzt gelangt das stärkere Ausdehnungsbestreben auf die beim Anfange des Versuches nach oben gekehrte Seite. Da in dem Sprosse eine negative geotropische Krümmung vorhanden ist, so wird das Nutationswachsthum auf der concaven Seite dadurch sich zu erkennen geben, dass derselbe allmählich gerade gestreckt wird. Ist dieser letztere Zustand erreicht, so wird nunmehr wieder eine homodrome Krümmung entstehen, sobald das stärkere Ausdehnungsbestreben nochmals um 90° weiter fortgeschritten ist. Die Spitze hat demnach nicht einen Kreis beschrieben, sondern eine ellipsenähnliche Curve.

Wenn die Sprossenden nicht zu lang sind, so kann man diese Art der Nutation sehr schön beobachten, da das Eigengewicht der Spitze in solchem Fall nicht störend auf den Verlauf der Bewegung einwirkt. Dass bei der asymmetrischen Nutation die mit der Lage der Sprossgipfel nothwendigerweise verbundenen geotropischen Krümmungen eine wichtige Rolle spielen, ist von vornherein klar, und Baranetzky hat dies auch ganz richtig erkannt; er nimmt jedoch neben diesen negativgeotropischen Krümmungen noch eine andere Einwirkung der Schwerkraft an, die darin bestehen soll, dass nicht blos die untere Seite stärker wächst, sondern auch, und zwar in noch höherem Grade, die bei der homodromen Krümmung auf der

1) Bd. II, Heft 5. 1884.

Convexität liegende Längszone. Diese Annahme, die ihm zur Aufstellung einer besonderen Art von Krümmung, der »transversalen Krümmung«, veranlasst hat, ist, wie ich zeigen werde, gänzlich ungerechtfertigt; sie rührt jedenfalls daher, dass sich Baranetzky den Verlauf der normalen Nutationsbewegungen an einem bereits bogenförmig gekrümmten Organe nicht genügend klar gemacht hat.

Ich gehe nunmehr dazu über, die einzelnen Sätze und Versuche Baranetzky's näher zu besprechen. Auf S. 1 sagt B.: »Diese Nutation [die kreisförmige] [1]) kann aber jetzt a priori in zweierlei Weise gedacht werden: entweder nutirt dieser freie Theil in horizontaler Ebene weiter fort, seine Stütze direct umwindend, oder die freie Spitze bewegt sich jetzt um den horizontalen, der Stütze unbeweglich anliegenden Stengeltheil in der Weise im Kreise herum, wie sie früher um den aufrechten Stengel nutirte, wodurch die Bewegungsebene eine verticale Stellung erhalten würde.« Es ist von der kreisförmigen Nutation die Rede, deshalb ist der erste Fall a priori überhaupt nicht denkbar, denn wenn die Spitze fortwährend die Stütze weiter umschlingen, also sich immer nur nach derselben Richtung krümmen würde, so könnte doch dies unmöglich als kreisförmige Nutation bezeichnet werden. Diese Auffassung B.'s, sofern ich die citirte Stelle richtig verstehe, erinnert an den Darwin'schen Vergleich der nutirenden Sprosse mit einem geschwungenen Seile, das sich um einen in die Schwingungsebene eingeführten Stab herumschlingen würde. Dass diese Möglichkeit von keinem Botaniker — selbst nicht von Darwin, der damit blos einen Vergleich geben wollte — angenommen wurde, ist wohl zweifellos. Der zweite Fall ist allerdings a priori denkbar, aber nur unter der Annahme, dass bei der horizontalen Lage des Sprosses keine geotropischen Krümmungen eintreten. Es unterliegt jedoch ebenfalls keinem Zweifel, dass eine solche Annahme nicht gemacht werden darf.

S. 2. »Im Weiteren werden wir sehen, dass das Winden nur zum kleineren Theile durch die mechanischen Verhältnisse, hauptsächlich aber durch gewisse organische Eigenschaften der windungsfähigen Stengelspitze bestimmt wird.« Allerdings wird

1) Alle Zusätze in den folgenden Citaten, welche in [ ] eingeschlossen sind, rühren von mir her, alle übrigen in ( ) von den betreffenden Verfassern.

das Winden durch die organischen Eigenschaften der Stengelspitze bestimmt, und zwar nicht blos hauptsächlich, sondern ganz ausschliesslich durch diese. Eine exacte mechanische Erklärung hat nur nachzuweisen, in welcher Weise durch das Zusammenwirken dieser verschiedenen organischen Eigenschaften mit den äusseren Verhältnissen — z. B. mit dem Widerstande, den die Stütze leistet, mit der Lage der Stengel zum Horizont u. s. w. — die Schraubenwindungen zu Stande kommen können.

S. 9 sagt B., dass Schwendener die Bewegungen und Krümmungen einer windenden Stengelspitze nicht genügend illustrirt hätte. Schwendener sagt aber selbst in seiner Abhandlung (S. 1090): »Eine vollständig klare Einsicht in diese complicirten mechanischen Vorgänge lässt sich indessen nur gewinnen, wenn man die successiven Stadien der fraglichen Krümmungs- und Torsionsbewegungen von Zeit zu Zeit, etwa alle Viertelstunden, durch geeignete Nachbildungen fixirt«, und weiter unten: »*Blosse Beschreibung und Skizzen erweisen sich für diesen Zweck als ungenügend.*« Merkwürdigerweise sagt B. noch auf derselben Seite, dass auch Schwendener die Nothwendigkeit erkannt hätte, die stattfindenden Bewegungen der Stengelspitze Schritt für Schritt zu verfolgen. Hält man diese beiden Äusserungen B.'s zusammen, so bleibt es unerfindlich, wie B. zu dem obigen Vorwurf berechtigt ist.

S. 12 heisst es: »Es ist in der That die gewöhnliche und scheinbar kaum berücksichtigte Erscheinung, dass die einmal entstandene [Nutations-] Krümmung sich nur schwer wieder ausgleicht, der einmal gekrümmte Stengeltheil wird nicht wieder gerade«, und auf derselben Seite: »wenn der unmittelbar gekrümmte Stengeltheil zu wachsen aufhört, so *erstarrt* so zu sagen seine Krümmung«; auf S. 16 wird aber dieses Zurückbleiben der Krümmung, wie es auch ganz richtig ist, dem Einflusse des Gewichtes der langen Sprossenden zugeschrieben: »Dies ist ohne Zweifel der Wirkung des immer zunehmenden Gewichtes der rasch anwachsenden horizontalen Spitze zuzuschreiben.« Also kann doch dabei von einem räthselhaften »Erstarren« nicht die Rede sein.

Die auf S. 21—24 gemachten Angaben über den Einfluss des Heliotropismus auf das Winden der Pflanzen haben keine Bedeutung für die Mechanik dieses Vorganges, weshalb ich dieselben hier übergehe.

Auf S. 30 heisst es: »Das Geradestrecken der Windungen [beim Rotiren um eine horizontale Achse] kommt hier offenbar in Folge der Ausgleichung der Nutationskrümmungen zu Stande, wie wir eine solche Erscheinung schon oben an den frei nutirenden Stengelspitzen kennen gelernt haben. Der andere Umstand, welcher bei den betreffenden Bedingungen wahrscheinlich das Freiwerden der Spitze erleichtert, ist die Ausgleichung der in derselben schon vorhandenen antidromen Torsion. Wie schon Schwendener erkannte, erhalten die Stengel bei ihrem Winden immer eine antidrome Torsion, welche hier durch rein mechanische Ursachen bedingt wird und darum immer die Neigung hat, bei Aufhören dieser Ursachen sich wieder auszugleichen. Später werden wir sehen, dass diese Torsionen wesentlich in Folge der Nutationsbewegungen der windenden Stengelspitze entstehen.« Hiergegen ist Verschiedenes einzuwenden. Zunächst kann eine homodrome Torsion zwar die vorhandene antidrome ausgleichen, aber sie kann nicht ein *Abwickeln* der Windungen bedingen; denn durch homodrome Torsionen würden die Windungen noch enger und müssten deshalb noch fester an die Stütze angedrückt werden. Wohl aber könnte in Folge dessen ein *Abrutschen* oder *Abgleiten* der Windungen erfolgen, wenn die Spannungen dazu genügend gross sind.

Das in der That stattfindende Abwickeln erklärt sich jedoch hinreichend durch das Aufhören der Nutationsbewegungen.

Ferner ist nicht ersichtlich, weshalb eine vorhandene antidrome Torsion die »Neigung« hat, sich wieder auszugleichen. Dieses Ausgleichen wird durch die nunmehr eintretende homodrome Torsion, die eine Erscheinung für sich ist, bedingt, und da die Bedingungen für die antidrome Torsion fehlen, so kann die Ausgleichung bei der starken homodromen Torsion, wie sie sich wirklich an windenden Sprossen findet, sehr bald herbeigeführt werden. Drittens sind die antidromen Torsionen nicht wesentlich Folge der Nutationsbewegungen, sondern sie werden durch den Widerstand, welchen die Stütze jenen Bewegungen entgegensetzt, hervorgerufen.

Auf derselben Seite heisst es weiter: »Dass die Verlangsamung (oder Stillstand) der kreisförmigen Nutation und die damit verbundene Streckung der Krümmungen eine theilweise Ausgleichung der antidromen Torsion wirklich ermöglicht, ist aus der oben angegebenen Thatsache zu schliessen, wo an den

sich streckenden Windungen eine (scheinbar durch Ausgleichung der antidromen entstehende) homodrome Torsion noch vor dem vollständigen Befreien der Spitze zu constatiren ist, während Schwendener gezeigt hat, dass mit dem Steilerwerden der Windungen die antidrome Torsion einer Spirale [Schraubenlinie] sich im Gegentheil vergrössern muss.« Dieser Satz ist mir unverständlich. Wenn Baranetzky hier die wirklichen antidromen Torsionen, wie sie an den gewundenen Stengeln vorkommen, mit den scheinbaren, die beim Steilerwerden der Windungen allerdings stärker werden, vergleichen will, so ist das eben nicht zulässig; wenn er aber im letzten Absatze die wirklichen Torsionen meint, so ist das nicht richtig, denn diese werden desto schwächer, je steiler die Windungen, bezw. je dünner die Stützen werden. Dies sagt übrigens Schwendener ganz ausdrücklich in dem Absatze über die Torsionen.

Was B. schliesslich unter einer scheinbar durch Ausgleichung der antidromen entstehenden homodromen Torsion verstanden haben will, ist mir gänzlich unerfindlich. Es finden sich übrigens derartige Stellen, wo offenbar die verschiedenen Torsionsarten nicht genügend auseinander gehalten werden, noch mehrere in der Baranetzky'schen Arbeit, und es ist merkwürdig, dass gerade die an sich so einfachen geometrischen Beziehungen Anlass zu Verwechslungen geben. Wir sahen dieselbe Verwirrung auch schon in den oben citirten Sachs'schen Bemerkungen und werden weiter unten einem ähnlichen Falle in der Kohl'schen Arbeit begegnen.

Auf S. 33 ff. beschreibt B. einen Krümmungsmodus, der auf den ersten Blick nicht mit den gewöhnlichen Bewegungen bei der asymmetrischen Nutation übereinzustimmen scheint. Es wurde oben schon erwähnt, dass bei der letzteren die homodrome Krümmung immer stärker sein muss, als die entgegengesetzte. B. beschreibt nun mehrere Versuche, aus denen hervorgehen soll, dass die homodrome Krümmung deshalb immer mehr verstärkt wird, weil bei horizontaler Lage der Krümmungsebene die (von oben gesehen bei linksnutirenden Pflanzen) rechte Flanke stets ein grösseres Ausdehnungsbestreben besitzen soll. Er kommt auf Grund dieser Annahme schliesslich zur Aufstellung des Satzes: »Bei horizontaler Lage einer nutationsfähigen Stengelspitze werden unter Einwirkung der Gravitation Verhältnisse geschaffen, in deren Folge das bevorzugte Wachsthum

nothwendig in eine Seitenkante versetzt wird.« Das heisst mit anderen Worten: Bei horizontaler Lage einer nutationsfähigen Spitze wirkt die Schwerkraft in der Weise, dass erstens das regelmässige Herumwandern der Nutation sistirt wird und das stärkere Ausdehnungsbestreben sich nur auf der bei der homodromen Krümmung convexen Seite geltend macht, und dass zweitens nicht wie gewöhnlich bei horizontal liegenden negativ geotropischen Sprossen die nach unten gekehrte Seite stärker wächst, sondern die um 90° von derselben entfernte Längszone. Diese Annahme ist nun entschieden ungerechtfertigt, denn das regelmässige Herumwandern des stärkeren Ausdehnungsbestrebens findet, wie übrigens aus den Versuchen B.'s selbst hervorgeht, in ganz normaler Weise statt, und die Sprossen zeigen auch den gewöhnlichen negativen Geotropismus; von einem Transversalgeotropismus, wie ihn B. annimmt, ist keine Spur vorhanden. Es rührt diese Anschauung B.'s nur daher, dass er sich die aus den Nutationskrümmungen und den schon vorhandenen oder doch wenigstens während der Nutation eintretenden geotropischen Krümmungen resultirenden Bewegungen nicht genügend klar gemacht hat.

Ein auf S. 39 beschriebener Versuch, der darin besteht, dass eine aufrecht stehende symmetrisch nutirende Spitze nach unten gekehrt wird, soll ebenfalls beweisen, dass »die Richtung, in welcher das beschleunigte Wachsthum um den nutirenden Stengel herumschreitet, von der Natur der Pflanze nicht abhängig«, sondern — so ist zu ergänzen — durch die Einwirkung der Schwerkraft bedingt wird. B. behauptet nämlich, dass bei einem solchen Versuche die Nutation erst noch eine Zeit lang in der normalen Weise fortdauere, dann aber in der umgekehrten Richtung stattfinde, dass also eine linksnutirende Pflanze kurze Zeit nach dem Umkehren rechts nutire; er behauptet ferner, dass man auf diese Weise durch öfteres Umkehren bewirken könne, dass die Spitze sich fortwährend hin und zurück im Kreise bewege. Diese Behauptungen B.'s entbehren jeder Begründung; denn in der That findet eine solche Umkehrung der Nutationsrichtung, wie man sich leicht durch das Experiment überzeugen kann, niemals statt; die Pflanze nutirt eine Zeitlang in ganz normaler Weise fort, und dann kommt die geotropische Aufwärtskrümmung der Internodien hinzu, welche allerdings die Bewegungen modificirt, aber durchaus nicht zu der

Behauptung, die Nutationsrichtung habe sich geändert, Anlass geben kann. Nachdem die Aufwärtskrümmung beendet ist, treten die Nutationsbewegungen wieder deutlich hervor.

Wenn die B.'schen Beobachtungen richtig wären, so müsste natürlich ein zweimaliges Umkehren der Nutation stattfinden, denn erst soll die Pflanze nach dem Umkehren in entgegengesetzter Richtung nutiren und dann, nachdem sie durch den Geotropismus aufwärts gekrümmt ist, soll sie wieder normale Nutation zeigen.

Auf S. 40 und 41 ist ein Versuch wiedergegeben, der mit einem innerhalb der nutationsfähigen Region festgehaltenen Sprossgipfel angestellt wurde. Die Bewegungen werden genau beschrieben und durch Skizzen illustrirt, bieten aber wesentlich Neues nicht dar, denn die Pflanze nutirt ganz normal; es wird nur dadurch eine Veränderung bedingt, dass die beiden zum Versuch benutzten Internodien ungleich schnell nutiren, was übrigens B. selbst auch angiebt. Durch diese letztere Eigenthümlichkeit, die man fast an jeder Schlingpflanze beobachten kann, wird bewirkt, dass bogenförmig gekrümmte Partien oft längere Zeit in horizontaler oder fast horizontaler Lage bleiben. Infolge dessen kommen zu den Nutationskrümmungen noch geotropische hinzu und es treten die schon öfters erwähnten resultirenden Bewegungen ein. Ferner ist zu beachten, dass während der ziemlich langen Dauer des Versuchs jedenfalls auch ansehnliche homodrome Torsionen eintraten, obwohl dies nicht ausdrücklich gesagt ist. Durch derartige Torsionen, die an frei nutirenden Sprossenden stets auftreten, müssen die Nutationsbewegungen ebenfalls etwas modificirt werden, denn die Zonen stärksten Wachsthums sind hierdurch zu Schraubenlinien geworden. Beachtet man dies Alles, so zeigen die Bewegungen, wie sie B. beschreibt, durchaus nichts Besonderes. Die Schlussfolgerung, die aus diesem Versuche gezogen wird, dass »die Nutation in der frei gebliebenen Stengelspitze desto mehr verlangsamt wird, je näher die verhinderte festgehaltene Stelle liegt«, ist demnach nicht gerechtfertigt.

Der Abschnitt »*Bildung einer freien Spirale*« S. 42 ff. bedarf einer ausführlicheren Besprechung. B. will darin nachweisen, dass Bildung von Schraubenwindungen auch ohne Stütze nur durch Nutation und Geotropismus stattfinden kann. Der erste Versuch, den er beschreibt, ist jedenfalls nicht beweiskräftig;

denn er sagt selbst auf S. 44, dass die Windungen im Verlaufe von 19 Stunden sich nicht mehr verändert haben und dass vorher schon die Nutationsbewegungen sehr verlangsamt waren. Wir haben es hier wahrscheinlich mit einem jener Fälle zu thun, wo eine pathologische Erscheinung vorliegt und durch excentrische Torsionen (es ist bei der Beschreibung leider nichts über die Torsionen angegeben) dauernde Windungen erzeugt werden. Ich verweise dabei auf die schon oben erwähnte Erwiderung Schwendener's gegen Sachs (Pringsheim's Jahrb. Bd. XIII).

Was theoretisch über die mechanischen Verhältnisse gesagt wird, welche bei Bildung einer freien Spirale in Betracht kommen sollen, ist etwas unklar gehalten.

Es heisst auf S. 43: »Denken wir uns eine Spitze, welche in ihrem unteren Theile in verticaler, weiter in horizontaler Ebene gekrümmt ist. So lange die horizontale Krümmung sich in dieser Lage befindet, wird sie nur immer stärker.« — Das letztere ist zwar nicht richtig, soll aber vorerst zugegeben werden. — »Geht aber das beschleunigte Wachsthum auf die untere Seite des Stengels über, so wird die Krümmungsebene in verticale Lage gebracht und die Bildung einer freien Spirale wird somit aufhören müssen. Das kann aber durch verschiedene Umstände verhindert werden. So lange der untere Theil der Krümmung sich noch in senkrechter Ebene befindet, so muss seine Nutation dem Aufwärtskrümmen entgegenwirken: bei dieser Nutation wird derselbe um seine Achse umgedreht [?], somit in dem Maasse, als die Krümmung des äusseren Theils der Spitze sich zu heben versucht, sie immer wieder gesenkt und in horizontaler Ebene behalten wird.« B. will also damit sagen, — sofern ich den Absatz richtig verstehe — dass bei der regelmässigen symmetrischen Nutation des unteren Theiles die gewissermassen starr bleibende oder sich höchstens noch verstärkende Krümmung des oberen Theils so im Kreise herumgeführt wird, dass sie stets in horizontaler Ebene bleibt. Dies wäre in der That der Fall, wenn der untere Stengeltheil wirklich um seine Achse gedreht würde, wie B. anzunehmen scheint. Eine solche Drehung ist aber gar nicht vorhanden, denn die Krümmungen des unteren Theils sind reine Nutationskrümmungen, bei denen keine Querschnittsscheibe gegen die andere verschoben wird. Demnach müsste die horizontale Krümmung des

oberen Theils, wenn sie wirklich als bleibend oder sich nur noch verstärkend angenommen werden dürfte, successive nach unten, nach rechts, nach oben und schliesslich wieder nach links geöffnet sein. Was B. mit den Worten »So lange — entgegenwirken« sagen will, ist mir gänzlich unklar geblieben, es handelt sich doch hier zunächst ausschliesslich um Nutationskrümmungen und diese können sich doch niemals entgegenwirken; denn das ist ja eben das Charakteristische der Nutation, dass immer nur an *einer* Längszone das stärkere Ausdehnungsbestreben vorhanden ist.

Die Annahme, dass die Krümmung des oberen Theils längere Zeit hindurch bleibt oder sich noch verstärkt, ist jedenfalls nicht richtig; denn dieser obere Theil nutirt ebenso regelmässig wie der untere, nur werden seine Bewegungen durch die Einwirkung des Geotropismus etwas modificirt. Selbst wenn es richtig wäre, dass eine immer in horizontaler Ebene bleibende Krümmung sich fortwährend verstärken müsste, so könnte dies doch in dem eben beschriebenen Falle gar nicht eintreten, denn, wie wir gesehen haben, kann unter jener Annahme die Krümmung gar nicht in der Horizontalebene bleiben.

Nimmt man dagegen an, dass der obere Theil regelmässig nutirt, wie es auch der Wirklichkeit entspricht, und macht man zugleich die weitere Annahme, dass die Umlaufszeit der Nutation beim oberen Theile dieselbe ist wie beim unteren, so muss allerdings, wenn keine störenden Einwirkungen dazu kommen, die Krümmung des oberen Theiles immer in der Horizontalebene bleiben. Ist z. B. der untere Theil in der Verticalebene nach Norden, der obere Theil in der Horizontalebene nach Westen gekrümmt, so muss nach einem $\frac{1}{4}$ Umlauf der Nutation der untere Theil nach Westen und der obere nach Süden gekrümmt sein. Nach einem nochmaligen Weitergehen der Nutation um 90° in beiden Theilen muss der untere nach Süden, der obere nach Osten gekrümmt sein. Auf diese Weise geht es weiter, bis die alte Lage wieder erreicht ist, vorausgesetzt, dass in beiden Theilen in demselben Zeitraume die Nutation auch um denselben Winkel fortschreitet. Dieses Herumwandern des stärkeren Ausdehnungsbestrebens geht jedoch im unteren Theile um eine verticale, im oberen um eine horizontale Achse vor sich. Demnach müsste also, wenn man alle anderen Einwirkungen ausschliessen könnte, die Form der einmal entstandenen Curve unter den obigen

Bedingungen beibehalten werden, aber jeder Punkt derselben würde während eines Nutationsumlaufs einen vollen Kreis beschreiben. Diesen eben beschriebenen Bewegungsvorgang hat aber offenbar B. nicht gemeint, denn sonst würde der Satz »So lange die horizontale Krümmung in der Lage bleibt, wird sie nur immer stärker«, gar keinen Sinn haben.

Ich brauche wohl kaum hinzuzufügen, dass die eben rein theoretisch geschilderte Bewegung in dieser Regelmässigkeit sich an der Pflanze nicht beobachten lässt, einmal deshalb, weil der Geotropismus einwirken muss und Veränderungen der Krümmungen hervorruft und zweitens, weil die Bedingung, dass die Nutation in allen Theilen gleiche Umlaufszeit habe, wohl niemals in der Natur verwirklicht ist.

Der zweite Versuch, welcher auf S. 45—47 beschrieben ist, zeigt nur, dass unter günstigen Umständen eine Bildung von Schraubenwindungen unter Einwirkung von Nutation und Geotropismus stattfinden kann, derartige Krümmungen, die aber selten mehr als eine Windung darstellen, hat man häufig Gelegenheit zu beobachten; dieselben sind aber niemals bleibend, sondern werden stets wieder in kurzer Zeit verändert. Die ersten Stadien des beschriebenen Versuches I—IV in Fig. 8, S. 45 sind solche aus Nutation und Geotropismus resultirende Bewegungen.

Bei den Stadien V und VI haben jedenfalls excentrische homodrome Torsionen mitgewirkt, die mit einer Verzögerung des Wachsthums verbunden sind. Dafür spricht erstens, dass auf dem oberen Theile auf längerer Strecke dieselbe Längslinie auf der Convexität liegt, zweitens dass im Verlauf von 1½ Stunden ein sonst noch ganz nutations- und wachsthumsfähiger Theil fast gar keine Bewegungen mehr ausgeführt hat. Auch ein Satz auf S. 47 lässt erkennen, dass bei anderen nicht näher beschriebenen Versuchen ebenfalls ein solcher Zustand eingetreten war, der möglicher Weise durch die Art der Befestigung hervorgerufen wurde; jener Satz lautet: »In einigen anderen Versuchen war der geringe Werth der antidromen Torsion noch auffallender, ja in einer Spirale deren Windungen ausserordentlich niedrig waren (die Neigung der Windungen ca. 10°) ging die Marke durch beinahe zwei Windungen überall auf der convexen Seite derselben, es war also dabei fast keine Torsion zu bemerken.« Hieraus geht nur das mit Sicherheit hervor, dass die Bil-

dung jener niedrigen Windungen ganz ebenso wie die der Ranken erfolgt ist, nämlich durch excentrische homodrome Torsion; dies wird noch bestätigt durch den folgenden Satz, welcher lautet: »Es ist wichtig, diesen letzteren Umstand zu constatiren, denn die Mechanik der Spiralenbildung wird bei dieser Bedingung ausserordentlich einfach und leicht verständlich; entsteht in der That eine spiralförmige Krümmung bei der Bedingung, dass keine Torsion des Stengels zu bemerken ist, so wachsen offenbar nur immer dieselben Stengelseiten — eine wirkliche kreisförmige Nutation des Stengels kommt dabei nicht zum Spiele. Eine ausgezogene Spirale [Schraubenlinie] entsteht hier also wesentlich dadurch, dass sich eine horizontale Stengelspitze fortwährend nur auf ihrer Aussenseite und ihrer Unterseite verlängert.« Auf diese Weise wird allerdings die Mechanik der Bildung von Windungen »ausserordentlich einfach und leicht verständlich, aber es ist doch zweifellos, dass mit dergleichen Betrachtungen für eine exacte Erklärung der Mechanik des Windens um eine Stütze auch nicht das Geringste gewonnen wird; denn wenn gerade der wesentlichste Factor, die Nutation, ganz ausser Acht gelassen wird, so ist eine richtige Auffassung der vorliegenden Frage von vornherein unmöglich.

Was B. weiterhin über die bei dem eben besprochenen Versuche aufgetretenen Torsionen sagt, ist zum Theil unrichtig. Richtig ist jedenfalls, dass das Eigengewicht der Spitze keinen merkbaren Einfluss auf die Tordirung des Stengels ausübt. Ich kann die Angaben B.'s in dieser Hinsicht nur bestätigen. Trotzdem sind antidrome Torsionen vorhanden.

Allerdings können nun scheinbare antidrome Torsionen durch Nutationskrümmungen veranlasst werden, aber nur dann, wenn die bei der Krümmung entstehende Curve nicht eine ebene, sondern eine Schraubenlinie oder doch wenigstens eine der letzteren ähnliche ist, denn hierbei ist der Bedingung genügt, dass die Krümmungen in verschiedenen Ebenen um zur Längsrichtung des Stengels senkrecht gestellte Achsen stattfinden, ohne dass eine Verschiebung der einzelnen Querschnittsscheiben gegen einander eintritt. Solche scheinbare Torsionen können jedoch nicht entstehen, wenn die Krümmungen durch excentrische homodrome Torsion gebildet werden, wie dies in dem unteren Theile des in Fig. 8, VI skizzirten Stengels der Fall war.

Wirkliche antidrome Torsionen können aber in Folge der blossen Nutation auch nicht entstehen, wie dies B. annimmt: was er in dem Capitel: *Antidrome Torsion in Folge der symmetrischen Nutation* bespricht, sind zwar wirkliche antidrome Torsionen, aber sie rühren nicht von den Nutationskrümmungen allein her, sondern sie werden dadurch erzeugt, dass der normale Fortgang jener Krümmungen ganz ebenso wie bei der sog. Greifbewegung gehindert wird. Dass von dieser Art der Torsion bei frei nutirenden Sprossen keine Rede sein kann, ist selbstverständlich; aber auch jene scheinbaren antidromen Torsionen sind nicht identisch mit den von B. bei seinem Versuche beobachteten; denn in den Stadien, wo gerade die stärksten Torsionen auftreten (S. 46), liegen gar keine Krümmungen in verschiedenen Ebenen vor, — man vergl. Fig. 8, II und III, S. 45 — sondern wir haben es nur mit einer ebenen Curve zu thun und die später stattfindende Aufwärtskrümmung der Spitze, die durch eine punktirte Linie dargestellt wird, steht mit der im Text angegebenen Torsion zunächst in gar keiner Beziehung. Wir müssen deshalb nach einer anderen Ursache dieser Torsion suchen, und diese finden wir in der Einwirkung der Schwerkraft auf ein bogenförmig gekrümmtes Internodium, dessen Krümmungsebene horizontal liegt, und ebenso bei denjenigen Bewegungen, welche die normale Nutation an einem bereits durch andere Einflüsse bogenförmig gekrümmten Stengel hervorruft. Die Torsion, die dabei entsteht, ist ebenfalls eine scheinbare, und ich habe schon in einer vorläufigen Mittheilung in den Ber. der Bot. Ges. angegeben, in welcher Weise dieselbe zu Stande kommt. Ich werde im II. Theil darauf ausführlich zurückkommen.

Was die Bemerkungen B.'s auf S. 49 von dem Absatz »Was die oben besagte« u. s. w. bis S. 51 incl. den gesperrten Satz betrifft, welche sich auf verschiedene mechanische Verhältnisse bei der Bildung der Schraubenlinien und deren Neigung beziehen sollen, so bin ich leider ausser Stande, hierüber ein Urtheil abgeben zu können, da die ganzen theoretischen Deductionen so unklar gehalten sind und ausserdem so ganz verschiedene Dinge zusammengestellt wurden, dass es unmöglich ist, herauszufinden, was der Autor eigentlich beweisen will. Zur Rechtfertigung des eben Gesagten will ich nur zwei Punkte hervorheben.

Was hat das Experiment, an einen schraubenlinig gekrümmten Draht einen Kautschukschlauch zu befestigen und in den letzteren Wasser unter hohem Druck zu pumpen, mit der Mechanik des Windens zu thun? Allerdings werden dabei die Windungen enger und die Neigung eine geringere, aber die Verhältnisse, die hierzu Veranlassung geben, treten bei normal windenden Pflanzen ja niemals auf. Was soll ferner auf S. 51 heissen: »die Spiralenbildung wird durch Krümmung auf der äusseren und unteren Seite des Stengels bedingt«? Von einer Krümmung auf der unteren Seite des Stengels kann bei einer Schraubenwindung überhaupt nicht die Rede sein, denn Ober- und Unterseite eines schraubenlinig gekrümmten Stengels sind vollkommen gleich lang, sie sind parallel laufende Schraubenlinien auf ein und demselben Cylinder. Fände eine derartige Krümmung statt, so müsste doch die Unterseite länger sein als die Oberseite, was nach dem eben Gesagten nicht möglich ist.

Die am Schlusse des ersten Theils von B. aufgestellten Sätze bedürfen demnach mehrfach der Berichtigung. Im ersten Satz ist der letzte Theil: »die spätere Lage dieser Krümmung wird wesentlich durch das Gewicht der Spitze bedingt« unbegründet.

Der dritte Satz lautet: »Hat der Stengeltheil, wo die Krümmung liegt, zu nutiren aufgehört, so kann die Krümmung selbst in der Regel nicht wieder ausgeglichen werden, und der obere Stengeltheil bleibt für die Dauer in horizontaler Lage.« Das ist richtig unter der Voraussetzung, dass die Krümmung nicht als eine Nutationskrümmung, sondern als Folge des Geotropismus oder des Gewichts der Spitze entstanden ist, denn so nur kann die Krümmung eine bleibende sein.

Der vierte Satz ist richtig, nur wäre es exacter, statt Kegelfläche allgemeiner Rotationsfläche zu sagen, denn die erzeugende Linie ist keine Gerade, sondern eine Curve. Die Sätze 5, 6 und 7 sind im Wesentlichen richtig. Die beiden folgenden, in denen von der Einwirkung der Schwerkraft auf eine in horizontaler Lage befindliche Stengelspitze die Rede ist, sind nur unter der Bedingung richtig, dass keine andere Einwirkung der Schwerkraft angenommen wird, als der negative Geotropismus.

Die Sätze 10 und 11 sind unrichtig. Das was B. als »transversale Krümmung« bezeichnet, ist keine Erscheinung sui generis, sondern es ist die aus geotropischen und Nutationskrüm-

mungen resultirende Bewegung. Die beiden folgenden sind richtig, nur ist der Absatz in 13: »Ein Theil dieser Torsion« u. s. w. überflüssig. Die Sätze 14 und 15 haben keine Beziehung zur Frage nach der Mechanik des Windens.

Ich wende mich nunmehr zu dem 2. Theil der B.'schen Arbeit, der über das Winden selbst handelt. Eine Theorie des Windens ist darin nicht gegeben, sondern es sind mehrere Versuche beschrieben, die den Vorgang des Windens klar machen sollen. Dabei sind jedoch die einzelnen Factoren nicht genügend auseinander gehalten, so wird z. B. vielfach auf die Hakenbildung und die dadurch bedingte Greifbewegung aufmerksam gemacht, und trotzdem heisst es an anderer Stelle (S. 65) »dass die hakenförmige Krümmung doch keineswegs als eine nothwendige Bedingung des Windens anzusehen sei«. Wenn diese letztere Behauptung richtig wäre, so hätten die meisten vorher beschriebenen Versuche gar keinen Werth, denn die auf S. 54, 55 und Fig. 9 gegebene theoretische Darstellung von dem Zustandekommen der Schraubenwindungen basirt wesentlich auf jener Greifbewegung, durch welche die Nutationsbewegungen derart modificirt werden, dass ein Wegwenden der Spitze von der Stütze unmöglich gemacht wird; demgemäss heisst es am Schlusse unter 3) ganz richtig: »Bei einer steil aufgerichteten windenden Spitze wird das Entfernen von der Stütze durch das hakenförmig gekrümmte Ende der Spitze mechanisch verhindert.« Dagegen ist es auf Grund seines Schemas auf S. 54 durchaus nicht gerechtfertigt, wenn er sagt: »Aus diesem Schema ist nun ersichtlich, dass die gewöhnliche asymmetrische Nutation der Spitze (mit den uns bekannten Eigenschaften der transversalen Krümmung) das regelmässige Umwinden der Stütze herbeiführen muss, ohne dass man die Mitwirkung anderer Factoren anzunehmen braucht.« Die asymmetrische Nutation und die damit in Beziehung stehende transversale Krümmung sind nun aber, wie schon erwähnt, nichts Anderes als die aus geotropischen und Nutationskrümmungen resultirenden Bewegungen. Wir haben es also hier schon mit zwei Factoren zu thun, es kommt aber nothwendigerweise noch ein dritter dazu, das ist der Widerstand, den die Stütze leistet; denn ohne Stütze würden eben die Schraubenwindungen nicht

zu Stande kommen. Das letztere ist so selbstverständlich, dass es gewöhnlich ausser Acht gelassen wird.

Der erste Versuch, der auf S. 56, 57 beschrieben wird, ist mir zum grössten Theile unverständlich geblieben. B. behauptet, dass bei Dioscorea Batatas das Umwinden der Stütze wesentlich in Folge der symmetrischen Nutation erfolge, und fährt dann fort: »Eine solche Nutation lässt die Krümmungsebene der Spitze im Kreise um die Stütze herumwandern, während der Stengel dabei so zu sagen nachgeschleppt wird [?]. Das wird bei diesen Pflanzen dadurch ermöglicht, dass ihre Stengel ausserordentlich rasch in die Länge wachsen und bei dünnen Stützen ist die Verlängerung meistens ausreichend, damit der Stengel seiner um die Stütze nutirenden Spitze nachfolgen kann.« Wie das verstanden werden soll, weiss ich nicht. Soviel ist jedenfalls sicher, dass durch fortgesetzte symmetrische Nutation ohne Einwirkung anderer Factoren nicht die geringste bleibende Krümmung und also auch keine Schraubenwindungen erzielt werden können, mag dabei der Stengel langsam oder schnell in die Höhe wachsen.

Was die beigegebene Skizze darlegen soll, ist mir ebenfalls unerfindlich; denn wie B. im Texte selbst angiebt, liegt zwischen I und II ein Zeitraum von 3 Stunden; eine »ausserordentlich schnell« wachsende Pflanze macht in dieser Zeit fast zwei volle Nutationsumläufe und führt natürlich in Folge dessen sehr mannigfaltige Bewegungen aus. Dass nun zwei ganz beliebig herausgegriffene Stadien, die 3 Stunden auseinander liegen, über diese Bewegungen Klarheit verschaffen sollen, ist von vornherein undenkbar. Der Satz: »Die Mechanik des Windens ist also bei diesen Pflanzen sehr einfach und entspricht wirklich der Vorstellung, welche schon Palm und Ch. Darwin sich von diesem Vorgang gebildet haben« ist insofern richtig, als Palm und Darwin überhaupt keine klare Vorstellung von der Mechanik des Windens gehabt haben, wie wohl Jeder zugeben wird, der die betreffende Literatur kennt.

Der zweite Versuch soll ebenfalls das vorher gegebene Schema bestätigen. Hier aber wirkt nach B. nicht allein die symmetrische, sondern auch die asymmetrische Nutation mit, um Schraubenwindungen zu erzeugen. Da die asymmetrische Nutation aber nichts Anderes ist, als die durch den negativen Geotropismus modificirte symmetrische Nutation, so kann man

einfach sagen, dass Nutation und Geotropismus zusammenwirken, und dass ausserdem noch der Widerstand der Stütze dazu kommt. Hiermit sind die drei für das Zustandekommen von Windungen nothwendigen Bedingungen gegeben, und der betreffende Versuch beweist deshalb nur, dass die Pflanze unter diesen Umständen windet, was von vornherein selbstverständlich war.

Das eben Gesagte gilt eigentlich auch von dem dritten Versuch, welcher auf S. 59 ff. beschrieben ist, denn auch hierbei waren alle Bedingungen für das Winden erfüllt. Dennoch muss ich denselben etwas genauer besprechen, da die Bewegungen in den einzelnen skizzirten Phasen von B. zum Theil falsch erklärt worden sind. Der erste Satz lautet: »In I [vergl. die beistehende Fig.] liegt die Krümmung *a*—*b* in beinahe verticaler Ebene und nutirt offenbar symmetrisch, weil die Krümmungsebene, ohne ihre Lage zum Horizont zu ändern, sich nach links bewegt. In II (nach $^3/_4$ Stunde) findet man diese Ebene um etwa 40—45° nach links verschoben. Infolge der dadurch entstandenen Spannung ist nicht nur der Theil *b*—*c*, sondern auch der Theil *a* weit von der Stütze zurückgegangen, und somit ist die Neigung des Stengels in *a*—*b* zur Achse der Stütze bedeutend grösser geworden.« Dagegen ist zunächst zu sagen, dass die normalen Bewegungen der symmetrischen Nutation hier nicht möglich sind, weil die Stütze dieselben zum Theil verhindert, was ja B. auch selbst zugiebt, denn woher sollte denn sonst die erwähnte Spannung kommen. Dass weiterhin durch diese Spannung nicht nur der Theil *b*—*c*, sondern auch der Theil *a* weit von der Stütze zurückgehen soll, ist nicht möglich, denn durch die entstandene Greifbewegung muss gerade die Strecke *a*—*b*, — wenn sonst keine störenden Einflüsse auftreten — angepresst werden.

Wie nun gar durch diese Spannung die Neigung der Partie *a*—*b* verändert werden soll, ist mir ganz unverständlich. Dass die beschriebenen Bewegungen wirklich von der Pflanze ausgeführt worden sind, ist sehr leicht möglich, aber dieselben sind nicht Folge jener Spannung allein, sondern wesentlich veranlasst durch die Nutation; denn die Strecke von *a*—*c* war doch noch nutationsfähig und wird während $^3/_4$ Stunden ebenso ihre Bewegungen ausgeführt haben wie die Strecke *c*—*d*.

In Betreff des letzten Satzes über die dabei auftretende Torsion verweise ich auf S. 54.

Auf S. 60 heisst es dann weiter: »Nun ist aber im Theile *b—c* (II) das Wachsthum der oberen (nach IV gekehrten) Stengelseite eingetreten, wodurch die Krümmung *c—d* allmählich in beinahe horizontale Lage gebracht wurde, wie in III und III punktirt (von der Ost- und der Südseite) zu sehen ist. Sobald der Theil *c—d*, welcher bis jetzt fest an die Stütze gestemmt war, von derselben abgeführt wurde, so legte sich der Theil *a* augenblicklich wieder an die Stüze an, und auch *b—c* näherte sich an dieselbe — zum Beweise, dass die frühere Lage dieser Theile wirklich nur durch die Spannung des Stengels bestimmt wurde.«

Durch diesen Vorgang kann durchaus nicht bewiesen werden, dass die Spannung des Stengels die früher geschilderten Bewegungen ausschliesslich veranlasste, denn während des ganzen Zeitraumes, der doch mindestens eine Stunde betrug, mussten die mannigfaltigsten Veränderungen durch Nutations- und geotropische Krümmungen hervorgerufen werden, da ja die betreffenden Partien sicherlich noch nutations- und wachsthumsfähig waren.

Weshalb das stärkere Wachsthum auf der Westseite auftritt und nicht, wie B. erwartete, auf der Ostseite, das lässt sich mit Sicherheit weder aus der Beschreibung, noch aus der Skizze schliessen; ich vermuthe jedoch, dass in der Phase II das Wachsthum auf der Nordseite war, die Krümmung aber deshalb nicht stattfinden konnte, weil die Spitze durch die Stütze festgehalten wurde, und dass nunmehr in ganz normaler Weise das stärkere Wachsthum auf die Westseite hinüber ging.

Die Erklärung, welche B. giebt, ist jedenfalls nicht richtig; er hat entweder die vorhandenen Torsionen übersehen oder er hat das Fortschreiten der Nutation nach dem Auftreten der stärksten Krümmung beurtheilt, was natürlich in allen Fällen, wo die Stütze jene Krümmungen verhindert, nicht zu einem sicheren Schlusse berechtigt.

Bei Beschreibung der nun folgenden Phasen IV und V heisst es zur Erklärung der dabei auftretenden Krümmungen: »Hier ist nun zu beachten, dass bei einer spiralförmig [schraubenförmig gekrümmten] Spitze eine der Achse derselben parallele Stengelkante in verschiedenen Theilen einer Windung verschie-

dene relative Lage in Bezug auf die Stütze einnehmen wird. So z. B. auf der Verlängerung von *a—b* (in V) liegt die Unterseite von *b—c* und die Aussenseite von *c—d* (von jeder Torsion natürlich abgesehen). War dann in der letzten Zeit das Wachsthum der Unterseite von *b—c* zu constatiren, so konnte der Theil *c—d* dabei nur die Stütze enger umwachsen; das Wachsthum von *a—b* auf seiner Innenseite konnte aber schon infolge der Eigenschaften der transversalen Krümmung nicht zu Stande kommen, würde übrigens durch die fixe Lage dieses Theiles verhindert werden. Ist deswegen in der darauffolgenden Zeit das Wachsthum einen Schritt weiter um den Stengel fortgeschritten, so wuchs jetzt der Theil *c—d* auf seiner Unterseite und hat sich seinerseits steil aufgerichtet. Diesem Aufrichten von *c—d* sollte das Wachsthum der Innenseite von *b—c* entsprechen, welches aber und zwar aus den oben angegebenen Gründen, sich nicht zu erkennen gab.«

Der erste Satz ist nicht allgemein richtig, denn es kann sehr wohl vorkommen, dass immer eine bestimmte Seite die Aussenseite bleibt, nämlich wenn keine Torsionen auftreten und die Krümmungen um eine zur Achse der Stütze parallelen Achse erfolgen. In Wirklichkeit treten aber fast immer Torsionen und zwar antidrome auf, und ausserdem wird auch die Krümmungsachse häufig anders liegen, als parallel zur Stützenachse. Die Quantität jener Torsionen lässt sich deshalb, wie schon Schwendener ausdrücklich betont, nie mit Sicherheit angeben, und es ist deshalb auch nicht gerechtfertigt, wenn B. obige Annahmen macht, ohne dabei zu bemerken, ob jene Lagerung in Bezug auf die Stütze wirklich vorhanden war. Der Zusatz »von jeder Torsion natürlich abgesehen« beweist jedenfalls, dass eine exacte Beobachtung hier nicht vorliegen kann; denn beim normalen Winden um eine 7 mm dicke Stütze treten ganz sicher Torsionen auf, und selbst wenn dieselben in dem gegebenen Falle als nicht vorhanden vorausgesetzt wurden, so bleiben doch noch jene Annahmen über den Verlauf einer Längslinie des Stengels ohne jede Begründung. Dass eine solche Lage der einzelnen Seiten zur Stütze, wie sie B. beschreibt, in Wirklichkeit unter gewissen Umständen eintreten kann, soll damit durchaus nicht geläugnet werden; nur die allgemeine Gültigkeit jener Behauptung sollte widerlegt werden.

Dass das Wachsthum von *a—b* auf seiner Innenseite infolge

der »transversalen Krümmung« nicht stattfinden kann, ist unrichtig, denn eine solche »transversale Krümmung« existirt in der That nicht. Die Annahme eines solchen besonderen Krümmungsmodus ist übrigens hier ganz überflüssig, denn der eigentliche Grund für die Verhinderung der Krümmung in der Partie *a*—*b* liegt darin, dass jene Partie infolge der Greifbewegung sich nicht von der Stütze entfernen kann, was auch B. mit den Worten: »würde durch die fixe Lage dieses Theils verhindert werden« ganz richtig andeutet. Infolge der Wirkung der Greifbewegung ist auch in Phase VI der Punkt *b* an die Stütze gedrückt, dagegen *c* und weiterhin auch *a* von derselben etwas entfernt worden. Nachdem der Contact bei *d* aufgehoben war, konnte sich demnach *a* wieder nähern.

Die Angabe, dass im Verlauf von 4 Stunden eine antidrome Torsion (von *b* aufwärts) von circa 90° entstanden ist, giebt über die eigentliche Bedeutung der Torsion keinen Aufschluss; denn es heisst dies nichts Anderes, als dass am Ende des Versuchs eine aus verschiedenen Factoren resultirende Gesammttorsion von 90° vorhanden war. Dabei ist noch nicht einmal sicher anzugeben, ob dies eine scheinbare oder eine wirkliche Torsion war.

Aus den drei im Vorstehenden besprochenen Versuchen geht eigentlich gar nichts hervor, was die Mechanik des Windens klarlegen könnte; denn B. beschreibt nur die verschiedenen Krümmungen, die beim Winden auftreten, und benutzt zur Erklärung derselben bald die symmetrische, bald die asymmetrische Nutation, bald die Hakenbildung, bald die »transversale Krümmung«. Auf diese Weise mit den einzelnen Factoren umzuspringen heisst die Sache nicht erklären, sondern sie nur verwirrter machen. Soviel ist natürlich sicher, dass die Bildung normaler Windungen bei der gegebenen Versuchsstellung stattfinden musste, denn die Pflanzen waren wachsthumsfähig und es wurde ihnen eine aufrechte Stütze von nicht zu grossem Durchmesser dargeboten; welche Factoren aber als nothwendig und welche als überflüssig zu betrachten seien, das konnte durch jene Versuche nicht entschieden werden.

Auf S. 61 stellt B. den Satz auf: »Wenn ein Stengeltheil in eine solche Lage an der Stütze gekommen ist, wo seine Bewegungen factisch unmöglich werden, so geht auch seine Nuta-

tionsfähigkeit damit wirklich verloren.« Er folgert dies aus Versuchen, bei denen er nach Bildung der Windungen die Stütze entfernte. Bei diesen Versuchen soll blos die letzte $1/2$—1 Windung ihre regelmässige Nutation fortsetzen, »der mehr rückwärts liegende Theil dagegen, der infolge seiner Lage an der Stütze keine Bewegungen mehr ausführen konnte«, soll unbeweglich bleiben. Diese Angaben kann ich nicht bestätigen. Allerdings kommt es natürlich auf die Dicke der Stütze an, wieviel Windungen nach Entfernung derselben ihre Nutationskrümmungen noch ausführen, aber immerhin ist soviel sicher, dass bei lebhaft wachsenden Pflanzen die noch wachsenden Internodien, wenn sie auch schon eine volle Windung und darüber bildeten, nach Entfernen der Stütze ihre normalen Nutationsbewegungen sowohl, als auch geotropische Aufwärtskrümmungen zeigen. Dasselbe findet statt, wenn man die Pflanze umkehrt oder sie um eine horizontale Achse rotiren lässt. Sowohl beim Wegnehmen der Stütze, als auch beim Umkehren der Pflanze bleiben eine Zeit lang die schraubenlinigen Krümmungen zum Theil erhalten; dieselben sind theils geotropischer Natur, theils rühren sie von der mechanischen Krümmung infolge der Greifbewegung her, der Stengel bleibt aber keineswegs unbeweglich, sondern neben dem allmählichen Flacherwerden jener Krümmungen infolge des Geotropismus treten regelmässige Nutationsbewegungen auf. Da die letzteren aber an einem schraubenlinig gekrümmten Organ stattfinden, so müssen dieselben sich als schraubenlinige Krümmungen darstellen. Allerdings werden sehr bald durch die hinzukommende homodrome Torsion, die an frei nutirenden Internodien stets auftritt, weitere Veränderungen hervorgerufen, ebenso durch die stattfindenden geotropischen Krümmungen.

Auf den S. 62 und 63 beschriebenen Versuch, das Winden um einen gespannten Faden betreffend, komme ich später ausführlicher zu sprechen; hier sei nur soviel gesagt, dass die Annahme einer geschwächten Nutationsfähigkeit, die »unzweifelhaft durch die plötzliche (wenn auch nur theilweise) Verhinderung der Bewegungen verursacht werde, welche der untere Theil einer langen Spitze erfahren muss, nachdem ihr freies Ende durch eine rasche Bewegung sich um die Stütze geschlungen hat«, ganz ungerechtfertigt ist. Uebrigens geht dies aus der beigegebenen Skizze selbst hervor, denn die betreffende Partie,

deren Nutationsfähigkeit geschwächt sein soll, zeigt in jeder Phase eine andere Lage.

Bei der allgemeinen Besprechung der vorbeschriebenen Versuche sagt schliesslich B.: »In den gewöhnlichen Fällen ist somit das Winden nichts Anderes, als die fortgesetzte asymmetrische Nutation der freien Spitze, welche letztere aber in der Regel mehrere Nutationskreise beschreiben muss, bevor es ihr gelingt, eine neue Windung um die Stütze zu bilden.« Dass mit diesem Satze durchaus nichs Bestimmtes über die Mechanik des Windens ausgesagt ist, leuchtet sofort ein; denn es ist zweifellos, dass ausser dieser sog. asymmetrischen Nutation die Stütze unbedingt nothwendig für das Zustandekommen der Windungen ist. B. giebt dies übrigens an mehreren anderen Stellen selbst zu, denn die Wirkung der Hakenbildung und die dadurch herbeigeführte Greifbewegung hat er bei seinen Versuchen oft genug beobachtet.

Der Satz: »Die Vorstellung von der Mechanik des Windens, zu welcher der kritische Sinn Schwendener's diesen Forscher geführt hat, kommt auch in gewisser Beziehung nahe an den wirklichen Sachverhalt, ohne ihm aber zu entsprechen, denn Schwendener kannte die Eigenschaften der transversalen Krümmung nicht, und glaubte darum die vorwiegende Krümmungsfähigkeit der Spitze in der Richtung des Windens durch die mechanischen Spannungen einer windenden Spitze erklären zu müssen« ist insofern richtig, als Schwendener allerdings die geotropische Aufwärtskrümmung eines bogenförmigen Organes und die damit verbundenen Erscheinungen nicht berücksichtigt hat; aber ebenso ist es richtig, dass bei nicht allzu dünnen Stützen die Bewegungen der Spitze durch den Widerstand der Stütze, welchen diese bei der Greifbewegung leistet, in gleichem Sinne geändert werden wie durch den Geotropismus, nur dass im ersteren Falle eine wirkliche Torsion, im letzteren aber nur eine scheinbare antidrome Torsion zu Stande kommt.

B. behauptet sodann, dass nach Schwendener eine Stütze nicht mehr umschlungen werden könnte, wenn der halbe Umfang der Stütze grösser wäre als die nutationsfähige Spitze. Dies ist nicht ganz richtig, denn eine wirksame Greifbewegung kann selbst dann noch eintreten, wenn der dabei in Betracht kommende Bogen etwas kleiner als der Halbkreis ist, ebenso wie man einen Cylinder, den man mit der Hand nicht ganz bis

zur Hälfte umspannen kann, doch noch festzuhalten im Stande ist. Allerdings wird, wenn dieser Fall eintritt, das Winden erschwert sein, und es müssen, wenn überhaupt normale Windungen erzeugt werden sollen, die äusseren Bedingungen sich günstiger gestalten. Vor Allem muss ein ganz regelmässiges und lebhaftes Wachsthum vorhanden sein, sodann wird die Oberfläche der Stütze die nothwendige Reibung bieten müssen, und schliesslich dürfen keine mechanischen Eingriffe von aussen stattfinden. Bei einer sorgfältigen Cultur im Gewächshause kann man dies Alles wohl erreichen, in der freien Natur jedoch dürften die Bedingungen wohl kaum erfüllt werden.

Bei lebhaft wachsenden kräftigen Exemplaren von Calystegia, die im Kalthause gezogen wurden, besassen die nutationsfähigen Sprossenden eine Länge von mindestens 15 cm, das würde also unter günstigen Umständen das Winden um eine 8—10 cm dicke Stütze noch ermöglichen. Bei anderen windenden Pflanzen ist diese Strecke noch grösser, z. B. beim Hopfen und vor Allem bei tropischen Schlingpflanzen, wo sie oft eine Länge von 20—30 cm erreicht, wie man sich in Gewächshäusern leicht überzeugen kann.

B. giebt an, dass ein Stengel von Dioscorea Batatas, dessen nutationsfähiges Sprossende 10—12 cm lang gewesen sein soll, — was meinen Beobachtungen nach entschieden zu niedrig gegriffen ist — noch eine Stütze von 34 cm Umfang, also ca. 10 cm Durchmesser umwunden habe. Das Winden scheint dabei aber sehr unregelmässig gewesen zu sein, denn B. sagt selbst: »sie [die Spitze] machte ihre Bewegungen *neben* der Stütze, und doch wurden beinahe zwei Windungen gebildet, die aber so locker waren, dass sie sich nicht halten konnten und fielen herunter«. Ein Hopfenstengel, dem im Freien eine Stütze von 37 cm Umfang geboten wurde, zeigte ein ähnliches Verhalten. Bei diesem letzteren Versuche hat B. beobachtet, dass die Spitze fast immer an die Stütze angedrückt war und nur geringe Bewegungen ausführte; dasselbe giebt auch Schwendener für einen ähnlichen Fall an. Die Thatsache ist auch vollkommen richtig, aber man kann daraus doch gewiss nicht schliessen, dass die hakenförmige Krümmung keine mechanische Bedeutung habe, wie dies B. thut, wenn er sagt: »Aus dieser Thatsache ist auch zu sehen, dass die oben angegebene mechanische Bedeutung der hakenförmigen Krümmung der Spitze, welche Krümmung in gewöhn-

lichen Fällen dazu beiträgt, das Winden ausserordentlich sicher zu machen, doch keineswegs als eine nothwendige Bedingung des Windens anzusehen ist.« Gerade der Umstand, dass die Spitze fast fortwährend angedrückt bleibt, beweist ja, dass auch fast fortwährend jene Greifbewegung stattfindet, denn sonst würde eben kein Andrücken der Spitze erfolgen können.

Dass bei dem Winden um dicke Stützen verhältnismässig nur geringe Bewegungen von der nutirenden Spitze ausgeführt werden, hat seinen Grund darin, dass infolge der stetigen Einwirkung des Geotropismus auf die homodrom gekrümmte Spitze die Wirkung der durch Nutation hervorgebrachten Greifbewegung noch verstärkt wird. Da bei jedem Nutationsumgang, der sich hierbei nur durch Auf- und Abwärtsbewegung der Spitze zu erkennen giebt, eine starke, wirkliche antidrome Torsion erzielt wird, und da ferner durch die negativ geotropische Krümmung fortwährend scheinbare antidrome Torsionen bewirkt werden, so wandert auch immer wieder die jeweilige Unterseite nach aussen, und so befindet sich das stärkere Ausdehnungsbestreben, das zwar alle Seiten successive gleichmässig besitzen, doch immer nur abwechselnd auf der Unter-, Aussen- und Oberseite. Ich komme auf diesen Punkt im II. Theil noch ausführlicher zu sprechen.

In dem Schlusscapitel seiner Arbeit »Antidrome Torsion der gewundenen Stengel« sagt B., dass bei Convolvulus arvensis auch homodrome Torsionen zu beobachten seien. Da er aber nicht angiebt, in welcher Weise er die Torsion bestimmte, so kann man nicht mit Sicherheit sagen, ob hier wirkliche homodrome Torsionen vorlagen. Ausgeschlossen ist übrigens das letztere durchaus nicht, denn bei sehr dünnen Stützen, wo die Greifbewegung *an der obersten Partie* verhältnissmässig selten auftritt, können wohl auch die aus inneren Ursachen herrührenden homodromen Torsionen zu Stande kommen, da Spitzen, welche längere Zeit frei nutiren, regelmässig solche Drehungen zeigen.

Auf S. 69 sagt B. unbegreiflicher Weise: »Ueber die Ursachen der wirklichen Torsion der gewundenen Stengel hat sich Schwendener nicht ausgesprochen; die schon oben besprochene, von dem genannten Forscher angeführte Spannung eines zur Achse der Stütze schief gestellten Krümmungsbogens ist eigentlich derselbe Vorgang, welcher jedesmal bei dem Steilerwerden

zur Hälfte umspannen kann, doch noch festzuhal
ist. Allerdings wird, wenn dieser Fall eintritt,
schwert sein, und es müssen, wenn überh
dungen erzeugt werden sollen, die äusser
günstiger gestalten. Vor Allem muss ein
lebhaftes Wachsthum vorhanden sein,
fläche der Stütze die nothwendige Re
schliesslich dürfen keine mechani
stattfinden. Bei einer sorgfältigen
man dies Alles wohl erreichen,
ten die Bedingungen wohl ka

Bei lebhaft wachsenden
gia, die im Kalthause gezo ... ss-
fähigen Sprossenden ein ... : »Durch
würde also unter güns ... n schiefer Lage
8—10 cm dicke Stütz ... achsthum der früheren
den Pflanzen ist die ... ung der Spitze so zu sagen
und vor Allem be ... ütze zur Folge haben, bis die
Länge von 20—? ... en Seite der Krümmung geworden
leicht überzeu ... en« kann hier gar keine Rede sein, es
B. giebt ... rkliche antidrome Torsion zu Stande. Weiter
nutationsfä ... B., dass die Nutation sich in antidrome Torsion
— was n ... s ist nicht möglich, nur die Spannung, die durch
griffen ... tion und den Widerstand der Stütze entsteht, kann sich
Durch ... orsion umsetzen, niemals aber die Nutation selbst.
seh ... Derartige Stellen könnte ich noch mehrere anführen, doch
[d ... geht schon aus dem Gesagten zur Genüge hervor, dass B. eine
klare Vorstellung von der Ursache der antidromen Torsion und
von deren Beziehung zum Winden nicht gehabt haben kann.

Hiermit will ich die Besprechung der Baranetzky'schen Arbeit schliessen; auf die zuletzt aufgestellten Thesen (S. 72, 73) brauche ich nicht näher einzugehen, da sich das Nöthige hierüber aus dem Vorstehenden von selbst ergiebt.

Was in der Abhandlung von Werth ist, das sind die Beobachtungen über den Einfluss der Schwerkraft auf die Nutation; eine exacte Erklärung des Windens aber ist, wie schon früher gesagt, in der Arbeit nicht gegeben worden. Bald schliesst sich B. der Darwin'schen Erklärung an, bald schreibt

er dem hakenförmig gekrümmten Ende und der daraus resultirenden Greifbewegung einen wichtigen Einfluss zu, den er an anderer Stelle wieder leugnet, bald soll die symmetrische Nutation, bald die asymmetrische die Schraubenwindungen erzeugen; unter diesen verschiedenen Gesichtspunkten werden eine Anzahl Versuche beschrieben, aus denen im Wesentlichen nichts weiter mit Sicherheit hervorgeht, als dass windende Pflanzen, wenn ihnen eine geeignete Stütze geboten wird, dieselbe in Schraubenwindungen umschlingen.

§ 3.

Ich komme nun zur Besprechung der Kohl'schen Arbeit. Der Verfasser hält im Gegensatz zu Schwendener die Greifbewegung für bedeutungslos und nimmt zur Erklärung der bleibenden Krümmungen eine Reizbarkeit der Stengel an.

Dass die Nutation allein nicht zum Winden führen könne, giebt er zu, und deshalb führt er einen zweiten Factor, die Reizbarkeit der Stengel ein; dass als dritter Factor noch der Geotropismus hinzukommen müsse, nimmt er ebenfalls an, doch scheint er sich über die Wirkung desselben nicht recht klar geworden zu sein.

Kohl erkennt demnach im Gegensatz zu Sachs die Stütze als nothwendig an, denn die Aufstellung der Reizbarkeit kann nur bedeuten, dass ein reizausübender Körper als nothwendige Bedingung für das Winden vorhanden sein muss; dieser Körper kann aber nur die Stütze sein, wenn regelmässiges Winden stattfinden soll. Zweifellos ist allerdings, dass die Stütze bei der Mechanik des Windens ein wichtiger Factor ist, aber die Wirkung derselben kann eine zweifache sein: sie kann einmal durch Berührung einen Reiz ausüben und dadurch eine Wachsthumsverzögerung in der gereizten Partie hervorrufen, sie kann anderseits aber auch durch den Widerstand, welchen sie den Bewegungen der Pflanze entgegensetzt, auf diese Bewegungen bestimmend einwirken. Leugnet man die erstere Wirkung, so muss man unbedingt die letztere zugeben, und umgekehrt. Es ist nun jedenfalls ganz sicher, dass der letztere Einfluss der Stütze sich immer bemerklich machen wird, und es wäre deshalb ein dritter Fall möglich, dass nämlich beide Factoren zu-

sammenwirkten, aber nur unter der Voraussetzung, dass die Reizbarkeit der Stengel wirklich erwiesen sei.

Kohl nimmt natürlich an, dass er diesen Beweis erbracht habe, und dadurch ist für ihn die Hauptschwierigkeit beseitigt, die Erklärung der bleibenden Krümmungen gegeben.

Die wichtigsten Gründe, welche K. veranlasst haben, eine Reizbarkeit anzunehmen und die Greifbewegung als bedeutungslos hinzustellen, sind in den auf S. 18 ff. beschriebenen Versuchen enthalten.

Im ersten Versuch hat K. einen Calystegiastengel um einen lose herabhängenden Faden, der mit seinem unteren Ende lose über einen horizontalen Glasstab gelegt war, winden lassen.

Bei dieser Versuchstellung muss natürlich, zumal wenn der Faden am unteren Ende eine starke Biegung macht, eine Art von Winden eintreten, die jedoch mit dem eigentlichen normalen Winden nicht das Geringste zu thun hat. Der Faden wird nämlich, wie dies auch K. selbst zugiebt, nicht etwa *vom* Stengel umwunden, sondern infolge der fortgesetzten ungestörten Nutation *um* den Stengel geschlungen, so dass er bei jedem Nutationsumlauf — vorausgesetzt, dass er nicht abgleitet, was öfter geschieht, wenn der Faden nicht gebogen ist — eine Schraubenwindung um den Stengel macht. K. sagt über den Verlauf des Versuches Folgendes: »Nun hätte, da der Faden die Nutation durchaus nicht hindernd beeinflussen konnte, der Stengel sich allmählich durch den continuirlich wirkenden Geotropismus vollkommen gerade strecken müssen, ... allein mit Leichtigkeit konnte man erkennen, dass der Stengel spiralig gekrümmt war und blieb, dass alle den Faden berührenden Stellen concav geworden waren.«

Ich habe diesen Versuch mehrmals und mit verschiedenen Modificationen wiederholt, habe aber niemals die Abbildung bestätigt finden können, welche K. in Fig. 1 giebt, allerdings traten stets nach einer *längeren* Zeit schraubenlinige Krümmungen des Stengels auf, aber niemals gingen dieselben bis zu dem unteren Ende des Fadens, das dem Stengel nur ganz lose anliegt. Die Erklärung für dieses Verhalten ist eine sehr einfache. Durch das verhältnissmässig schnelle Herumwinden des Fadens um den Stengel, wobei natürlich in den ersten 10—12 Stunden der letztere vollständig gerade bleibt, bezw. blos Nutationskrümmungen, aber keine Schraubenwindungen zeigt,

wird der Faden bald durch die Reibung von dem Stengel so fest gehalten, dass man beim Versuch einer Entfernung desselben, durch Ziehen in der Richtung der Stengelachse, fast immer entweder den Faden oder den Stengel zerreisst, nicht aber den ersteren abzuziehen vermag. Da das nach dem Herumwinden des Fadens noch lebhaft fortdauernde intercalare Wachsthum unter solchen Umständen bedeutenden Widerstand finden muss, so sucht natürlich der sich streckende Stengel den um ihn herumgewundenen Faden gerade zu strecken, denn nur so ist die Möglichkeit gegeben, dass der Stengel noch in die Länge wächst.

Die natürliche Folge muss also die sein, dass nach Beendigung des intercalaren Wachsthums der Stengel schraubenlinig gekrümmt, der Faden aber gerade gestreckt ist. Dies kann aber dort, wo der Faden lose anliegt, also am unteren Ende, niemals der Fall sein. Man kann sich diesen Vorgang am besten dadurch klar machen, dass man um einen dünnen, leicht dehnbaren Kautschukcylinder einen Faden in mehreren Schraubenwindungen herumlegt und nunmehr unter Festhalten der beiden Enden des Fadens den Kautschukcylinder in der Richtung seiner Achse zieht. Dadurch wird der Faden nahezu gerade gestreckt und der Kautschukcylinder legt sich in Schraubenwindungen um jenen herum. Die mechanische Ausdehnung des Kautschukcylinders entspricht dabei dem intercalaren Wachsthum des Stengels. Auch auf andere Art lässt sich beweisen, dass bei jenem Versuch keine Reizkrümmungen vorliegen. Ich habe an jungen Internodien, deren intercalares Wachsthum noch nicht beendet war, einen Zwirnsfaden in der Weise angebracht, dass er an dem einen Ende an irgend einer Stelle, möglichst in der Nähe des Knotens, befestigt war, von da aus zwei volle Windungen um das Internodium machte und am anderen Ende durch einen ebenfalls am Internodium befestigten Ring aus Papier hindurchlief, aber so, dass er in diesem Ring ohne Hinderniss hin- und hergezogen werden konnte. Wenn die Ansicht K.'s richtig wäre, dass ein dem Internodium anliegender Faden eine Reizkrümmung bedingen müsste, so hätten bei dieser Versuchsstellung zwei Windungen des Stengels entstehen müssen, und zwar bald rechts- bald linksläufig an derselben Pflanze, denn ich hatte an einigen Spitzen den Faden rechts herum, an anderen links herum gewunden. Es zeigte sich jedoch in allen

diesen Fällen keine Spur einer schraubenlinigen Krümmung, wohl aber waren nach Beendigung des intercalaren Wachsthums die Fäden ein ziemliches Stück durch die Papierringe hindurch gezogen. Es fehlte bei dieser Art der Versuchsstellung eben jeder Widerstand gegenüber dem intercalaren Wachsthum, folglich blieben die Stengel gerade. Die »einfache Berührung eines Seidenfadens«, welche nach K. ein Kürzerbleiben der berührten Stengelpartien verursachen soll, war also hier vorhanden, aber eine solche Wachsthumsverzögerung der berührten Partien trat nicht ein. Noch schlagender lässt sich dies beweisen durch einen Versuch, der im Wesentlichen mit dem von K. angestellten übereinstimmt, bei welchem aber an Stelle des Seiden- oder Zwirnsfadens ein sehr leicht dehnbarer Kautschukcylinder, dessen Querschnittsfläche ungefähr $^1/_4$ qmm betrug, benutzt wurde. Hierbei konnte das intercalare Wachsthum ungestört vor sich gehen, infolge dessen blieb der Stengel vollkommen gerade, und der Kautschukfaden schraubenlinig um denselben gewunden.

Wären die Internodien wirklich reizbar, so müsste es doch jedenfalls ganz gleichgültig sein, ob dieser Reiz von einem Seidenfaden oder von einem dünnen Gummistreifen ausgeübt wird.

Dass der Gummifaden beim Wachsthum des Stengels wirklich gespannt wird, ist eigentlich a priori selbstverständlich, man kann sich aber auch leicht durch das Experiment davon überzeugen, wenn man denselben, nachdem das intercalare Wachsthum des Stengels eine Zeit lang gedauert hat, an irgend einer Stelle durchschneidet; die beiden Schnittflächen weichen dann sofort auseinander. K. weist noch auf einen in der freien Natur häufig vorkommenden Fall hin, nämlich auf das Umwinden eines lose herabhängenden Grasblattes durch den Stengel einer Ackerwinde. Dass dies natürlich ebenso wenig für eine Reizbarkeit der Stengel spricht, wie das Experiment mit dem Seidenfaden, ist sofort einleuchtend.

Der zweite Versuch, welcher die Reizbarkeit der Stengel beweisen sollte, bestand darin, dass ein Internodium mit einer feinen Platinspirale oder einem feinen Seidenfaden umwickelt wurde. Dadurch musste nach K.'s Ansicht ein gleichzeitig auf sämmtliche Längslinien wirkender Reiz erzeugt werden, und demgemäss das betreffende Internodium in seiner Längenausdehnung gegen die übrigen zurückbleiben. K. giebt an, dass

bei diesem Versuche wirklich eine derartige Längendifferenz eingetreten sei. Ich habe das Experiment zu wiederholen versucht, es ist mir aber — das gestehe ich offen — nicht gelungen, denn immer wurde das betreffende Internodium beim Umwickeln des Drahtes oder Fadens vielfach hin- und hergebogen und öfters auch verletzt, so dass ich niemals vorwurfsfreie Resultate erhalten konnte. Es ist ja möglich, dass bei ganz vorsichtigem Umwickeln jene Längendifferenz eintritt, aber dieselbe ist dann jedenfalls nicht auf eine Reizbarkeit des Stengels, sondern auf eine theilweise Verhinderung des intercalaren Wachsthums zurückzuführen.

Ist es mir schon nicht recht begreiflich, wie man auf diese Weise sichere Ergebnisse herbeizuführen im Stande ist, so verstehe ich erst recht nicht, wie man beim Einklemmen des Stengels zwischen Glimmerblättchen zu einem Resultate gelangen kann, das beweiskräftig wäre; K. hat diesen letzteren Versuch nicht genauer beschrieben, so dass ich ausser Stande bin, denselben einer näheren Besprechung zu unterziehen. Zahlenangaben fehlen sowohl bei diesem, als auch beim vorhergehenden Experiment.

Auch durch anhaltendes leises Reiben oder Streichen einer Convexseite soll dieselbe so gereizt werden, dass sie zur concaven wird. Das letztere tritt jedenfalls im Verlaufe eines Nutationsumlaufes einmal ein, wenn keine störenden Einflüsse mitwirken; dies ist aber Folge der Nutation und nicht des Reibens oder Streichens. Darwin hat bekanntlich schon ähnliche Versuche gemacht, aber stets mit negativem Resultat. Da ich keine Veranlassung habe, die Versuche dieses Forschers zu bezweifeln, so konnte ich die Wiederholung des Reibens und Streichens unterlassen. Dagegen versuchte ich kleine Papierstreifen so an den Stengel anzulegen, dass sie längere Zeit dieselbe Längslinie berührten, ohne dass sie das Wachsthum desselben hinderten. K. behauptet durch Aufsetzen von Reitern aus Glas oder Platin Krümmungen erzielt zu haben, er giebt jedoch nicht an, in welcher Weise er diese Reiter befestigt hat, so dass sie immer auf derselben Stelle bleiben mussten. Mir ist dies letztere nie gelungen, denn ein frei aufgesetzter Reiter wird beim Fortgange der Nutation entweder herabgeworfen oder er kommt auf eine andere Längslinie zu sitzen. Um dies zu verhindern, nahm ich Streifen von gutem Schreibpapier und

befestigte dieselben an den Blattstielen in folgender Weise: Dieselben hatten in der Mitte ein Loch, so dass sie über den seiner Spreite beraubten Blattstiel geschoben werden konnten: um ein möglichst dichtes Anlegen an den Stengel zu erzielen, wurden sie vorher bogenförmig gekrümmt, und zur besseren Befestigung wurde noch eine Scheibe von Hollundermark hinter den Streifen über den Blattstiel gesteckt, die das Zurückrutschen derselben verhinderte. Da das Papier immer etwas federt, so übte der auf seiner ganzen Länge dem Stengel anliegende Streifen einen wenn auch minimalen Druck auf eine Längszone desselben aus. Die Streifen wurden auf diese Weise immer auf den Convexseiten angebracht, sie hatten gewöhnlich eine Länge von 20—30 mm und eine Breite von 3 mm. Die Berührung der Streifen mit dem Stengel musste bei dieser Art der Versuchsstellung mindestens so lange wie ein halber Nutationsumlauf dauern; dabei wurden sie natürlich auch eine Zeit lang nach der entgegengesetzten Seite gebogen, und da sich diese Biegung gewöhlich nicht wieder vollständig ausglich, so war späterhin die Berührung mit dem Stengel nicht mehr eine so innige, immerhin aber lagen sie noch mindestens auf einer Strecke von 5 mm ober- und unterhalb der Insertionsstelle des Blattstieles dem Stengel dicht an. In dieser Lage blieben sie dann während mehrerer Stunden.

Jedenfalls müsste, wenn überhaupt eine Reizbarkeit vorhanden wäre, bei Berührung eines Papierstreifens von etwa 40 mm Länge während einer Zeit von 24 Stunden ganz sicher eine Krümmung auftreten, es zeigt sich aber, dass eine solche niemals eintrat.

Nach K. sollen schon Bruchtheile eines Milligramms Reiz hervorrufen, also war jedenfalls diese Bedingung erfüllt, denn der federnde Papierstreifen übte einen stärkeren Druck aus, als ein Milligramm es vermag. Welche Umstände die Krümmungen veranlassten, die K. beobachtete, weiss ich nicht, ich kann ihm nur insofern unbedingt Recht geben, als er sagt: »Wie ich oben bemerkte, treten bei diesem Versuche immer die Nutationskrümmungen störend auf, und durch sie kann die Beurtheilung leicht gefälscht werden.«

K. sucht noch auf eine andere Weise die durch den Reiz bedingte Verzögerung des Wachsthums zu beweisen, indem er die Länge der Internodien an verschieden dicken Stützen vergleicht.

Er giebt an, dass an dicken Stützen die Internodien stets kürzer seien als an dünnen und dass die frei nutirenden länger als die normal gewundenen seien. Dies könne als ein Beweis dafür gelten, dass die Internodien windender Pflanzen reizbar wären, denn durch die längere Dauer des Reizes müsste auch eine stärkere Verkürzung hervorgerufen werden.

Die Verschiedenheiten in der Länge der Internodien sollen sich am Schönsten zeigen, wenn man die Pflanzen um conische Stützen winden lässt. Ich habe dieses Experiment mehrfach wiederholt, aber keine der zahlreichen Versuchsreihen ergab Resultate, wie sie nach den K.'schen Angaben zu erwarten gewesen wären. Ich benutzte bei meinen Versuchen zweierlei Stützen, die einen waren 90 cm lang und der grösste Durchmesser betrug 30 mm, der kleinste 10 mm, die anderen hatten eine Länge von 40 cm, einen grössten Durchmesser von 30 mm und einen kleinsten von 7 mm. Als Versuchspflanzen wurden stets lebhaft wachsende Exemplare von Calystegia dahurica benutzt. In der folgenden Tabelle sind einige Messungen wiedergegeben.

A. Stützenlänge: 90 cm.

Internod.	Stütze nach oben sich verjüngend.		Stütze nach oben sich verdickend.	
I	65	66	52	76
II	72	70	91	67
III	75	80	55	61
IV	60	65	87	67
V	57	70	72	59
VI	90	81	81	71
VII	55	85	82	73
VIII	66	68	78	85
IX	59	91	82	89
X	52	75	65	76
XI	45	68	80	91
XII	98[1]			

1) Frei entwickelt.

B. Stützenlänge: 40cm.

	Nach oben sich verjüngend.		Nach unten sich verdickend.	
I	62	75	62	67
II	82	62	65	92
III	74	85	68	75
IV	76	90	61	90
V	85	75	70	85
VI	66	95	71	82
VII	70[1]	96[2]	92	104[1]

Die Schwankungen, die in der Länge der Internodien auftreten, scheinen individueller Natur zu sein. Aus den angegebenen Messungen, die an Pflanzen gemacht wurden, welche allen störenden Einflüssen möglichst entzogen waren, lassen sich erhebliche Differenzen wahrnehmen, ohne dass man die Dicke der Stütze damit in irgend eine Beziehung bringen kann. Ich kann demnach die K.'schen Angaben nicht bestätigen. Es ist ja möglich, dass bei dickeren Stützen, wo die Greifbewegung und die damit verbundene mechanische Krümmung an der oberen Stengelpartie viel häufiger eintritt als an dünneren Stützen, das Wachsthum der Internodien etwas verzögert werde, aber jedenfalls würde diese geringe Differenz durch die Schwankungen des intercalaren Wachsthums, die, wie aus obigen Tabellen hervorgeht, ziemlich beträchtlich sind, wieder verdeckt werden. Frei nutirende Pflanzen haben in der That im Allgemeinen etwas längere Internodien, als normal gewundene — obwohl auch hier ganz ähnliche Schwankungen vorkommen —, und dies lässt sich vielleicht aus jenem eben erwähnten Umstande erklären, dass die durch Greifbewegung hervorgerufenen mechanischen Krümmungen hier wegfallen. Die Vergleichung der Internodienlänge von frei nutirenden Pflanzen und von solchen, die um verschieden dicke Stützen unter sonst gleichen Bedingungen gewunden hatten, kann demnach nichts beweisen weder für die Annahme der Reizbarkeit, noch gegen dieselbe.

Als weiteren Beweis für die Richtigkeit seiner Anschauung führt K. die Verschiedenheit des Neigungswinkels an verschieden dicken Stützen an. Er sagt S. 24: »A priori können wir

1) Frei entwickelt.

2) Nachträglich abgerutscht.

erschliessen, dass die Neigung abhängen wird von zwei Umständen, erstens von der Dicke der Stütze und zweitens von der durch erstere modificirten Grösse der berührten Seite des windenden Stengels.« .... »Die geotropische Aufwärtskrümmung wird bei dicken Stützen den Stengel früher zum Anliegen an die Stütze bringen als bei dünneren, es beginnt die Berührung der Stütze früher zu wirken, die Längendifferenz zwischen Innen- und Aussenseite wird im ersteren Falle beträchtlicher als im zweiten.« Er behauptet demnach, dass bei dicken Stützen die Längendifferenz zwischen concaver und convexer Seite grösser sein müsse, als bei dünnen Stützen und dass damit im Zusammenhange der Neigungswinkel im ersteren Falle geringer als im letzteren ausfallen wird. Er führt als Beweis die Differenzen an, welche man bei Vergleichung der Concav- und Convexseiten eines Stengels von 1,5 mm Durchmesser bei einer Stützendicke von 5 mm erhält, wenn man die Berechnung für verschiedene Abstände der Windungen ausführt.

Die von K. dabei erhaltenen Zahlen sind folgende: Für die Windungsabstände von 0; 5; 10; 20; 40; 60; 80 mm durchlaufen die Differenzen die Werthe (abgerundet) von 9,5; 9; 8; 6; 4; 3; 2,5 mm [genauer 9,42; 9,14; 8,43; 6,69; 4,27; 3,03; 2,33].

Berechnet man auf Grund dieser Werthe und derjenigen für die Convexseiten: 25,13; 25,62; 27,05; 32,12; 47,24; 65,05; 83,85, um wieviel Procente die Concavseiten gegen die Convexseiten kürzer sind, so erhält man folgende Zahlen: 38,37; 35,67; 31,15; 20,82; 9,03; 4,65; 2,78 %. K. hat diese letztere Rechnung nicht vorgenommen; denn er sagt ganz allgemein: »Mit kleiner werdenden Längendifferenzen zwischen Innen- und Aussenseite muss der Neigungswinkel wachsen.«

Auf Grund dieses an sich ganz richtigen Satzes und einiger von ihm ausgeführten Messungen glaubt K. einen Beweis für die Reizbarkeit erbringen zu können. Ich habe für zwei der aufgestellten Tabellen die Berechnung der Längendifferenzen zwischen Aussen- und Innenseiten durchgeführt; es ergaben sich dabei folgende Resultate:

Tabelle I auf S. 350.

Durchmesser d. Stütze in mm.	Neigungswinkel.	Länge der Concavs. in mm.	Länge der Convexs. in mm.	Differenz in mm.	Verkürzung der Concav- gegen die Convexseite in %.
29	36°	112,6	120,4	7,8	6,48
28	39°	113,2	120,6	7,4	6,13
22	43°	94,5	101,6	7,1	6,99
17	48°	79,76	86,41	6,6	7,69
16	48°	75,07	81,72	6,6	8,14
12,5	50° (–51°)	61,09	67,54	6,45	9,55
7	53°	36,54	42,88	6,34	14,78
6	59°	36,60	42,22	5,62	13,31

Tabelle auf S. 351.

Durchmesser d. Stütze in mm.	Neigungswinkel.	Länge der Concavs. in mm.	Länge der Convexs. in mm.	Differenz in mm.	Verkürzung der Concav- gegen die Convexseite in %.
5	70°	45,9	51,6	5,7	11,05
7	65°	52,02	58,48	6,46	11,05
12	68°	82,04	89,45	6,41	7,17
20	63°	138,4	144,54	6,14	4,25
35	60°	219,9	226,45	6,55	2,89
38	62°	254,28	260,43	6,15	2,36
45	60°	282,74	289,22	6,48	2,24
46	56°	258,44	265,66	7,22	2,72
51	54°	272,6	280,16	7,56	2,70
55	50°	268,8	277,05	8,25	2,98
58	53°	302,77	310,50	7,73	2,49
62	50°	303,02	311,29	8,27	2,66
70	47°	322,46	331,15	8,59	2,59
76	43°	326,47	335,73	9,26	2,76
80	45°	355,43	364,4	9,0	2,47

Anmerkung. Die Art der Berechnung ist folgende: Ich habe in der ersten Tabelle den Durchmesser des Stengels zu 1,5 mm, in der zweiten — da der Hopfen dickere Stengel hat — zu 2 mm angenommen. Den angegebenen Neigungswinkel habe ich als an der Concavseite gemessen betrachtet. Auf Grund dieser Annahmen kann man zunächst die Länge der Concavseite einer Windung leicht berechnen (nach der Formel: $s = 2r\pi\sqrt{1 + \tang^2\alpha}$) und auch den Neigungswinkel der Convexseite finden nach der Formel: $\tang\beta = \frac{r\tang\alpha}{R}$, wo R den Radius der Stütze vermehrt um den Durchmesser des Stengels bedeutet). Ebenso wie die Länge der Concavseite kann man unter Einführung von R und $\tang\beta$ die der Convexseite berechnen.

Aus diesen Tabellen geht hervor, dass gerade an dünnen Stützen die Längsunterschiede grösser sind als an dicken, denn bei einem Stützendurchmesser von 6 mm war die Concavseite gegen die Convexseite um 13 %, bei einem Durchmesser von 29 mm nur um 6 % kürzer; ähnlich ist das Verhältniss in der zweiten Tabelle. Dies ist also gerade das Gegentheil von dem, was K. mit seinen Messungen beweisen wollte. Ich habe mich bei der Berechnung obiger Werthe genau an die K.'schen Tabellen gehalten und nur in I. beim Stützendurchmesser 12,5 mm den Winkel 50° zu Grunde gelegt. K. giebt 50—51° an.

Auf S. 352 giebt K. einige directe Messungen von Aussen- und Innenseite eines Calystegiastengels und auch diese Angaben beweisen das Gegentheil von dem, was K. durch sie beweisen will. Folgende Tabelle giebt eine Uebersicht hierüber:

Dicke der Stütze in mm.	Aussenseite in mm.	Innenseite in mm.	Differenz in mm.	Verkürzung der Innenseite gegen die Aussenseite in %.	Mittel aus je 2 Messungen an derselben Stütze.
3,5	42	36	6	14,3	
5	65	60	5	7,7	11 %
5	90	77	13	14,4	
10	59,5	52,5	7	11,8	10 %
10	102,0	93,5	8,5	8,3	

In der zweiten Tabelle, welche Messungen an Menispermum canadense enthält, stimmt allerdings die procentuale Berechnung besser, wie aus Folgendem hervorgeht:

Stützendicke.	Aussenseite.	Innenseite.	Differenz.	%.
13	83	80	3	3,5
13	97	93	4	4,1
13	88	84,5	3,5	4,0
13	70	67	3	4,3
13	71,5	68	3,5	4,9
22,5	62	56	6	9,7
22,5	47	41	6	12,8
22,5	45,5	42	3,5	7,9

Dazu ist zu bemerken, dass die bedeutende Differenz 12,8 % wahrscheinlich auf einem Beobachtungsfehler beruht,

der ja bei der Methode des Messens, die K. anwandte, sehr leicht möglich ist. Ich schliesse dies daraus, dass bei Zugrundelegung dieses Werthes und der Stützendicke von 22,5 mm die Berechnung des Neigungswinkels ca. 28° ergiebt; ein so geringer Neigungswinkel dürfte wohl kaum vorkommen, denn der Grenzwerth liegt jedenfalls höher. Mit Ausnahme dieser letzteren sprechen demnach alle von mir genauer berechneten Tabellen gegen die Annahme der Reizbarkeit; denn es ist selbstverständlich, dass hierbei nur die procentuale Berechnung, wie ich sie ausgeführt habe, in Betracht kommen kann. Das letztere scheint K. übersehen zu haben, sonst würde er die erste Tabelle auf S. 352 gewiss nicht als Beweis für seine Behauptung betrachtet haben.

Beziehungen zwischen dem Neigungswinkel der Windungen und der Dicke der Stütze bestehen ganz sicher, sie beruhen aber nicht darin, dass von der dickeren Stütze eine länger andauernde Reizwirkung ausgeübt wird, als von der dünneren, sondern der Grund für diese Beziehungen ist jedenfalls in der geotropischen Aufwärtskrümmung der oberen Internodien zu suchen. Ist die Stütze dick, so wird dieser Aufwärtskrümmung sehr bald ein Widerstand entgegengesetzt, ist dagegen der Durchmesser gering, so kann die durch den Geotropismus herbeigeführte Bewegung fast vollständig ausgeführt werden. Es muss demnach bei dünner Stütze der Werth des Neigungswinkels gross, bei dicker Stütze dagegen geringer sein; doch wird er in dem letzteren Falle einen gewissen Grenzwerth, der von den Wachsthumsverhältnissen der einzelnen Pflanzen abhängt, nicht überschreiten. Dieser Grenzwerth liegt nach den jetzigen Untersuchungen zwischen 35° und 40°. Dass bei dickeren Stützen eine stärkere Verkürzung der Concavseite gegen die Convexseite als bei dünnen stattfindet, ist keineswegs nothwendig, kann aber unter gewissen Umständen eintreten.

Aus dem, was im Vorstehenden über die Versuche K.'s gesagt wurde, geht zur Genüge hervor, dass von einer Reizbarkeit in dem Sinne, wie sie K. auffasst, bei den windenden Pflanzen nicht die Rede sein kann. Damit fällt natürlich die Annahme, dass der Einfluss der Stütze beim Zustandekommen der Schraubenwindungen als eine Reizwirkung zu betrachten sei, und es bleibt demnach nur die andere Annahme übrig, dass nämlich

der Widerstand, den die Stütze den Bewegungen der Stengel entgegensetzt, einen integrirenden Factor bei der Mechanik des Windens bilde.

Das Capitel über Torsionen in der K.'schen Abhandlung erfordert ebenfalls eine eingehendere Besprechung.

Es ist von Schwendener ausdrücklich hervorgehoben worden, dass der Nullpunkt, von dem man beim Messen der Torsionen auszugehen hat, sich mit voller Sicherheit niemals bestimmen lasse. Es rührt dies daher, dass bei den Biegungen, welche der Stengel im Verlauf der Windens durchzumachen hat, die Axen, um welche die Krümmungen erfolgen, verschiedene Winkel mit der Längsachse des Stengels machen. Da jedoch in den meisten Fällen jene Achsen unter einem spitzen Winkel gegen die Längsachse geneigt sind, der sich nur selten einem Rechten nähert, so kann man mit Recht annehmen, dass sich ein gewundener Stengel nahezu wie ein Papierstreifen verhält, den man schraubenlinig um einen cylindrischen Stab herumwickelt. Hierbei tritt keine wirkliche Torsion auf und es bleibt immer dieselbe Seite nach aussen gekehrt. Wenn man demnach diesen Zustand als Nullpunkt wählt, so kommt man dem thatsächlichen Verhalten am nächsten. K. nimmt an, dass die Krümmungen um eine zur Achse des Stengels senkrechte Achse erfolgen und dies wäre auch wirklich der Fall, wenn dieselben ausschliesslich durch Reizwirkung und Geotropismus zu Stande kämen, was nach dem Gesagten nicht möglich ist.

Aber selbst wenn man zugiebt, dass die Krümmungen immer in jener Weise stattfinden, so lässt sich die von K. weiterhin dargelegte Anschauung von dem Verlaufe einer Längszone an dem gewundenen Stengel nicht damit in Einklang bringen. Denn betrachtet man die Figur 9 *a*, *b*, *c*, welche den Verlauf einer Längszone an einem gewundenen Stengel darstellen soll a) bei scheinbarer Torsion, b) bei wirklicher homodromer Torsion, c) bei wirklicher antidromer Torsion, so geht daraus sofort hervor, dass er die diesbezüglichen Angaben Schwendener's völlig missverstanden hat. Nägeli und Schwendener haben im »Microscop« fälschlich angenommen, dass an einem nicht tordirten gewundenen Stengel immer dieselbe Längszone nach einer Seite gekehrt sein müsse, Schwendener hat nun aber in seiner Abhandlung über das Winden der Pflanzen diese Angabe im »Microscop« ausdrücklich berichtigt und

auseinandergesetzt, dass an einem nicht tordirten Stengel, dessen Krümmungen senkrecht zu seiner Längsachse erfolgen — wie ja K. annimmt — eine Längslinie nicht immer derselben Seite zugekehrt sein kann, sondern eine scheinbare antidrome Torsion erfährt. Er hat dies an einem Modell deutlich gemacht, von dem sich in Fig. 13 und 14 (a. a. O.) eine Abbildung findet, welche sofort den Verlauf der einer Längslinie des Stabes entsprechenden schwarzen Linie erkennen lässt. Er hat ausserdem eine genaue Berechnung dieser scheinbaren Torsion für verschiedene Neigungswinkel gegeben. Von einer scheinbaren Torsion kann demnach in Fig. 9*a* — die K.'sche Anschauung von der Art der Krümmungen als richtig vorausgesetzt — gar keine Rede sein, es würde vielmehr eine wirkliche antidrome Torsion hier vorliegen. Hiernach sind auch die Fig. 9*b* und *c* zu beurtheilen. Wenn K. den in Fig. 9*a* dargestellten Zustand als Nullpunkt annimmt, so ist dies eben bei seinen Voraussetzungen über die Art der Krümmung falsch, und folglich sind auch seine sämmtlichen Angaben, die auf diese Weise gewonnen wurden, nicht den Thatsachen entsprechend.

Was K. über die homodrome Torsion und deren Ursachen anführt, ist mir zum Theil unverständlich geblieben, er sagt: »Die homodrome [Torsion] entsteht theils aus inneren Wachsthumsursachen dadurch, dass die peripherischen Theile des Stengels mehr wachsen als die centralen, theils ist sie das Resultat der streckenden Wirkung des negativen Geotropismus der windenden Stengel; denn schon dadurch, dass der eine Spirale bildende und torsionslose Stengel durch den Geotropismus bei durch die Nutation verhinderter Rückwärtsbewegung (diese Bedingung ist nicht zu übersehen) der Spitze gestreckt wird, erhält derselbe homodrome Torsionen, zu welchen sich die erstgenannte hinzugesellt.«

Dass die homodromen Torsionen aus inneren Wachsthumsursachen entstehen, ist zweifellos; dass aber diese in der Verschiedenheit des Wachsthums centraler und peripherischer Partien zu suchen sind, ist keineswegs erwiesen. Doch wenn auch solche Wachsthumsdifferenzen vorhanden wären — was ja durchaus nicht geleugnet werden soll — so würde damit allein keine Erklärung der *homodromen* Torsion gegeben sein, denn es könnte in Folge dessen ebenso gut eine *antidrome* Torsion auftreten.

Schwendener hat ebenfalls eine Erklärung der homodromen Torsion versucht, die mechanisch wenigstens exact begründet ist, aber er sagt selbst, dass keine Aussicht vorhanden sei, die Frage definitiv zu beantworten; er weist auf die naheliegende Möglichkeit eines Zusammenhanges zwischen Nutation und homodromer Torsion hin. Die Untersuchungen Baranetzky's haben indessen gezeigt, dass ein solcher Zusammenhang, wie ihn Schwendener annimmt, nicht vorhanden sein kann; denn es treten starke homodrome Torsionen auch an Stengeln auf, die man langsam um eine horizontale Achse rotiren lässt, bei denen also die regelmässige Nutation sistirt ist. Man kann also nach dem jetzigen Standpunkte unserer Kenntnisse nur soviel mit Bestimmtheit sagen, dass die homodrome Torsion aus inneren Wachsthumsursachen entsteht; Näheres über diese Wachsthumsvorgänge wissen wir nicht.

Dass der Geotropismus bei der homodromen Torsion zeitweise mitwirkt, ist möglich und theoretisch ganz gut construirbar, wie ich in der schon öfters erwähnten kleinen Mittheilung »Ueber heliotropische und geotropische Torsionen« gezeigt habe; was aber K. über diesen Punkt sagt, ist mir vollkommen unverständlich; was soll heissen »der Stengel wird durch den Geotropismus *bei durch die Nutation verhinderter Rückwärtsbewegung der Spitze* gestreckt und erhält dabei eine homodrome Torsion«? Die Nutation kann überhaupt keine Bewegung der Spitze verhindern, wohl aber ein von aussen kommender Widerstand, z. B. eine Stütze; tritt aber eine solche Verhinderung der Nutationsbewegungen durch eine Stütze oder ein beliebiges anderes Hinderniss ein, so muss *stets* eine der Nutationsrichtung gegenläufige Torsion entstehen.

Dass die von mir dargelegte Möglichkeit einer homodromen Torsion in Folge geotropischer Wachsthumserscheinungen für die Erklärung der starken homodromen Torsionen an frei nutirenden Sprossen belanglos ist, leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dass auch bei verticaler Lage der Krümmungsebene homodrome Torsionen sich finden, die unmöglich durch den Geotropismus hervorgerufen sein können.

Betreffs der K.'schen Ausführungen über die Torsionen ist im Allgemeinen dasselbe zu sagen, was oben schon über die diesbezüglichen Angaben von Sachs und Baranetzky ausgesprochen wurde, dass nämlich die verschiedenen Torsionsarten

nicht richtig auseinander gehalten werden und dass somit eine klare Vorstellung der thatsächlichen Verhältnisse von dem genannten Forscher unmöglich gewonnen werden konnte.

Ich wende mich nunmehr noch zu dem, was K. gegen die Nothwendigkeit der Greifbewegung ausführt. Auf S. 333 heisst es: »Gegen sie [die Greifbewegung] sprechen alle Fälle, wo Pflanzen um sehr dicke und sehr dünne Stützen winden; an ersteren ist das Ergreifen überhaupt unmöglich, an letzteren ist es möglich, kommt aber in Wirklichkeit nur selten vor.« Was den ersten Punkt betrifft, so ist zunächst die Frage aufzuwerfen, was K. unter »*sehr dicken Stützen*« versteht. Es ist selbstverständlich und wird auch wohl von Niemand bezweifelt werden, dass für jede windende Pflanze ein Grenzwerth existirt, den der Durchmesser der Stütze nicht überschreiten darf. Es hängt dieser Grenzwerth von den Wachsthumsverhältnissen der betreffenden Pflanze ab. Im Allgemeinen kann man wohl annehmen, dass dieser Grenzwerth durch die Länge der nutirenden Stengelpartie gegeben ist und zwar in der Weise, dass eine Stütze, deren halber Umfang jener Länge gleichkommt, noch umwunden werden kann. Bei etwas dickeren Stützen wird ein normales Winden nur unter sehr günstigen Umständen eintreten können, wie ich oben schon bei Besprechung der Baranetzky'schen Bemerkungen über diesen Punkt auseinandergesetzt habe. Da ich nicht weiss, was K. unter *sehr dicken* Stützen versteht, und auch nirgends in seiner Abhandlung etwas darüber angegeben ist, so habe ich vorerst keine Veranlassung, mich ausführlicher gegen diese Behauptung zu wenden.

Dass an sehr dünnen Stützen die Greifbewegung nicht oder nur sehr selten einträte, ist nicht richtig. Allerdings kommt ein Anlegen der äussersten Spitze an die Stütze verhältnissmässig selten vor. Die jüngsten noch kurzen Internodien zeigen überhaupt keine oder nur sehr geringe Nutationsbewegungen, sie werden vielmehr passiv durch die lebhaft nutirenden älteren Internodien fortgeführt. Eine Greifbewegung, bei der die ersteren den oberen Contact bilden, kann deshalb nicht so häufig eintreten, weil die dünne Stütze nicht bei jedem Nutationsumlauf hindernd im Wege steht und weil ausserdem die durch den negativen Geotropismus modificirten Bewegungen oft gar nicht so ausgiebig sind, um die Spitze bis

an den als Stütze dienenden dünnen Faden hinanzuführen. Uebrigens kommt das Anlegen der äussersten Spitze an die Stütze durchaus nicht so selten vor, wie man nach den Bemerkuegen K.'s vermuthen könnte, denn durchschnittlich findet dasselbe bei drei Nutationsumläufen einmal statt und zwar deshalb, weil in dieser Zeit ein früher horizontal liegendes oder stark geneigtes Sprossende sich soweit geotropisch aufgerichtet hat, um nunmehr seine Nutationsbewegungen um eine fast vertical stehende Achse ausführen zu können. Sobald dies eingetreten ist, muss natürlich auch, wenn nicht besonders ungünstige Umstände dazwischen treten, die Spitze mit dem Faden in Contact kommen. Aber um diesen Punkt allein handelt es sich gar nicht bei der Greifbewegung, wie Kohl und vor ihm auch Wortmann (vergl. Referat in der Botan. Zeitung S. 573—575) anzunehmen scheinen, denn das am meisten wirksame Ergreifen der Stütze findet, falls die letztere dünn ist, weiter rückwärts statt in jenen Internodien, welche in Folge der lebhaften Nutation und des negativen Geotropismus schon eine halbe oder auch ganze, aber dann stets lockere, Windung um den Faden bilden. Hier muss bei jedem Nutationsumlauf mindestens einmal eine Greifbewegung stattfinden, dazu kommt noch der Einfluss des negativen Geotropismus, da die hierdurch veranlassten Bewegungen wesentlich in gleichem Sinne, wie die Nutation wirken. Dabei ist noch zu beachten, dass der nutationsfähige Theil des Stengels inclusive der noch nicht nutirenden äussersten Partie immerhin eine Länge von 18—20 cm bei unserem Klima angepassten windenden Pflanzen erreicht und dass in Folge dessen das Sprossende in einer Länge von 5—10 cm längere Zeit sich bewegen kann, ohne die Stütze zu berühren, während die zurückliegende Partie im Stande ist, die nothwendigen Greifbewegungen auszuführen.

Das letztere ist natürlich blos möglich bei dünnen Stützen, bei dickeren tritt es ja auch in der That nicht ein, wie K. selbst zugiebt. Kommt der Durchmesser der Stütze dem Grenzwerthe nahe, so muss natürlich die nutationsfähige Partie in ihrer ganzen Länge zur Herstellung der Greifbewegung verwendet werden, und es kann in diesem Falle ein freies Nutiren des Sprossendes nur dann stattfinden, wenn durch Zufälligkeiten die Spitze von der Stütze abgerutscht ist.

Es kann demnach bei dünnen Stützen ein regelmässiges

Winden auch dann eintreten, wenn an der obersten Partie verhältnissmässig selten Greifbewegungen stattfinden. Ich komme übrigens auf die Vorgänge beim Winden um Fäden und dergl. im zweiten Theile noch ausführlicher zu sprechen; ich wollte hier nur kurz andeuten, dass die oben citirten Einwendungen K.'s nicht berechtigt sind.

Auf S. 333 unten heisst es: »Das Ergreifen der Stütze wiederholt sich nach Schwendener in ganz unbestimmten Zwischenräumen, der Zeitpunkt, wo dieses Ergreifen stattfindet, ist zufällig«; und weiterhin auf S. 334 oben:

»Ein Grund für eine in ganz bestimmten Perioden zum Ergreifen der Stütze führenden Spannung im nutirenden Stengel ist durchaus nicht vorhanden. Man weiss überhaupt nicht, woher jedesmal die grosse, zum Ergreifen nöthige Spannung kommen soll, denn diese Spannung müsste doch bedeutend grösser sein, als die im einfach nutirenden Stengel.«

Es ist nicht wahr, dass *nach* Schwendener das Ergreifen in ganz unbestimmten Zwischenräumen stattfindet. In der ganzen Abhandlung Schwendener's findet sich keine Bemerkung, woraus dies geschlossen werden könnte. Es ist dies auch unmöglich, denn es würde ja der Theorie dieses Forschers widersprechen. Wenn K. die Möglichkeit einer so grossen Spannung, wie sie zur Greifbewegung nöthig ist, nicht zugeben will, so ist es mir völlig unverständlich, wie er späterhin auf S. 355 und 356 sagen kann, dass die antidromen Torsionen durch den Widerstand der Stütze bedingt würden. Das letztere ist ja vollkommen richtig, es ist dasselbe, was Schwendener auch sagt; aber wenn K. dies zugiebt, so muss er doch auch das Vorhandensein einer starken Spannung zugeben. Denn bei den Greifbewegungen, bei welchen jene Torsionen erzeugt werden, ist zugleich mit dem Torsionsmoment auch ein bedeutendes Biegungsmoment vorhanden.

Hiermit will ich die Besprechung der Kohl'schen Arbeit beschliessen. Ich glaube gezeigt zu haben, dass einerseits die Annahme der Reizbarkeit eine unbegründete ist, und zweitens, dass die Einwendungen gegen die Greifbewegung in keiner Weise die Schwendener'sche Theorie erschüttern können.

SITZUNG AM 15. DECEMBER 1884.

W. Scheibner. *Über eine Transformationsformel für Doppelintegrale.*

Die Auflösung der quadratischen Gleichung $fx = 0$ beruht darauf, dass der Differentialquotient $f'x$ nur zwei entgegengesetzte Werthe annehmen kann. Diess folgt z. B. aus der bekannten Gleichung $\sum \frac{1}{f'x} = 0$, mithin ist $(f'x)^2$ durch eine ganze Function der Coefficienten — die Discriminante — gegeben.

Bei zwei Functionen zweiter Dimension in x und y sind im Allgemeinen vier Werthsysteme xy vorhanden, für welche $f = \varphi = 0$; in der Jacobi'schen Gleichung (Crelle Bd. XIV S. 286)

$$\sum \frac{ax + by + c}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}} = 0$$

steigt die Functionaldeterminante auf den zweiten Grad und kann vier Werthe annehmen. Setzt man jedoch

$$f = pxy + p_1 x + p_2 y + p_3 = 0$$
$$\varphi = qxy + q_1 x + q_2 y + q_3 = 0$$

so reduciren sich die vier Werthsysteme von xy auf zwei (zwei Schnittpunkte der gleichseitigen Hyperbeln rücken ins Unendliche) und die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)} = (p_1 q - p q_1) x + (p q_2 - p_2 q) y + p_1 q_2 - p_2 q_1$$

wird linear. Alsdann bleibt die Gleichung gültig

$$\sum \frac{1}{\frac{\partial (f\varphi)}{\partial (xy)}} = 0 \text{ [1]}$$

so dass wiederum $\left(\frac{\partial (f\varphi)}{\partial (xy)}\right)^2$ eine ganze Function der Coefficienten p und q darstellt. Man erhält mit leichter Mühe

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial (f\varphi)}{\partial (xy)}\right)^2 &= (p_1q_2 - p_2q_1 + pq_3 - p_3q)^2 - 4(pq_2 - p_2q)(p_1q_3 - p_3q_1) \\ &= (p_1q_2 - p_2q_1 - pq_3 + p_3q)^2 - 4(pq_1 - p_1q)(p_2q_3 - p_3q_2).\end{aligned}$$

Schreibt man dafür mit abgekürzter Bezeichnung

$$\left(\frac{\partial (f\varphi)}{\partial (xy)}\right)^2 = (12 + 03)^2 - 4(02)(13) = (12 - 03)^2 - 4(01)(23)$$

so hat man auch

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial (f\varphi)}{\partial (xy)}\right)^2 &= (02 - 13)^2 - (12 + 03 + 02 + 13)(12 + 03 - 02 - 13) \\ &= (01 - 23)^2 - (12 - 03 + 01 + 23)(12 - 03 - 01 - 23).\end{aligned}$$

Der abgeleitete Ausdruck führt zur Transformation eines Doppelintegrals, analog den von Jacobi in Bd. 8 u. 15 des Crelleschen Journals behandelten Fällen, in denen zwei Doppelintegrale von gleicher Form in einander transformirt werden. Hierzu betrachte man die Coefficienten p und q als Functionen neuer Variabeln wz, in Bezug auf welche f und φ die Formen annehmen sollen

$$\begin{aligned} f &= rwz + r_1 w + r_2 z + r_3 = 0 \\ \varphi &= swz + s_1 w + s_2 z + s_3 = 0 \,. \end{aligned}$$

Alsdann werden die Coefficienten r und s in ähnlicher Weise abhängig von x und y, wie p und q von w und z, und in der Gleichung

$$\int \frac{dx\,dy}{\frac{\partial (f\varphi)}{\partial (wz)}} = \int \frac{dw\,dz}{\frac{\partial (f\varphi)}{\partial (xy)}}$$

---

1) Dass die Jacobi'sche Form, bei welcher der Grad des Zählers »tribus inferior quam summa ordinum f φ« sein soll, in solchen Fällen ihre allgemeine Gültigkeit verliere, ist von Kronecker hervorgehoben und zugleich betont worden, »dass alsdann ebenfalls gewisse, den Jacobi'schen Relationen entsprechende Beziehungen abgeleitet werden können«. Siehe Berliner Monatsberichte 1865, S. 689 f.

finden sich die Variabeln getrennt, wenn man

$$\left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(wz)}\right)^2 = R(\overset{4}{x}\overset{4}{y}), \qquad \left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}\right)^2 = S(\overset{4}{w}\overset{4}{z})$$

substituirt. Selbstverständlich gehen obiger Gleichung die analog gebildeten

$$\frac{dw\,dx}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(yz)}} = \frac{dy\,dz}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(wx)}} \quad \text{und} \quad \frac{dx\,dz}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(wy)}} = \frac{dw\,dy}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xz)}}$$

parallel.

Aus der Theorie der elliptischen Functionen ist bekannt, dass für

$$x = \left(\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta(u)}\right)^2$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x(\vartheta_2{}^2 - \vartheta_3{}^2 \cdot x)(\vartheta_3{}^2 - \vartheta_2{}^2 \cdot x)$$

oder

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x(\vartheta_2{}^2 - \vartheta_3{}^2 . x)(\vartheta_3{}^2 - \vartheta_2{}^2 . x)}}$$

wird. Ebenso erhält man für

$$x = \left(\frac{\vartheta_1(uv)}{\vartheta(uv)}\right)^2, \quad y = \left(\frac{\vartheta_2(uv)}{\vartheta(uv)}\right)^2$$

wo der Bequemlichkeit halber (siehe Rosenhain, Preisschrift S. 422)

$$\varphi_{00}(uv) = \vartheta(ui, vi)$$
$$\varphi_{10}(uv) = \frac{1}{i}\vartheta_1(ui, vi)$$
$$\varphi_{20}(uv) = \vartheta_2(ui, vi)$$

gesetzt ist,

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} =$$

$$= \frac{4}{\varphi_{11}}\sqrt{xy(\varphi_{20}^2 - \varphi_{30}^2 \cdot x - \varphi_{00}^2 \cdot y)(\varphi_{22}^2 - \varphi_{32}^2 \cdot x - \varphi_{02}^2 \cdot y)(\varphi_{23}^2 - \varphi_{33}^2 \cdot x - \varphi_{03}^2 \cdot y)}$$

oder

$$du\,dv = \frac{dx\,dy}{\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)}}\,.$$

Bestimmt man nun die constanten Coefficienten in den Functionen f und φ so, dass

$$\left(\frac{\partial\,(xy)}{\partial\,(uv)}\right)^2 = \left(\frac{\partial\,(f\varphi)}{\partial\,(wz)}\right)^2 = R\,(\overset{4}{x}\overset{4}{y})$$

so hat man auch

$$\int du\,dv = \int \frac{dw\,dz}{\sqrt{S(\overset{4}{w}\overset{4}{z})}}\,.$$

Wenn ein Ausdruck $F(xy)\,dx\,dy$ doppelt integrirt werden soll, so pflegt man den Umfang des Doppelintegrals durch Angabe des Bereichs zu bestimmen, innerhalb dessen x und y variiren sollen, ebenso wie bei einfacher Integration das Integral $\int Fx\,dx$ dadurch zu einem *bestimmten* Integrale wird, dass die Grenzen oder der Integrationsweg vorgeschrieben werden. Als *unbestimmtes* Integral gilt die Function u + const., welche der Differentialformel $du = Fx\,dx$, mit anderen Worten der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial x} = Fx$ genügt. In analoger Weise können wir von einem *unbestimmten* Doppelintegrale sprechen, wenn zwei Functionen u und v von x und y bekannt sind, welche der Differentialformel

$$du\,dv = F(xy)\,dx\,dy$$

mit anderen Worten der Relation

$$\frac{\partial\,(uv)}{\partial\,(xy)} = F(xy)$$

genügen. Und wie man das einfache bestimmte Integral — von speciellen Grenzwerthen abgesehen — in der Regel am bequemsten aus dem unbestimmten ableitet, so wird auch der Übergang zu einem Doppelintegrale mit bestimmtem Integrationsbereiche in der reducirten Form $\iint du\,dv = \int u\,dv$ in der Regel bequemer zu bewerkstelligen sein als bei $\iint F(xy)\,dx\,dy$.

Bei dieser Reduction hat man als charakteristisch zu beachten, dass während beim einfachen Integral die Function u bis auf eine Constante bestimmt ist, an Stelle von u und v zwei beliebige Functionen $u'v'$ treten können, für welche die Gleichung

$\frac{\partial(u'v')}{\partial(uv)} = 1$ erfüllt ist. Bezeichnet man daher durch φ und ψ zwei *willkürliche* Functionen, so ergibt sich

$$u' = \varphi(uv)\,, \qquad v' = \psi u' + \int \frac{dv}{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right]}$$

wenn in dem partiellen Differentialquotienten $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right]$ u durch u' eliminirt worden ist. Auch können hier uv und $u'v'$ vertauscht werden. Analog lässt sich die unbestimmte Integration der Differentialformel $du\,dv = F(xy)\,dx\,dy$ oder $\frac{\partial(uv)}{\partial(xy)} = F(xy)$ im allgemeinsten Falle auf eine Quadratur zurückführen mittelst der Gleichungen

$$u = \varphi(xy)\,, \qquad v = \psi u + \int \left[\frac{F(xy)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}\right] dy$$

wenn unter dem Integralzeichen in $\left[\frac{F(xy)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}\right]$ x durch u eliminirt wird.

Wenn bei einem einfachen Integrale $\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx$ die Grenzen gegeben sind, so hat man noch den Integrationsweg festzustellen, um den Werth des Integrals ohne Vieldeutigkeit zu erhalten. Für $x = t + ui$ geschieht diess durch eine reelle Gleichung $\varphi(tu) = 0$, welche für $t_0\, u_0$ und $t_1\, u_1$ erfüllt sein muss; man weiss, dass, von singulären Punkten abgesehen, eine Variation von φ auf den Werth des Integrals ohne Einfluss bleibt. An Stelle der Gleichung $\varphi = 0$ können t und u auch als Functionen einer unabhängigen reellen Variabeln p gegeben sein, die innerhalb des Integrals von p_0 bis p_1 wächst. Man wird demnach sagen können: um das *einfache* Integral zu einem *bestimmten* zu machen, hat man zunächst ein zusammenhängendes Gebiet von *einer* Dimension aus dem *zwei*dimensionalen Gesammtgebiete der complexen Werthe von x auszuscheiden, etwa unter dem Bilde der durch die Gleichung $\varphi(tu) = 0$ gegebenen — unbegrenzten oder geschlossenen — Curve, und dann auf dieser Curve die Strecke von x_0 bis x_1 zur Integration zu benutzen.

Um Entsprechendes für *Doppelintegrale* $\int\int F(xy)\,dx\,dy$ leisten zu können, wird man ein zusammenhängendes — zunächst unbegrenztes — Gebiet von *zwei* Dimensionen aus dem *vier*dimensionalen Gesammtgebiete complexer Werthe von x und y auszusondern, und auf demselben durch eine Curve oder *ein*dimensionale Begrenzung denjenigen Gebietstheil zu definiren haben, über welchen die Integration der Function $F(xy)$ sich erstrecken soll. Ein solches unbegrenztes Gebiet liefert z. B. der Complex der reellen Werthe von $x = t + ui$ und $y = v + wi$, charakterisirt durch die beiden Gleichungen $u = 0$ und $w = 0$; in diesem Complexe ist dann mit Hülfe einer (geschlossenen resp. unbegrenzten) Grenzcurve $\chi(tv) = 0$ der eigentliche Integrationsbereich zu bestimmen. Im allgemeinen Falle wird das unbegrenzte (geschlossene) zweidimensionale Gebiet dadurch gewonnen, dass die reellen Grössen $tuvw$ zwei Gleichungen $\varphi(tuvw) = 0$ und $\psi(tuvw) = 0$ erfüllen sollen, mittelst deren zwei der vier Variabeln durch die beiden anderen ausgedrückt werden können, oder dass diese vier Variabeln als Functionen zweier unabhängigen reellen Variabeln p und q gegeben sind. Die Grenzcurve für das eigentliche Integrationsgebiet wird dann durch eine Gleichung $\chi(pq) = 0$ zwischen den beiden unabhängigen Variabeln definirt, dergestalt, dass die Ungleichung $\chi < 0$ den Integrationsbereich umfasst.

Häufig wird indess diese Grenzcurve dadurch bestimmt sein, dass die Werthe, welche die (complexe) Variable x an der Grenze annehmen soll, nebst den zugehörigen Werthen der zweiten Integrationsvariabeln y gegeben sind. Mit anderen Worten, für die Grenzwerthe soll eine Gleichung $y = fx$ bestehen, in welcher x die durch $\chi(tu) = 0$ vorgeschriebenen Werthe durchlaufen soll. Ist nun fx im engeren Sinne Function der complexen Variabeln x, so werden dadurch v und w als Functionen von t und u bestimmt, welche den bekannten Differentialrelationen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

folglich

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$$

genügen. Es würde nun an sich Nichts im Wege stehen, durch $y = fx$ oder die entsprechenden Gleichungen $v = \varphi(tu)$, $w = \psi(tu)$ ein unbegrenztes zweidimensionales Gebiet zu definiren, in welchem die gegebene Grenzcurve $\chi(tu) = 0$ enthalten ist, und auf diese Weise das Doppelintegral zu einem völlig *bestimmten* zu machen. Man sieht aber leicht, dass in diesem Falle die Functionaldeterminante $\frac{\partial(xy)}{\partial(tu)}$ und damit der Werth des bestimmten Integrals bei Einführung der reellen Variabeln tu identisch verschwindet.

Übrigens ist aus der Theorie des logarithmischen Potentials bekannt, dass wenn die Werthe gegeben sind, welche v und w längs der Grenzcurve $\chi(tu) = 0$ annehmen, während im Innern (auf einer Seite) derselben überall

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$$

sein soll, dadurch die stetig variabeln Functionen $v = \varphi(tu)$ und $w = \psi(tu)$, und somit y, vollkommen bestimmt sind. Dabei zeigt sich, dass wenn f_1 und f_2 zwei willkürliche Functionen bedeuten, und

$$v = \tfrac{1}{2}\{f_1(t + ui) + f_1(t - ui)\}$$

sowie

$$w = \frac{1}{2i}\{f_2(t + ui) - f_2(t - ui)\}$$

als reelle Integrale der Potentialgleichung ausgedrückt werden, die Gleichung $y = fx$ im Sinne des Functionsbegriffs complexer Variabeln nur dann hervorgeht, wenn die längs der Grenzcurve gegebenen Werthe von v und w so beschaffen sind, dass $f_1 = f_2$, mit anderen Worten, dass die Ausdrücke

$$vdu + wdt \quad \text{oder} \quad vdt - wdu$$

vollständige Differentiale werden. Ist diess nicht der Fall, so bleiben gleichwohl $v = \varphi(tu)$ und $w = \psi(tu)$ die Gleichungen für ein zweidimensionales Integrationsgebiet, an dessen Begrenzung die Integrationsvariabeln x und y gegebene complexe Werthe annehmen, und alle übrigen zulässigen Integrationsgebiete werden durch Variirung der Functionen φ und ψ hervorgehen, wenn dabei nur die der Grenzgleichung $\chi(tu) = 0$

entsprechenden Werthe ungeändert bleiben. Dabei wird sich nach Analogie der einfachen Integrale herausstellen, dass eine solche Variation der Functionen φ und ψ erst dann von Einfluss auf den Werth des bestimmten Doppelintegrals werden kann, wenn gewisse singuläre Stellen überschritten werden.

Die vorstehenden Andeutungen mögen genügen, um zu zeigen, wie man bei Doppelintegralen mit complexem Integrationswege zur Reduction auf reelle Variabilität gelangen könne.

A. Hurwitz, *Über Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.* Vorgelegt von Prof. *Klein.*

In einer Note, welche in den Göttinger Nachrichten vom 21. Nov. 1883 veröffentlicht ist, habe ich gezeigt, wie die von Herrn Klein sogenannten Modularcorrespondenzen mit Hülfe der ϑ-Functionen mehrerer Veränderlichen analytisch dargestellt werden können[1]. Seither habe ich mein Augenmerk namentlich auf die Verwendung dieser Entwicklungen zur Aufstellung von Klassenzahlrelationen gerichtet. Ein Theil meiner diesbezüglichen Untersuchungen bildet den Inhalt einer in den Mathematischen Annalen (Bd. 25) demnächst erscheinenden Abhandlung, in welcher ausser allgemeinen Ansätzen insbesondere die Ableitung der Klassenzahlrelationen der 7. Stufe enthalten ist. Im Nachstehenden erlaube ich mir nun die Endresultate mitzutheilen, zu welchen mich die analogen Untersuchungen für die 11. Stufe geführt haben; die Beweise der betr. Formeln hoffe ich demnächst andern Orts ausführlich darlegen zu können.

Wie bei den Klassenzahlrelationen 7. Stufe ausser Theilersummen *eine* höhere zahlentheoretische Function $\psi(n)$ auftritt, so kommen in den Relationen der 11. Stufe *drei* höhere zahlen-

1) Die citirte Arbeit beschäftigt sich allerdings nur mit speciellen Modularcorrespondenzen; jedoch lassen sich, wie leicht zu erkennen, die dort angestellten Betrachtungen auf beliebige Modularcorrespondenzen übertragen.

theoretische Functionen vor, welche ich mit $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$ bezeichne.

Diese Functionen sollen hier nur für durch 11 nicht theilbare Werthe von n definirt werden; überhaupt möge der Buchstabe n im Folgenden stets eine zu 11 theilerfremde positive Zahl bedeuten.

Die Function $\psi_1(n)$ hat die Bedeutung:

$$\psi_1(n) = \frac{1}{2}\Sigma x,$$

die Summe erstreckt über alle diejenigen Lösungen der Gleichung

$$4n = x^2 + 11y^2$$

durch positive oder negative ganze Zahlen x, y, in welchen x quadratischer Nichtrest von 11 ist.

Hiernach wird z. B. $\psi_1(1) = 1$, $\psi_1(3) = -1$ u. s. w., und allgemein

$$\psi_1(n) = 0,$$

wenn n quadratischer Nichtrest von 11 ist.

Zur Definition der Functionen $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$, betrachte ich die Gleichung

$$4n = x^2 + 11y^2 + z^2 + 11u^2.$$

Es bezeichne $Z(n)$ die Zahl der Lösungen dieser Gleichung in positiven oder negativen ganzen Zahlen x, y, z, u, wobei jedoch nur solche Lösungen gezählt werden sollen, in welchen $x + y$ eine gerade Zahl ist. Unter diesen $Z(n)$ Lösungen wähle man ferner diejenigen aus, in welchen eine der Zahlen x, z, $x - z$, $x + z$ durch 11 theilbar ist; die Anzahl dieser ausgewählten Lösungen sei $Z_0(n)$. Alsdann hat man die folgenden Definitionsgleichungen:

$$\psi_2(n) = \frac{5Z(n) - 12\Phi(n)}{8},$$

$$\psi_3(n) = \frac{3Z_0(n) - Z(n)}{8},$$

wo $\Phi(n)$, wie auch weiterhin, die Summe der Divisoren von n bedeutet. Beispielsweise ist $\psi_2(1) = \psi_3(1) = 1$, $\psi_2(2) = -2$,

$\psi_3(2) = 1$. Die zahlentheoretischen Functionen $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$ besitzen für jeden Werth des Argumentes n positiv- oder negativ-ganzzahlige Werthe. Bezeichnet ferner $\psi(n)$ irgend eine dieser drei Functionen, so besteht für irgend zwei zu 11 theilerfremde Zahlen n, n' die Relation

$$\sum \delta \psi\left(\frac{n n'}{\delta^2}\right) = \psi(n) \cdot \psi(n') \ ;$$

hierbei ist die Summe zu erstrecken über alle gemeinsamen Divisoren δ von n und n'.

Für die übrigen in den Klassenzahlrelationen 11. Stufe auftretenden Grössen gebrauche ich folgende Bezeichnungen:

Ist m eine positive ganze Zahl, so bedeutet

$$H(m)$$

die Anzahl der verschiedenen Classen von positiven Formen

$$au^2 + buv + cv^2$$

der negativen Determinante

$$b^2 - 4ac = -m \ ,$$

wobei jedoch die Classen, welche eine Form $(a, 0, a)$, bez. (a, a, a) enthalten, nur $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{1}{3}$ Mal zu zählen sind; ferner soll

$$H(0) = -\frac{1}{12} \ ,$$

und für alle negativen und gebrochenen Werthe von m

$$H(m) = 0$$

gesetzt werden. Weiter ist unter

$$U_i$$

die Summe derjenigen Divisoren von n zu verstehen, welche kleiner als $\sqrt{n}$ sind und deren Quadrat $\equiv i \pmod{11}$ ist, wobei zu dieser Summe noch $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ hinzuzufügen ist, falls $\sqrt{n}$ eine ganze Zahl und $n \equiv i \pmod{11}$ ist.

Endlich werde zur Abkürzung das Summenzeichen

$$\sum_k f(x)$$

eingeführt. Falls $k \equiv 0 \pmod{11}$, soll die Summe über alle positiven und negativen ganzen Zahlen x erstreckt werden,

welche $\equiv 0 \pmod{11}$ sind; in jedem anderen Falle dagegen über alle positiven ganzen Zahlen x, deren Quadrat $\equiv k \pmod{11}$ ist.

Mit diesen Bezeichnungen stellen sich nun die 13 Relationen der 11. Stufe folgendermassen dar:

I. Formeln, in welchen n irgend einen quadratischen Nichtrest von 11 bedeutet.

$$\left\{\begin{aligned}
5 . {\sum_{0}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) - \psi_2(n) - 10\, U_{10n} .\\
5 . {\sum_{6n}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) - \psi_2(n) - 5\, U_{7n} - 5\, U_{8n} .\\
5 . {\sum_{10n}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) - \psi_2(n) - 5\, U_{2n} - 5\, U_{6n} .\\
6 . {\sum_{2n}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) + \psi_2(n) + 2\psi_3(n) .\\
6 . {\sum_{7n}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) + \psi_2(n) - \psi_3(n) .\\
6 . {\sum_{8n}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) + \psi_2(n) - \psi_3(n) .
\end{aligned}\right.$$

II. Formeln, in welchen n irgend einen quadratischen Rest von 11 bedeutet.

$$\left\{\begin{aligned}
11 . {\sum_{4n}}' \left[H(4n - x^2) - H\left(\frac{4n - x^2}{121}\right)\right] &\\
&= 2\Phi(n) + \psi_1(n) - 2\psi_3(n) .\\
5 . {\sum_{4n}}' \left[H(4n - x^2) + 11 . H\left(\frac{4n - x^2}{121}\right)\right] &\\
&= \Phi(n) - \psi_2(n) - 10\, U_n .\\
5 . {\sum_{5n}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) - \psi_2(n) - 5\, U_{5n} - 5\, U_{9n} .\\
5 . {\sum_{9n}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) - \psi_2(n) - 5\, U_{3n} - 5\, U_{4n} .\\
6 . {\sum_{n}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) + \psi_1(n) + \psi_2(n) - \psi_3(n) .\\
6 . {\sum_{3n}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) - \psi_1(n) + \psi_2(n) - \psi_3(n) .\\
6 . {\sum_{0}}' H(4n - x^2) &= \Phi(n) - \psi_1(n) + \psi_2(n) + 2\psi_3(n) .
\end{aligned}\right.$$

Die beiden von Herrn GIERSTER abgeleiteten und die weiteren fünf von demselben vermutheten Formeln [1]) stehen im Einklang mit den vorstehenden Resultaten. Die Elimination der Functionen $\psi_2(n)$ und $\psi_3(n)$ liefert nämlich eine Reihe von Formeln, welche nur noch die Function $\psi_1(n)$ enthalten; unter diesen finden sich insbesondere auch die GIERSTER'schen Formeln, wie das von vornherein zu erwarten stand.

Königsberg in Pr., den 4. December 1884.

---

1) Mathematische Annalen, Bd. 22, p. 202—206.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

INHALT.

Seite

K. Rohn, Ueber die Entstehung eines beliebigen $\varkappa$-fachen Punctes einer Fläche aus dem gewöhnlichen $\varkappa$-fachen Punct 1

W. Knop, Ueber Erzeugung und Ausscheidung von zweifach harnsaurem Ammoniak durch die Larve der Kleidermotte 9

K. Rohn, Einige specielle Fälle der Kummer'schen Fläche 10

O. Fischer, Note über conforme Abbildung gewisser sphärischer Dreiecke durch algebraische Functionen 17

F. Engel, Ueber die Abel'schen Relationen für die Theilwerthe der elliptischen Functionen 32

K. Rohn, Ueber Flächen 4. Ordnung mit acht bis sechzehn Knotenpuncten 52

F. Klein, Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe. 61

A. Mayer, Zur Aufstellung der Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale bei variabeln Grenzwerthen 99

F. Schur, Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung . . . 128

C. Segre, Sur un cas particulier de la surface de Kummer. Lettre à M. K. Rohn. 132

Dr. Ambronn, Zur Mechanik des Windens 136

W. Scheibner, Ueber eine Transformationsformel für Doppelintegrale 185

A. Hurwitz, Ueber Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante 193

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

SIEBENUNDDREISSIGSTER BAND.

1885.

MIT 3 TAFELN UND 18 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

INHALT.

Seite

R. Baltzer, Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. (Mit 5 Holzschnitten.) 1

A. Mayer, Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung 7

G. Pick, Zur Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen. Vorgelegt von F. Klein 15

T. Molien, Ueber gewisse, in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Einheitswurzeln. Vorgelegt von F. Klein. 25

W. Knop, Ueber die Aufnahme verschiedener Substanzen durch die Pflanze, welche nicht zu den Nährstoffen gehören. . . . 39

H. Bruns, Ueber die Rotation eines starren Körpers 55

E. Papperitz, Zur algebraischen Transformation der hypergeometrischen Functionen. Vorgelegt von F. Klein 60

F. Klein, Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen 70

L. Scheeffer, Ueber die Bedeutung der Begriffe »Maximum und Minimum« in der Variationsrechnung. Vorgelegt von A. Mayer 92

C. Reinhardt, Zu Möbius' Polyedertheorie. Vorgelegt von F. Klein. (Mit 3 Holzschnitten.) 106

W. His, Vorlegung der Tafeln IX—XIV seines embryologischen Atlas. 126

A. Schenk, Ueber Sigillariostrobus 127

H. Ambronn, Zur Mechanik des Windens. II. Theil. (Mit 6 Holzschnitten.) Vorgelegt von A. Schenk 132

M. von Frey und E. Wiedemann, Ueber die Verwendung der Holtz'schen Maschine zu physiologischen Reizversuchen. (Mit 1 Holzschnitt.) 181

H. Credner, Die obere Zechsteinformation im Königreich Sachsen 189

Seite

P. Biedermann, Ueber Multiplicatorgleichungen höherer Stufe. Vorgelegt von F. Klein 201

A. Hurwitz, Ueber die Klassenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe. Vorgelegt von F. Klein . . 222

W. von Bechterew, Untersuchungen über die Schleifenschicht. Mitgetheilt von P. Flechsig 241

A. Fischer, Studien über die Siebröhren der Dicotylenblätter. Vorgelegt von A. Schenk. Mit 2 lithogr. Tafeln 245

J. Gierster, Ueber die Galois'sche Gruppe der Modulargleichungen für den Transformationsgrad q^n. Vorgelegt von F. Klein . . 291

G. Morera, Zur Transformation und Theilung der elliptischen Functionen. Vorgelegt von F. Klein 302

W. Dyck, Beiträge zur Analysis situs. I. Mittheilung. Vorgelegt von F. Klein. (Mit 1 lithogr. Tafel.) 314

W. Braune und H. Stahel, Ueber das Verhältniss der Lungen, als zu ventilirender Lufträume, zu den Bronchien als luftzuleitenden Röhren. (Mit 1 Holzschnitt.) 326

L. Lange, Ueber das Beharrungsgesetz 333

C. Neumann, Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontal-Ebene unter dem Einfluss der Schwere. (Mit 2 Holzschnitten.) 352

A. Harnack, Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrales 379

J. Thomae, Ueber eine einfache Aufgabe aus der Theorie der Elasticität 399

W. Reichardt, Ein Beitrag zur Theorie der Gleichungen sechsten Grades. Vorgelegt von F. Klein. 419

D. Hilbert, Ueber eine allgemeine Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten für eine binäre Grundform geraden Grades. Vorgelegt von F. Klein 427

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Friedrich Zarncke* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1886.
- Professor *Adolf Ebert* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1886.
- —— *Berthold Delbrück* in Jena.
- —— *Georg Ebers* in Leipzig.
- —— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
- Geheimer Rath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig.
- Professor *Hans Georg Conon von der Gabelentz* in Leipzig.
- —— *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Herr Professor *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden.
- Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Professor *August Leskien* in Leipzig.
- —— *Hermann Lipsius* in Leipzig.
- —— *Wilhelm Maurenbrecher* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- —— —— *Otto Ribbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Anton Springer* in Leipzig.
- —— —— *Johann Ernst Otto Stobbe* in Leipzig.
- Professor *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.
- —— *Ernst Windisch* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
- —— *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Carl Ludwig* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1887.
- Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1887.
- Professor *Christian Wilhelm Braune* in Leipzig.
- —— *Heinrich Bruns* in Leipzig.
- Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- —— *Paul Flechsig* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.

Herr Professor *Axel Harnack* in Dresden.
- —— *Wilhelm His* in Leipzig.
- —— *Felix Klein* in Leipzig.
- —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- Professor *Carl Neumann* in Leipzig.
- —— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Leipzig.
- —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- Professor *Johannes Thomae* in Jena.
- Hofrath *August Töpler* in Dresden.
- Geheimer Hofrath *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Johannes Wislicenus* in Leipzig.
- —— *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
- Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Edmund Drechsel* in Leipzig.
- —— *Eilhard Wiedemann* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
- Professor *Adalbert Krüger* in Kiel.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Archivar:

Herr Oberbibliothekar *Joseph Heinrich Gustav Ernst Förstemann* in Leipzig.

Leipzig, am 31. December 1885.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1885 eingegangenen Schriften.

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1884. Berlin 1885.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1884, No. 40—54. 1885, No. 1—39. Berlin 1884. 85.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 13. Berlin 1885.

Preussische Staatsschriften aus der Regierungszeit König Friedrichs II. Im Auftrage der K. Akad. d. Wissensch. hrsg. v. J. G. Droysen und M. Duncker. Bd. 2. Berlin 1885.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 21 (1884), No. 28. Jahrg. 22 (1885) No. 1—24.

Abhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 11, Abth. 1. Wien 1885.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1884, No. 13—18. Jahrg. 1885, No. 1—7.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1884. Bd. 34, No. 4. 1885. Bd. 35, No. 1—3. Wien 1884. 85.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1884. Bd. 27 (N. F. Bd. 17). Wien 1884.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1884 (Bd. 34). Jahrg. 1885 (Bd. 35), I. Halbjahr. Wien 1884. 85. — Wimmer, A., Personen-, Ort- u. Sachregister d. dritten zehnjähr. Reihe (1871—80) der Sitzungsberichte u. Abhndl. d. k. k. zool.-botan. Gesellschaft. Wien 1884.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1884. Jahrg. 45. Hrsg. v. L. Weinek. Prag 1885.

Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft, im Auftrag des Vereines »Lotos« hrsg. N. F. Bd. 6 (der ganzen Reihe 34. Bd.). Prag 1885.

Ordnung der Vorlesungen an der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität zu Prag im Wintersem. 1885/86.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 23, No. 1—4. Prag 1884. 85.

Deutsche Chroniken aus Böhmen, hrsg. v. L. Schlesinger. Bd. 3 (Die Chroniken der Stadt Eger, bearb. v. H. Gradl. Im Auftrage d. Vereins f. Gesch. der Deutschen in Böhmen). Prag 1884.

Mittheilungen des deutschen Böhmerwaldbundes. 1885, No. 2. 3. Budweis 1885.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. Heft 33. Graz 1885.

Berichte d. naturwiss.-medizin. Vereines in Innsbruck. Jahrg. 14 (1883/84). Innsbruck 1884.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. Heft 28. 29. Innsbruck 1884. 85.

Ungarische Revue. Mit Unterstützung d. Ungar. Akad. d. Wissensch. hrsg. v. P. Hunfalvy u. Gust. Heinrich. 1885, H. 1. Leipzig, Berlin, Wien 1885.

Mathematische u. naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterst. d. Ungar. Akad. d. Wissensch. hrsg. Red. v. J. Fröhlich. Bd. 2 (Juni 1883 bis Juni 1884). Budapest 1884.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. Godina VII, Br. 1—4. U Zagrebu 1885.

Personalstand u. Ordnung d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1885.

Reifenkugel, K., Die Bukowinaer Landesbibliothek und die k. k. Universitäts-Bibliothek in Czernowitz. Czernowitz 1885.

Abhandlungen der historischen Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 17 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 58. Bd.), Abth. 2. München 1885.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 15 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 53. Bd.), Abth. 1. 2. München 1884. 85.

Abhandlungen d. philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 17 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 59. Bd.), Abth. 1. 2. München 1884. 85.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1884, H. 4. Jahrg. 1885, H. 1—3. München 1885.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1884, H. 5. 6. Jahrg. 1885, H. 1—3. München 1885.

Bezold, Frdr. v., Rudolf Agricola ein deutscher Vertreter d. ital. Renaissance. Festrede z. Vorfeier des Allerh. Geburts- u. Namensfestes S. M. Ludwigs II. Königs von Bayern gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Ak. d. Wiss. am 25. Juli 1884. München 1884.

Ohlenschlager, F., Sage und Forschung. Festrede gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wiss. zur Feier ihres 126. Stiftungstages am 28. März 1885. München 1885.

Brinz, Alois v., Zum Begriffe und Wesen der römischen Provinz. Festrede z. Vorfeier des Allerh. Geburts- u. Namensfestes S. M. Ludwigs II. Königs von Bayern gehalten in d. öffentl. Sitzung d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. am 25. Juli 1885. München 1885.

Hofmann, Konr., Johann Andreas Schmeller. Eine Denkrede. München 1885.

Oertel, K., Astronomische Bestimmung der Polhöhen auf den Punkten Irschenberg, Höhensteig und Kampenwand. München 1885.

Monumenta Tridentina. Beiträge z. Geschichte des Concils von Trient, von Aug. v. Druffel. H. 2. (Jun.—Dec. 1545). München 1885.

Sechsundzwanzigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1885.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 31, aus d. J. 1884. Göttingen 1884.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1884. Göttingen 1884.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 60, H. 2. Bd. 61, H. 1. Görlitz 1884. 85.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 30 (1884), H. 1—4 u. Supplementheft. Dresden 1885.

Jahrbuch des k. sächsischen meteorologischen Institutes. 1884, Jahrg. 2. Leipzig u. Chemnitz 1884.

Dekaden- u. Monatsbericht des k. sächsischen meteorologischen Institutes. 1884, Aug.—Dec. Nebst Beilage zu den Dekadenberichten 1884. Mit fünf Karten, für Jan.—April, Juli—Dec. Chemnitz 1884. 85.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 19, H. 4. Jahrg. 20, H. 1—3. Leipzig 1884. 85.

Kgl. Sächsisches Polytechnikum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr 1884/85, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1885. — Programm f. d. Studienjahr, bez. Wintersem. 1885/86.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1884—85. Dresden 1885.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Herausg. v. C. Bley. Jahrg. 1884, Juli—Dec. Dresden 1885.

Festschrift der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden z. Feier ihres 50jähr. Bestehens am 14. Mai 1885. Dresden 1885.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1880. 81. 82. 83. 84, I. II. 85. Freiberg 1880—85.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1884 — Juli 1885. Meissen 1885.

Internationale Zeitschrift f. allgemeine Sprachwissenschaft, hrsg. v. Techmer. Bd. 1, H. 1. 2. Bd. 2, H. 1. Leipzig 1884. 85.

Mittheilungen des Alterthumsvereins in Plauen i./V. Jahresschrift 1—3 (auf d. J. 1875—83). Fünfte Jahresschrift auf d. J. 1884—85. Hrsg. v. Joh. Müller. Plauen 1880—85.

Bericht über die im Jahr 1884 den Herzogl. Sammlungen zugegangenen Geschenke. Gotha 1885.

Zuwachs der Grossherzogl. Bibliothek zu Weimar in d. J. 1883 und 1884. Weimar 1885.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XVII, No. 18. 19. Jahrg. XVIII, No. 1—17. Berlin 1884. 85.

Die Fortschritte der Physik im J. 1878. Dargestellt von d. Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 34, Abth. 1—3. Berlin 1883. 84.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 4, Th. 1. Potsdam 1885.

Hauck, G., Die Grenzen zwischen Malerei und Plastik und die Gesetze des Reliefs. Rede gehalten am 21. März 1885. Berlin 1885.

Zweiundsechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1884. Breslau 1885.

Leopoldina. Amtl. Organ d. kais. Leopoldinisch-Carolinisch-deutschen Akad. der Naturforscher. H. XX, No. 21—24. XXI, No. 1—20. Halle 1885.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. 16, H. 3. Halle 1885.

Bericht über die Sitzungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle im J. 1884. Halle 1884.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 4. Folge, Bd. 3, 1884 (d. ganzen Reihe 57. Bd.), H. 5. 6. Bd. 4, 1885 (d. ganzen Reihe 58. Bd.), H. 1—4. Halle 1884. 85.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1884, H. 1—12. Berlin 1885. 86.

Verhandlungen des Vereins f. naturwissenschaftl. Unterhaltung zu Hamburg. Bd. 5. 1878—82. Hamburg 1883.

Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte u. Alterthumskunde. Bd. 4, H. 3. Lübeck 1884.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. 6, H. 2. Danzig 1885.

Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 25 (1884), Abth. 1. 2. Königsberg 1884. 85.

Zeitschrift der historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 1, H. 1. 2. Posen 1885.

13. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins für Wissenschaft u. Kunst für 1884. Münster 1885.

Jahrbücher des Nassauschen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 37. Wiesbaden 1884.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 16. Erlangen 1884.

Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1884 (Nebst Abhandlungen, Bd. 8, Bogen 1. 2). Nürnberg 1885.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Bd. 1, H. 1 (Jahrg. 1884). — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Bd. 1, H. 1 (Jahrg. 1884). — Katalog der im Germanischen Museum befindlichen Glasgemälde aus älterer Zeit. Nürnberg 1884.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1884. Würzburg 1884.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. 18. Würzburg 1884.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Hsg. v. d. Kgl. Statist.-topogr. Bureau. Jahrg. 7 (1884), H. 1—4. Stuttg. 1884. 85.

Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a/M. f. d. Rechnungsjahr 1883—84. Frankfurt a/M. 1885.

24. und 25. Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins für Naturkunde. Vereinsjahr 1882—84. Offenbach 1885.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 3, H. 4. Heidelberg 1885.

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Luzern d. 16.—18. Sept. 1884 (67. Jahresversammlung). Jahresbericht 1883/84. Luzern 1884.

Archives des sciences physiques et naturelles, Nov. Déc. 1884: Compte-rendu des travaux présentés à la 67. session de la Société Helvétique des sciences naturelles réunie à Lucerne les 16—18. Sept. 1884. Genève 1884.

Neue Denkschriften d. allgem. Schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Bd 29, Abth. 1. Basel 1884.

Beiträge zur vaterländ. Geschichte. Hrsg. v. d. Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 2 (der ganzen Reihe 12. Bd.), H. 1. Basel 1885.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. 7, H. 3. Basel 1885.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1884, H. 2. 3 (No. 1083—1102). 1885, H. 1 (No. 1103—18). Bern 1884. 85.

Vierzehnter Jahresbericht der historisch-antiquarischen Gesellschaft von Graubünden. Jahrg. 1884. Chur 1884.

Lemnius, Simon, Die Raeteis. Epos in 9 Gesängen. Unter Veranstaltung d. hist.-antiquar. Gesellschaft Graubündens hrsg. v. P. Plattner. Chur 1874.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrg. 27 (Vereinsjahr 1882/83). 28 (Vereinsjahr 1883/84). Chur 1884. 85.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 28, P. II. 29, P. I. Genève 1883—85.

Vierteljahrsschrift d. naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 26—29. Zürich 1881—84.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. III. Reeks, Deel 1. Amsterdam 1884. Afdeel. Natuurkunde. II. Reeks, Deel 19. 20. Amsterdam 1884. — Naam- en zaakregister op de Versl. en Meded., Afd. Natuurk., II. Ser., D. 1—20. Amsterdam 1884.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1883.

Processen-verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afdeel. Natuurkunde. Mei 1883—Maart 1884.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. disciplin. Neerlandica ex legato Hoeufftiano anno 1885 indicti.

Esseiva, Petr., Juditha. Praemio aureo orn. in certamine poet. Hoeufftiano. Acced. carmen laudatum. Amstelod. 1884.

Bijdragen tot de Dierkunde, uitg. door het Genootschap 'Natura artis magistra' te Amsterdam. Aflev. 11. 12. Amsterdam 1885.

Annales de l'École Polytechnique de Delft. Livr. 1. 2. Leide 1884. 85.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1884. Leiden 1884.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1884. Leiden 1884.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging. Ser. II. Deel 4, St. 4. Nijmegen 1885.

Programme de la Société de philosophie expérimentale de Rotterdam. 1884.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetenschappen, ter gelegenheid van de algem. vergaderingen gehouden d. 27. Juni 1882; d. 26. Juni 1883. Utrecht 1882. 83.

Verslag van het verhandelde in de algem. vergader. van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 27. Juni 1882, d. 26. Juni 1883, 24. Juni 1884. Utrecht 1882—84.

Israëls, A. H., en C. E. Daniëls, De verdiensten der Hollandsche geleerden ten opzichte van Harveys leer van den bloedsomloop. Met goud bekroond. Uitg. door het Provinc. Utrechtsche Genootschap v. kunsten en wetenschappen. Utrecht 1883.

Plaats, J. D. van der, De plaatsbepaling bij de aromatische lichamen. Prijsvraag uitgeschr. door het Prov. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wetenschappen. Mit goud bekroond. Utrecht 1883.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1885.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 8. Utrecht 1885.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. S. 38. 39. Utrecht 1884.

Onderzoekingen gedaan in het Physiolog. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. Uitgeg. door F. C. Donders en Th. W. Engelmann. Derde Reeks, IX. Utrecht 1884.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 19, Livr. 4. 5. T. 20, Livr. 1—3. Harlem 1884. 85.

Programma van de Hollandsche Maatschappij der Wetensch. te Haarlem voor het jaar 1885.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 2, P. 2. Harlem 1885.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden godsdienst, uitg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. N. S. Deel 11, St. 2. Haarlem 1885.

Recueil des mémoires et des travaux publiés par la Société Botanique du Grand-Duché de Luxembourg. No. 9. 10 (1883. 84). Luxemb. 1885.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 52 (1883), T. 6. Année 53 (1884), T. 7. 8. Bruxelles 1883. 84.

Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 45. Bruxelles 1884.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publ. p. l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 45. 46. Bruxelles 1883. 84.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. p. l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in - 8⁰. T. 36. Bruxelles 1884.

Annuaire de l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 50 (1884). 51 (1885). Bruxelles 1884. 85.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 28. 29, P. 1. Bruxelles 1884. 85.

Bullettino dell' Instituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1884, No. 12 (und Elenco de' participanti alla fine dell' anno 1884). 1885, No. 1—11. Roma 1885.

Atti della R. Accademia de' Lincei. Serie III. Memorie della Classe di scienze fisiche, matemat. e naturali. Vol. 14—17. Roma 1883. 84. — Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 8. 10. 11. Roma 1883. — Transunti Vol. 8, Fasc. 16. Roma 1884. — Serie IV. Rendiconti. Vol. 1, Fasc. 1—14. 16—19. 21—26. Roma 1884. 85.

Osservazioni meteorologiche fatte al R. Osservatorio del Campidoglio. Dal Luglio al Dicembre 1884. Estratto dagli Atti della R. Accad. dei Lincei. Roma 1885.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze mor. e polit. Vol. 15, Fasc. 2. Milano 1885.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 17. Milano 1884.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XX, Disp. 1—8. Torino 1885.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II, T. 36. Torino 1884.

L'Ottica di Claudio Tolomeo, da Eugenio ridotta in latino, ora per la prima volta pubbl. da Gilb. Govi. Torino 1885.

Programm für den fünften Bressa'schen Preis. Turin 1885.

Bollettino meteorologico ed astronomico dell' Osservatorio della R. Università di Torino. Anno 19 (1884). Parte meteorologica. Torino 1885.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. Chiappelli, Aless., Della interpretazione panteistica di Platone. Firenze 1881. — Sezione di medicina e chirurgia e Scuola di farmacia. Archivio della Scuola d'anatomia patologica, diretto da G. Pellizzari. Vol. 1. Firenze 1881. — Sezione di scienze fisiche e naturali. Rovighi, A., e G. Santini, Sulle convulsioni epilettiche per veleni. Firenze 1882.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie, Vol. 6, Fasc. 2. Pisa 1885.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 4, adunanza del 14. Dic. 1884, 22. Marzo, 28. Giugno 1885.

Decimo Anniversario della Società Toscana di scienze naturali e cinquantesimo d'insegnamento del prof. Gius. Meneghini, 14. Dec. 1884. Pisa 1885.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Della Serie Vol. 7 (Filos. e Filol., Vol. 4). Pisa 1884.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Ser. VI. T. 2, Disp. 3—10. T. 3, Disp. 1—9. Venezia 1883—85. — Temi di premio proposti nella solenne adunanza del 15. Agosto 1885.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. 22, P. 1. 2. Venezia 1884. 85.

Giornale di scienze naturali ed economiche, pubbl. p. cura della Società di scienze nat. ed econom. di Palermo. Vol. 16 (Anno 1883—84). Palermo 1884.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Marzo 1884—Marzo 1885. Palermo 1885.

Ἀναγραφὴ τῶν ἐπὶ τὸ ἀκαδ. ἔτος 1884/85 ἀρχῶν τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου. Ἀθήνησιν 1884.

Κυριακὸς, Π. Γ., Τὰ κατὰ τὴν τεσσαρακοστὴν τετάρτην πρυτανείαν τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου. Ἀθήνησιν 1884.

Κώστης, Κ. Ν., Περὶ ἀδικήματος καὶ ποινῆς ἐν τῇ ἀρχαίᾳ ἑλληνικῇ τραγῳδίᾳ, Ἀθήνησιν 1885.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1884. Vol. 175, P. 1. 2. London 1884. 85. — The R. Society, 1. Dec. 1884 (List of the members).

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXXVII, No. 232—34. Vol. XXXVIII, No. 235—38. Vol. XXXIX, No. 239. London 1884. 85.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. XI, P. 1 (No. 78). London 1885.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 48 (1884), P. 2. London 1885.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 15, No. 229—232. Vol. 16, No. 233—252. London 1884. 85. — List of members, 13th Nov. 1884. London 1884.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. Vol. 4, P. 5. Vol. 5, P. 1—6. London 1884. 85.

Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger, 1873—76. Narrative, Vol. 1, P. 1. 2. Zoology, Vol. 11—13. London 1884. 85.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 5, P. 1—4. Cambridge 1884. 85.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 14, P. 1. Cambridge 1885.

Records of the tercentenary festival of the University of Edinburgh celebrated April 1884. Edinburgh and London 1885.

Address to the students of the University of Edinburgh by Sir Alex. Grant, delivered on 28th Oct. 1884. Edinburgh and London 1884.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 4 (Session 1874—78) — 8, P. 2 (1884—85). Edinburgh 1878—85.

Transactions of the Edinburgh Geological Society. Vol. 4, P. 3. Vol. 5, P. 1. Edinburgh 1883. 85.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 4, P. 5. 6. Dublin 1884. 85.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Ser. II. Vol. 3, No. 4—6. Dublin 1884. 85.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 54. Paris 1884.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 12, No. 5. 6. T. 13, No. 1—5. Paris 1884. 85.

Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, publ. sous l'autorité du Comité international. T. 4. Paris 1885.

Revue internationale de l'électricité et de ses applications. Année I, No. 1. 2. Paris 1885.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. III. Série. T. 1. Paris 1884.

Mémoires de la Société Nationale des sciences naturelles de Cherbourg. T. 24 (III. Sér. T. 4). Paris, Cherbourg 1884. — Catalogue de la bibliothèque de la Soc. Nationale des sciences nat. de Cherbourg, réd. p. A. Le Jolis. 2. Partie, Livr. 3. Cherbourg 1883.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des lettres. T. 21. 22. Classe des sciences. T. 27. Paris, Lyon 1884. 85.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. T. 7, Fasc. 2 (Années 1883—84). — Mémoires de la section de médecine. T. 5, Fasc. 3 (Années 1880—84). — Mémoires de la section des sciences. T. 10, Fasc. 3 (Années 1883—84). Montpellier 1884.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg). Sér. II. T. 7, Fasc. 17. Année 17 (1884). Paris 1885.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1885. Madrid d. J.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Programa para los concursos ordinarios de 1886 y 1887.

Bru del Hierro, Carlos, Estudio sobre la proporción entre la gravedad de los delitos y de las penas. Memoria premiada con accéssit por la R. Academia de ciencias mor. y pol. Madrid 1885.

Anales del Instituto y Observatorio de marina de San Fernando, publ. p. C. Pujazon. Seccion 2. Observaciones meteorológicas. Año 1883. 84. San Fernando 1884. 85.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, p. p. G. Texeira. Vol. 6, No. 1. Coimbra 1885.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1884, No. 3. 1885, No. 1. 2.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturvid. og mathemat. Afd. 6. Række. Bd. 1, No. 11. Bd. 2, No. 7. Bd. 3, No. 1. 3. Kjøbenhavn 1885.

Regesta diplomatica historiae Danicae, cura Soc. Reg. scient. Danicae. Ser. II. T. 1, Fasc. 4. Kjøbenhavn 1885.

Libri memoriales Capituli Lundensis. Paa ny udg. ved C. Weeke. Hefte 1. Kjøbenhavn 1884.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Handlingar. Del 28 (N. F. Del 8), I. Del 30 (N. F. Del 10). Stockholm 1885.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Årg. 13 (1884). Stockholm 1884—85.

Antiquarisk Tidskrift för Sverige, utg. of Kongl. Vitterhets, Historie och Antiquitets Akademien genom Bror Emil Hildebrand. Delen 7, H. 4. Stockholm 1884—85.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af Jac. Spångberg. Årg. 5 (1884), H. 3. 4. Stockholm d. J.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 19 (1882—83), I—IV. T. 20 (1883—84), I—IV. Lund. d. J.

Lunds Universitets-Biblioteks Accessions-Katalog. 1883. 1884. Lund 1884. 85.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. XII, Fasc. 2. Upsaliae 1885.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 16 (1884). Upsal 1884—85.

Brito Capello, J. C. de, et H. Hildebrand Hildebrandsson, Rapport au Comité météorologique international. Upsala 1885.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1884 u. 1884, No. 1—16. 1885 No. 1. 3. 5—8. 10. Christiania 1884. 85.

Vandstandsobservationer. Udg. af den Norske Gradmaalingskommission. Hefte 3. Christiania 1885.

Publication d. Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung. Geodätische Arbeiten, H. 4. Christiania 1885.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. XII. Zoologi. Danielssen, D. C., og Joh. Koren, Pennatulida. XIII. Zoologi. Hansen, G. Armauer, Spongiadae. XIV. Zoologi. Sars, G. O., Crustacea I^A. I^B. Christiania 1884. 85.

Tromsø Museums Aarshefter. 5—8. Tromsø 1882—85. — Tromsø Museums Aarsberetning for 1882. 83. 84. Tromsø 1883—85.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 32, No. 13—18. T. 33, No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1884. 85.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXIX, No. 4. T. XXX, No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1884. 85.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1883, Th. 1. 2. St. Petersburg 1884.

Zapiski Istoriko-philologičeskago Fakulteta Imp. S.-Peterburgskago Universiteta. Čast 1—4. 5, 1. 2. 6. 7, 1. 2. 8—10. 12—14. St. Petersburg 1876—84.

Ljapunov, A., Ob ustojčivosti ellipsoidalnych form ravnověsija vraščajuščejsja židkosti. St. Petersburg 1884.

Salemann, C., Über eine Parsenhandschrift der kais. öffentl. Bibliothek zu St. Petersburg. St. Petersburg 1878.

Specimina linguae palaeoslovenicae. Edid. V. Jagić. Petropoli 1882.

Žukovski, V. A., Ali Auchadeddin Enveri. St. Petersburg 1883.

Trudy S.-Peterburgskago Obščestva Estestvoispytatelej. T. 12, 1. 2. 13, 1. 2. 14; 1. 2. 15, 1. St. Petersburg 1881—84.

Jahresbericht für 1882—83 und 1883—84 am 27. Mai 1884 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. Jahresbericht am 25. Mai 1885 dem Comité abgestattet. Aus d. Russ. übersetzt. S. Petersburg 1884. 85.

Struve, O., Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1885 ad 1889 computatae. Petropoli 1885.

Struve, O., Die Beschlüsse der Washingtoner Meridianconferenz. St. Petersburg 1885.

Prodolženie Svoda zakonov Rossijskoj Imperii. Po 30. Ijunja 1883 goda. Čast 1. S.-Petersburg o. J.

Sudebnye ustavy Imperatora Aleksandra II., izdannye po povelěniju Imp. Aleksandra Aleksandroviča. Izdanie 1883 goda. S.-Petersburg 1884.

Annales de l'Observatoire de Moscou, publ. p. Th. Bredichin. Vol. X, Livr. 2. Moscou 1884.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. 59 (Année 1884), No. 1—3. Moscou 1884.

Universitetskija Izvěstija. God 24 (1884), Nr. 1—12. 25 (1885), No. 1—9. Kiev 1884. 85.

Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Tifliser Physikalischen Observatorium, im J. 1882. 83. Hrsg. v. J. Mielberg. Tiflis 1885.

Magnetische Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1883. Hrsg. von J. Mielberg. Tiflis 1885.

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1883. 84. Hrsg. von J. Mielberg. Tiflis 1885.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 27. 28. Riga 1884. 85.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. T. 14. Helsingforsiae 1885.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XXVI (1883—84). Helsingfors 1884.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societ. Häftet 39—42. Helsingfors 1884. 85.

Krüger, A., Zonenbeobachtungen d. Sterne zwischen 55. u. 56. Grad nördl. Declin., angestellt an d. Sternwarten zu Helsingfors u. Gotha u. auf Kosten d. Kais. Alexanders-Universität herausgegeben. Bd. 2. Helsingfors 1885.

Finlands Geologiska Undersökning. Kartbladet 1—7. Beskrifning till Kartblad. 1—7. Helsingfors 1879—84.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XXI, No. 116. Vol. XXII, No. 117—119. Philadelphia 1885.

Register of papers published in the Transactions and Proceedings of the American Philosophical Society, by H. Phillips. Philadelphia 1884.

Proceedings of the American Oriental Society at Baltimore, Oct. 1884; at Boston, May 1885.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 11, No. 2. New Haven 1885.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 15 (1884). Cambridge, Mass. 1885.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. VII, No. 2—4. Vol. VIII, No. 1. Baltimore 1885.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. IV, No. 36—43. Vol. 5, No. 44. Baltimore 1885.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. III. Ser. 1—12. Baltimore 1885.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences. N. S. Vol. 10, P. 3. Vol. 11 (Centennial Volume), P. 2, N. 1. Cambridge 1885.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. S. Vol. XII (Whole Ser. Vol. XX). From May 1884 to May 1885. Selected from the Records. Boston 1885.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol. III, No. 8—10. Boston 1884.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XXII, P. 2 (Nov. 1882—Febr. 1883). 3 (March—Oct. 1883). Boston 1883. 84.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. VII (Geological Ser., Vol. 1), No. 2. 3. 5—8. 11. Vol. XI, No. 11. XII, No. 1. 2. Cambridge, Mass. 1881—85.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. X, No. 4. Vol. XI, No. 1. Vol. XIV, No. 1, P. 1. Cambridge, Mass. 1884. 85.

25th Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1884/85. Cambridge, Mass. 1885.

Proceedings of the Colorado Scientific Society. Vol. 1 (1883. 84). Denver o. J.

The geological and natural history Survey of Minnesota. Annual Report 1 (for the year 1872. 2th ed.). 7 (1878). 10 (1881)—12 (1883). Minneapolis 1879—84.

Report for the year 1883—84 presented by the board of managers of the Observatory in Yale College. (New Haven 1884.)

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. III, No. 3—6. New York 1883. 84.

Bulletin of the American Geographical Society. 1884, No. 3. 4. 1885, No. 1. New York 1884. 85.

Journal of the New York Microscopical Society. Vol. I, No. 2. New York 1885.

Second geological Survey of Pennsylvania. 64 Bde. Harrisburg 1875—85.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1884, P. 3 (Nov. Dec.). 1885, P. 1 (Jan.—March). 2 (April—July). Philadelphia 1884. 85.

Annual Reports of the Trustees of the Peabody Academy of sciences. 1874 to 1884. Salem 1885.

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 2. 1883. Washington 1884.

Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending Oct. 30, 1884. Washington 1884.

Astronomical and meteorological Observations made during the year 1880 at the U. S. Naval Observatory (Washington Astronomical and meteorological Observations Vol. 27). Washington 1884.

Report of the Commissioner of agriculture for the year 1884. Washington 1884.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey, showing the progress of the work during the fiscal year ending with June 1883. P. 1. 2. Washington 1884.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 2—6. Washington 1884.

Monographs of the U. S. Geological Survey. Vol. III—VIII. Washington 1882—84.

Third Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior 1881—82, by J. W. Powell. Washington 1883.

Professional Papers of the Signal Service, U. S. War Department. No. 13. 14. Washington 1884.

Annual Report of the Chief Signal-Officer to the Secretary of war for the year 1883. Washington 1884.

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. 24. 25. Washington 1885.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1883. Washington 1885.

Second Annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 1880—81. By J. W. Powell. Washington 1883.

The Canadian Record of science, including the Proceedings of the Natural history Society of Montreal and replacing the Canadian Naturalist. Vol. 1, No. 3. 4. Montreal 1885.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto, being a continuation of the Canadian Journal of science, literature and history. Vol. 2, Fasc. 2. 3. III. Ser. Vol. 3, Fasc. 1. 2. Toronto 1884. 85.

Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya, para el año 1886 (Año VI). México 1885.

Anales estadísticos de la Republica de Guatemala. Año de 1883. T. 2. Guatemala (1884).

Boletin de la R. Sociedad Económica de amigos del pais. Revista Filipina de ciencias y artes. Año 3 (1884), No. 5—12. Año 4 (1885), No. 1—3. Manila d. J.

Netto, Ladisl., Conférence faite au Muséum National en présence de LL. MM. Impériales le 4. Nov. 1884. Rio de Janeiro 1885.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. VI, Entrega 4. T. VII, Entrega 1—4. T. VIII, Entrega 1. Córdoba 1884. 85.

Nevill, G., Hand List of Mollusca in the Indian Museum, Calcutta. P. II. Gastropoda. Prosobranchia-Neurobranchia (continued). Calcutta 1884.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 45, Afl. 1. 's Gravenhage 1885.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 22 (1884), No. 2—4. Deel 23 (1885), No. 1. Batavia 1884. 85.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 29, Afl. 5. 6. Deel 30, Afl. 3. 4. Batavia 1884. 85.

Realia. Register op de generale resolutiën van het Kasteel Batavia 1632—1805. Uitgeg. d. het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 2. 's Hage, Batavia 1885.

Haga, A., Nederlandsch Nieuw Guinea en de Papoesche Eilanden. Historische Bijdrage. 1500—1883. Uitgeg. d. het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 1. 2. Batavia, 's Hage 1884.

Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811, door I. H. van der Chijs. Uitgeg. d. het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 1. Batavia, 's Hage 1885.

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 6, P. 1. Batavia 1885.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgeg. d. de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 44 (VIII. Ser., D. 5). Batavia 1885.

Catalogus der Bibliotheek van de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Batavia 1884.

Verbeek, R. D. M., Krakatau. P. I. Batavia 1885.

Transactions and Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. 20. 21. Melbourne 1884. 85.

2. Einzelne Schriften.

Ashburner, Ch. A., Brief description of the anthracit coal fields of Pennsylvania. (Reprinted from the Proceed. of the Engineers Club of Philadelphia.) Philadelphia 1884.

Autolyci de sphaera quae movetur liber, de ortibus et occasibus libri II. Edid. F. Hultsch. Lipsiae 1885.

Fiedler, Wilh., Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3. Aufl. Th. 1. 2. Leipzig 1888. 85.

Ders., Geometrische Mittheilungen. VI—IX (Sep.-A. a. d. Vierteljahrsschrift d. Zürich. Naturf.-Gesellsch. Jahrg. 1884).

Ders., Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen (Sep.-A. aus Acta mathem., V. Stockholm 1884).

(Flatau, J. J.), Geschichte des Hopfenbaues u. Hopfenhandels in Neutomischl bis z. J. 1859. 2. Aufl. Berlin 1883.

Fleischer, H. L., Kleinere Schriften. Gesammelt, durchgesehen und vermehrt. Bd. I, Th. 1. 2. Leipzig 1885.

Hegewald, Notice sur l'étude raisonnée du chinois (Extrait du mémoire de l'auteur). o. O. u. J.

Ders., Vor dritthalbtausend Jahren. Des Assessors Ani Bewerbung um die Hand von Anta. Nach ägypt. Quellen bearb. Meiningen 1885.

Hennig, Über Rassenbecken (Sep.-A.). 1885.

Hirth, F., China and the Roman Orient. Researches intho their ancient and mediaeval relations as represented in old Chinese records. Leipsic and Munich 1885.

Humbert, Geo., Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris. Paris 1885.

Kluk-Kluczycki, V. P., Umsturz irrthümlicher Schullehren. I. Krakau 1885.

Lewis, H. Carvill, Marginal Kames (Reprinted from the Proceed. of the Acad. of nat. sciences of Philadelphia, 1885).

Ders., A great trap dyke across Southeastern Pennsylvania (Read before the American Philosophical Soc., 1885).

Loomis, E., Contributions to meteorology. Revised edition. New Haven 1885.

Lukaševič, Pl., Korneslov grečeskago jazyka. T. 1. 2. Kiev 1869. 72.

Ders., Korneslov latinskago jazyka. Kiev 1872.

Ders., Korneslov evrejskago jazyka. Kiev 1883.

Ders., Izloženie glavnych zakonov estestvennoj i nabljudatelno-mikroskopičeskoj astronomii a takže astronomičeskoj meteorologii. T. 1. Kiev 1884.

Lukaševič, Pl., Izlědovanie o velikom godě solnca i o ego čislovidnom god. Kiev 1882.

Ders., Mnimy indo-germanskij mir. Kiev 1873.

Ders., Objasnenie assirijskich imen. Kiev 1868.

Ders., Pričina nenavisti angličan k slavjanskim narodam. Kiev 1877.

Maasburg, M. Frdr. v., Die Galeerenstrafe in den deutschen u. böhmischen Erbländern Oesterreichs. Wien 1885.

Ders., Die Organisirung der böhmischen Halsgerichte i. J. 1765. Prag 1884.

Pirmez, Oct., Jours de solitude. Édition posthume. Paris 1883.

Roselli, Ercole, Armonia assoluta e naturale delle scienze filosofiche e sociali. Ancona 1885.

Ders., Logica e critica sull' origine delle umane cognizioni. Ancona 1879.

Salmon, George, Lessons introductory to the modern higher Algebra. 4th ed. Dublin 1885.

Schaffranek, A., The Flora of Palatka and vicinity (The Palatka Daily News, 1885).

Schoebel, Ch., Mémoires sur les origines de l'écriture alphabétique. o. O. u. J.

Topley, William, The national geological Surveys of Europe (Reprinted, with an appendix, from the Report of the British Association for 1884). London 1885.

Veyder Malberg, Arthur Frhr. v., Über die Einheit aller Kraft. Wien 1884.

Weihrauch, K., Anemometrische Scalen für Dorpat. Ein Beitrag zur Klimatologie Dorpats (Sep.-A.). Dorpat 1885.

Willems, P., Le sénat de la république romaine. Appendices du T. I et Registres. Louvain 1885.

Wroblewski, Sigism. de, Comment l'air a été liquéfié. Réponse à l'article de M. J. Jamin. Paris 1885.

Ders., Sur les phénomènes que présentent les gaz permanents évaporés dans le vide. o. O. u. J.

SEP 14 1885

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1885.

I. II.

MIT 2 TAFELN UND 15 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1885.

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber*.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Friedrich Zarncke* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.
- Professor *Adolf Ebert* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- Geheimer Hofrath *Georg Curtius* in Leipzig.
- Professor *Georg Ebers* in Leipzig.
- —— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
- Geheimer Hofrath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig.
- Professor *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Herr Geheimer Hofrath und Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Ludwig Lange* in Leipzig.
- Professor *August Leskien* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- —— —— *Otto Ribbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Anton Springer* in Leipzig.
- —— —— *Johann Ernst Otto Stobbe* in Leipzig.
- Professor *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.
- —— *Ernst Windisch* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
- —— *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Carl Ludwig* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Christian Wilhelm Braune* in Leipzig.
- Professor *Heinrich Bruns* in Leipzig.

[- —— *Julius Cohnheim* in Leipzig, gewählt am 4. August 1884, gest. am 15. August].

Herr Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
- Professor *Wilhelm His* in Leipzig.
- —— *Felix Klein* in Leipzig.
- —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- Professor *Carl Neumann* in Leipzig.
- —— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Leipzig.
- —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- —— —— *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- —— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
- Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
- Professor *Adalbert Krüger* in Kiel.
- Regierungsrath *Samuel Friedrich Nathanael v. Stein* in Prag.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Archivar:

Herr Oberbibliothekar *Joseph Heinrich Gustav Ernst Förstemann* in Leipzig.

Leipzig, am 31. December 1884.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1884 eingegangenen Schriften.

Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1883. Berlin 1884.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1883, No. 38—53. 1884, No. 1—39. Berlin 1883. 84.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 11. 12. Berlin 1883. 84.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 45—47. Wien 1883.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 33. 34. Wien 1883. 84.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 86 (1882), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 2—5. Abth. III, Heft 3—5. Bd. 87 (1883), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 88 (1883), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 89 (1884), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1. 2. Wien 1883. 84.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 101 (1882), Heft 2. Bd. 102 (1882), Heft 1. 2. Bd. 103 (1883), Heft 1. 2. Bd. 104 (1883), Heft 1. 2. Bd. 105 (1883), Heft 1—3. Bd. 106 (1884), Heft 1. 2. Register X, zu Bd. 91—100. Wien 1882—84.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 20 (1883, No. 26—28. Jahrg. 21 (1884), No. 1—27.

Almanach d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. Jahrg. 33 (1883). 34 (1884). Wien 1883. 84.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. v. der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 64, 2. Hälfte. Bd. 65, 1. u. 2. Hälfte. Wien 1882—84.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreich. Geschichtsquellen, herausg. von der histor. Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Abth. II. Diplomata et Acta. Bd. 43. Wien 1883.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1884, No. 1—12.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1883. Bd. 33, No. 4. 1884. Bd. 34, No. 1—3. Wien 1884.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1883. Bd. 26 (N. F. Bd. 16). Wien 1883.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1883 (Bd. 33). Wien 1884.

Pelzeln, Aug. v., Brasilische Säugethiere. Resultate von Joh. Natterer's Reisen 1817—35. Beiheft zu den Verhandl. d. k. k. zoologisch-botan. Gesellschaft. Wien 1883.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1883. Jahrg. 44. Hrsg. von C. Hornstein. Prag 1884.

Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft, im Auftrag des Vereines »Lotos« hrsg. N. F. Bd. 5 (der ganzen Reihe 33. Bd.). Prag 1884.

Ordnung der Vorlesungen an der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität zu Prag im Wintersem. 1884/85.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1884—85.

21. Jahresbericht des Vereins f. Geschichte der Deutschen in Böhmen. Für d. Vereinsjahr 1882—83. Prag 1883.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 22, No. 1—4. Prag 1883. 84.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. Heft 32. Graz 1884.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Herausgeg. vom histor. Vereine für Steiermark. Jahrg. 20. Graz 1884.

Berichte d. naturwiss.-medizin. Vereines in Innsbruck. Jahrg. 12 (1881/82). 13 (1882/83). Innsbruck 1882. 83.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. Heft 26. 27. Innsbruck 1882. 83.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. Godina VI, Br. 1. 3. 4. U Zagrebu 1884.

Personalstand u. Ordnung d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1884. — Personalstand im Winter-Sem. 1884/85. — Verzeichniss d. Vorlesungen im Winter-Sem. 1884/85.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 14 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 50. Bd.), Abth. 3. München 1883.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1883, H. 3. Jahrg. 1884, H. 1—3. München 1884.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1883, H. 4. Jahrg. 1884, H. 1. 3. 4. München 1884.

Radlkofer, Ldw., Ueber d. Methoden in d. botanischen Systematik. Festrede z. Vorfeier des Allerh. Geburts- u. Namensfestes S. M. Ludwigs II. Königs von Bayern gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Ak. d. Wiss. am 25. Juli 1883. München 1883.

Kupffer, Carl, Gedächtnissrede auf Theod. L. W. v. Bischoff, gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wiss. zur Feier ihres 125. Stiftungstages am 28. März 1884. München 1884.

Haushofer, K., Franz v. Kobell. Eine Denkschrift. München 1884.

Monumenta Tridentina. Beiträge z. Geschichte des Concils von Trient, von Aug. v. Druffel. H. 1. (Jan.—Mai 1545). München 1884.

Fünfundzwanzigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1884.

Almanach der k. bayer. Akad. d. Wissensch. f. d. Jahr 1884. München 1884.

Annalen der k. Sternwarte bei München. Suppl.-Bd. 10. 14. München 1871. 84.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 30, aus d. J. 1883. Göttingen 1883.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1883. Göttingen 1883.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 59, H. 2. Bd. 60, H. 1. Görlitz 1883. 84.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 29 (1883), H. 3. 4. Dresden 1884.

Jahrbuch des k. sächsischen meteorologischen Institutes. 1883, Lief. 2. 3. Chemnitz 1884.

Dekadenbericht des k. sächsischen meteorologischen Institutes. 1883, No. 32—35 (mit 3 Niederschlagskarten f. 1883, Oct. Nov. Dec.). 1884, No. 1—12 (mit Beil. 1—6). Dekaden- u. Monatsbericht von 1884, Mai, Juni, Juli. Chemnitz d. J.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 18, H. 4. Jahrg. 19, H. 1—3. Leipzig 1883. 84.

Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Jahrg. 10 (1883). Leipzig 1884.

Kgl. Sächsisches Polytechnikum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr 1883/84, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1884.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1883—84. Dresden 1884.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Herausg. v. C. Bley. Jahrg. 1883, Juli—Dec. Jahrg. 1884, Jan.—Juni. Dresden 1884.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1883 — Juli 1884. Meissen 1884.

Programm der Realschule I. Ordn. zu Leipzig f. d. Schuljahr Ost. 1883—Ost. 1884. Mit Beigabe: Leibnitii Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus etc. Ex Actis eruditorum Lips. anni 1684 ed. F. Giesel (Festschrift z. 50jähr. Gedenkfeier der Eröffnung d. städt. Realschule). Leipzig 1884.

Internationale Zeitschrift f. allgemeine Sprachwissenschaft, hrsg. v. Techmer. Bd. 1, H. 1. Leipzig 1884.

Mittheilungen des Alterthumsvereins in Plauen i./V. Vierte Jahresschrift auf d. J. 1883—84. Hsg. v. Joh. Müller. Plauen 1884.

Bericht über die im Jahr 1883 den Herzogl. Sammlungen zugegangenen Geschenke. Gotha 1884.

Pertsch, Wilh., Die arabischen Handschriften der Herzogl. Bibliothek zu Gotha. Auf Befehl S. H. des Herzogs Ernst II. von Sachsen-Coburg-Gotha verzeichnet. Bd. 3, H. 1. Gotha 1880.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XVI, No. 18. 19. Jahrg. XVII, No. 1—17. Berlin 1883. 84.

Die Fortschritte der Physik im J. 1880. Dargestellt von d. Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 36, Abth. 1—3. Berlin 1882. 83.

Weil, Rud., Die Künstlerinschriften der Sicilischen Münzen. 44. Programm zum Winckelmannsfeste der Archaeologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1884.

Festschrift d. K. Technischen Hochschule zu Berlin zur Feier d. Einweihung ihres neuen Gebäudes am 2. Nov. 1884. Berlin 1884.

Einundfünfzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1873. Breslau 1874. — Einundsechzigster Jahresbericht, enth. d. Generalbericht f. 1883. Breslau 1884.

Nova Acta Academiae Carolinae Leopoldinae Caesareae German. naturae curiosorum. T. 45. 46. Halis 1884.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais. Leopoldinisch-Carolinisch-deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XIX, No. 21—24. Heft XX, No. 1—20. Halle 1884.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. 16, H. 2. Halle 1884.

Bericht über die Sitzungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle im J. 1883. Halle 1884.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 4. Folge, Bd. 2, 1883 (d. ganzen Reihe 56. Bd.), H. 5. 6. Bd. 3, 1884 (d. ganzen Reihe 57. Bd.), H. 1—4. Halle 1883. 84.

Chronik der Universität zu Kiel 1883. Kiel 1884; Verzeichniss d. Vorles. Winter 1883/84, Sommer 1884; Personalverz. Sommer 1883, Wint. 1883/84. Förster, R., De translat. lat. Physiognomicorum quae feruntur Aristot. Ders., Die Physiognomik der Griechen. Ladenburg, A., Die kosmischen Consequenzen der Spectralanalyse. Nitzsch, Frdr., Luther u. Aristoteles. Möller, W., Rede am Luther-Jubiläum 1883. — 33 Inaug.-Dissertationen.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1882, H. 10—12. Jahrg. 1883, H. 1—9. Berlin 1883. 84.

Vierter Bericht der Commission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel, für die Jahre 1877—81. Jahrg. VII—XI. Abth. 3. Berlin 1884.

Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 24 (1883), Abth. 1. 2. Königsberg 1883. 84.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 76. 77. Bonn 1882. 83.

12. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins für Wissenschaft u. Kunst pro 1883. Münster 1884.

Jahrbücher des Nassauschen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 36. Wiesbaden 1883.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 15. Erlangen 1883.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums. N. F. Jahrg. 30. Nürnberg 1883. — 29. Jahresbericht des Germanischen Nationalmuseums.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1883. Würzburg 1883.

40.—42. Jahresbericht der Pollichia, eines naturwiss. Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim 1884.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Herausg. von d. Kgl. Statist.-topogr. Bureau. Jahrg. 6 (1883), H. 1—4. Stuttgart 1883. 84.

Münster-Blätter. Im Auftrag des Münster-Komites hrsg. v. A. Beyer u. F. Pressel. H. 3. 4. Ulm 1883.

23. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1884.

Veröffentlichungen der Grossherz. Sternwarte zu Karlsruhe. Hrsg. v. W. Valentiner. H. 1. Beobachtungen am Meridiankreis. Karlsruhe 1884.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 3, H. 3. Heidelberg 1884.

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Zürich d. 7—9. Aug. 1883 (66. Jahresversammlung). Jahresbericht 1882/83. Zürich 1883.

Archives des sciences physiques et naturelles, Oct. Nov. 1883: Compte-rendu des travaux présentés à la 66. session de la Société Helvétique des sciences naturelles réunie à Zürich les 7—9. août 1883. Genève 1883.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. 7, H. 2. M. Anhang: Die Basler Mathematiker Dan. Bernouilli u. Leonh. Euler. Basel 1884.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1883, H. 2 (No. 1064—72). 1884, H. 1 (No. 1073—82). Bern 1884.

Dreizehnter Jahresbericht der historisch-antiquarischen Gesellschaft von Graubünden. Jahrg. 1883. Chur 1883.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. Deel XIV. Amsterdam 1883. — Afdeel. Natuurkunde. Deel XXIII. Amsterdam 1883.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks, Deel 12. Amsterdam 1883. Afdeel. Natuurkunde. II. Reeks, Deel 18. Amsterdam 1883. — Naam- en zaakregister op de Versl. en Meded., Afd. Letterk., II. Ser., D. 1—12. Amsterdam 1883.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1882.

Processen-verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afdeel. Natuurkunde. Mei 1882—April 1883.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. disciplin. Neerlandica ex legato Hoeufftiano anno 1884 indicti.

Bijdragen tot de Dierkunde, uitg. door het Genootschap 'Natura artis magistra' te Amsterdam. Aflev. 10. Amsterdam 1884.

Nederlandsch Tijdschrift voor de Dierkunde, uitg. door het Kon. Zoolog. Genootschap 'Natura artis magistra'. Jaarg. 5, Afl. 1. Amsterdam 1884.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1883. Leiden 1883.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1883. Leiden 1883.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging. Ser. II. Deel 4, St. 2. Nijmegen 1884.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1884.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 7. Utrecht 1884.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. S. 36. 37. Utrecht 1883.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 18, Livr. 2—5. T. 19, Livr. 1—3. Harlem 1883. 84.

Programma van de Hollandsche Maatschappij der Wetensch. te Haarlem voor het jaar 1882. 1883. — Naamlijst van directeuren en leden, 21. mei 1883.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 1, P. 4. Vol. 2, P. 1. Harlem 1883. 84.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden godsdienst, uitg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. N. S. Deel 11, St. 1. Haarlem 1883.

Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. 19. Luxembourg 1883.

Annales de l'Observatoire R. de Bruxelles. N. S. Annales astronomiques. T. 5, Fasc. 2. Bruxelles 1884.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 27. Bruxelles 1883.

Bulletin ou Comptes-rendus des séances de la Société entomologique de Belgique. Année 1883 (Comptes-rendus, Sér. III, No. 28—40). Bruxelles 1883.

Bullettino dell' Instituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1883, No. 12 (und Elenco de' participanti alla fine dell' anno 1883). 1884, No. 1—11. Roma 1884.

Atti della R. Accademia de' Lincei. Transunti. Ser. III. Vol. 7, Fasc. 16. Vol. 8, Fasc. 1—15. Roma 1883. 84.

Atti parlamentari. Camera dei Deputati. Tornata del 15. Marzo 1884 (Commemorazione del deputato Quintino Sella). Roma d. J.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matem. e naturali. Vol. 15 (Ser. III, Vol. 6), Fasc. 1—3. Milano 1883. 84. — Classe di lettere e scienze mor. e polit. Vol. 14 (Ser. III, Vol. 5), Fasc. 3. Vol. 15, Fasc. 1. 2. Vol. 16, Fasc. 1. 2. Milano 1882—84.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 15. 16. Milano 1882. 83.

Atti della Fondazione scientifica Cagnola dalla sua instituzione in poi. Vol. 7 (1879—81). Milano 1882.

Atti della R. Accadėmia delle scienze di Torino. Vol. XIX, Disp. 1—7. Torino 1884.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II, T. 35. Torino 1884.

Il primo Secolo della R. Accademia della scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783—1883). Torino 1883.

Bollettino meteorologico ed astronomico dell' Osservatorio della R. Università di Torino. Anno 18 (1883). Parte meteorologica. Torino 1884.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 4, adunanza del 11. Nov. 1883, 13. Genn., 4. Maggio, 6. Luglio 1884.

Studi Senesi nel Circolo giuridico della R. Università. Diretti da E. Ferri. Vol. I, Fasc. 1. Siena 1884.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Ser. VI. T. 1, Disp. 4—10. T. 2, Disp. 1. 2. Venezia 1882—84. — Temi di premio proposti nella solenne adunanza del 15. Agosto 1884.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. II. Vol. 2. Modena 1884.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1882. Vol. 174, P. 2. 3. London 1883. 84. — The R. Society, 30th Nov. 1883 (List of the members).

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXXV, No. 227. Vol. XXXVI, No. 228—31. London 1883.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. X, P. 2. 3 (No. 76. 77). London 1883. 84.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 47 (1882/83). 48 (1884), P. 1. London 1883. 84.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 14, No. 209—214. Vol. 15, No. 215—228. London 1883. 84.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. Vol. 4, P. 1—4. 6. London 1884. — R. Microscopical Society. List of fellows. 1884.

Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger, 1873—76. Narrative, Vol. 2. Zoology, Vol. 1—10. Physics and chemistry, Vol. 1. London 1880—84.

Catalogue of Oriental coins in the British Museum. Vol. 8. London 1883.

Catalogue of the Greek coins in the British Museum. Central Greece (Locris, Phocis, Boeotia and Euboea). By Barclay V. Head. Ed. by R. St. Poole. London 1884.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 4, P. 6. Cambridge 1883.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 13, P. 3. Cambridge 1883.

Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester. III. Ser. Vol. 7. London 1882. Vol. 9 (R. A. Smith, A centenary of science in Manchester. For the 100th year of the Lit. and Philos. Soc. of Manchester 1881). London 1883.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 20 (Sess. 1880/81). 21 (Sess. 1881/82). 22 (Sess. 1882/83). Manchester 1881—83.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 3, P. 6. 7. Vol. 4, P. 1—4. Dublin 1882—84.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Ser. II. Vol. 1, No. 20—25. Vol. 3, No. 1—3. Dublin 1882—84.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 53. Paris 1883.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 11, No. 5. T. 12, No. 1—4. Paris 1883. 84.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1883. Paris 1884.

Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, publ. sous l'autorité du Comité international. T. 2. 3. Paris 1883. 84.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. II. Série. T. 5, Cah. 3. Paris 1883. — Appendice au T. 5 (Rayet, Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le dép. de la Gironde de juin 1882 à mai 1883). Bordeaux 1883.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des sciences. T. 26. Paris, Lyon 1883—84.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg). Sér. II. T. 6, Fasc. 15. 16. Année 16 (1883). Paris 1883. 84.

Bulletin de correspondance africaine. 1884, Fasc. 1. École supérieure des lettres d'Alger. Alger 1884.

Discursos de recepcion y de contestacion leidos ante la R. Academia de ciencias morales y políticas. T. 2 (1875—81). 3 (1881—83). Madrid 1884.

Memorias de la R. Academia de ciencias morales y políticas. T. 4. 5. Madrid 1883. 84.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1884. Madrid d. J.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Resúmen de sus actas y discurso leidos en la junta publ. 23. dic. 1883. Madrid 1883.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1883, No. 3. 1884, No. 1. 2.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Hist. og philos. Afd. 5. Række. Bd. 5, No. 3. Kjøbenhavn 1884. — Naturvid. og mathemat. Afd. 6. Række. Bd. 1, No. 9. 10. Bd. 2, No. 6. Kjøbenhavn 1884.

Regesta diplomatica historiae Danicae, cura Soc. Reg. scient. Danicae. Ser. II. T. 1, Fasc. 3. Kjøbenhavn 1883.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 18 (1880). 19 (1881), H. 1. 2. Stockholm 1881 ff.

Bihang till Kong. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 6, H. 1. 2. 7, 1. 2. 8, 1. 2. Stockholm 1880—83.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årg. 38 (1881). 39. 40. Stockholm 1882 ff.

Lefnadsteckningar öfver Kongl. Svenska Vetenskaps Akademiens efter år 1854 aflidna Ledamöter. Bd. 2, H. 2. Stockholm 1883.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Maj 1880. 82. 83. 84.

Fries, El., Icones selectae Hymenomycetum nondum delineatorum. Vol. II, Fasc. 7—10. Sub auspiciis Reg. Acad. scient. Holmiensis. Holmiae et Upsaliae 1884.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Handlingar. Del 29 (N. F. Del 9). Stockholm 1884.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Årg. 11 (1882). 12 (1883). Stockh. 1883—84.

Antiquarisk Tidskrift för Sverige, utg. of Kongl. Vitterhets, Historie och Antiquitets Akademien genom Bror Emil Hildebrand. Delen 8, H. 1. 2. Stockholm 1884.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 20. 21 (II. Ser. Bd. 6. 7). 1878. 79. Stockholm 1882. 83.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar, anstälda på Stockholms Observatorium. Utg. af H. Gyldén. Bd. 2, H. 1. 3. Stockh. 1883. 84.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af Jac. Spångberg. Årg. 4 (1883), H. 1—4. Årg. 5 (1884), H. 1. 2. Stockholm d. J.

Hildebrand, Bror Emil, och Hans Hildebrand, Teckningar ur Svenska Statens Historiska Museum. Häft. 3 (Ser. V, Planch. 1—5). Stockholm 1883.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. XII, Fasc. 1. Upsaliae 1884.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 15 (1883). Upsal 1883—84.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1880. 81. 82. Christiania 1881—83.

Norske Rigsregistranter tildeels i uddrag. Bd. 8, H. 1 (1641—44). Udg. ved O. G. Lundh. Christiania 1882.

Det Kong. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for aaret 1880. 81. 82. Christiania 1881—83.

Brøgger, W. C., Die silurischen Etagen II u. III im Kristianiagebiet u. auf Eker (Univ.-Progr. f. d. 2. Sem. 1882). Kristiania 1882.

Reusch, Hans H., Silurfossiler og pressede Konglomerater i Bergensskifrene (Univ.-Progr. f. 1. Halvaar 1883). Kristiania 1882.

Laache, S., Die Anämie (Univ.-Progr. f. d. 2. Sem. 1883). Christiania 1883.

Caspari, C. P., Kirchenhistor. Anecdota nebst neuen Ausgaben patrist. u. kirchlich-mittelalterl. Schriften. I. Lat. Schriften (Univ.-Progr. z. 4. Säcularfeier d. Geburt Luthers). Christiania 1883.

Fortegnelse over den tilvæxt, som det K. Frederiks Universitets Bibliothek har erholdt i aarene 1880—81. Christiania 1883.

Beretning om Bodsfængslets Virksombed i 1. Halvaar 1880; i Tidsrummet fra 1. Juli 1880 — 30. Juni 1881; fra 1. Juli 1881 — 30. Juni 1882. Christiania 1881—83.

Vandstandsobservationer. Udg. af den Norske Gradmaalingskommission. Hefte 2. Christiania 1883.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. XI. Zoologi. Danielssen, D. C., og Joh. Koren, Asteroidea. Christiania 1884.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Udg. ved Th. Kjerulf, D. C. Danielssen etc. Bd. 26 (II. R., Bd. 6), H. 2—4. Bd. 27, 1—4. Bd. 28, 1. Christiania 1881—83.

Bergens Museum. Koren, Joh., og D. C. Danielssen, Nye Alcyonider, Gorgonider og Pennatulider tilhørende Norges Fauna. Bergen 1883.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 31, No. 9—16. T. 32, No. 1—12. St.-Pétersbourg 1883. 84.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXIX, No. 1—3. St.-Pétersbourg 1883. 84.

Tolstoi, Graf D. A., Ein Blick auf das Unterrichtswesen Russlands im XVIII. Jahrh. bis 1782. A. d. Russ. übers. v. P. v. Kügelgen. St. Petersburg 1884.

Repertorium für Meteorologie, hsg. v. d. Kais. Akademie d. Wissensch., redig. v. H. Wild. Bd. 8. St. Petersburg 1883.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1882, Th. 1. 2. St. Petersburg 1883.

Compte-rendu de la Commission Impér. Archéologique pour l'année 1881. Avec un atlas. St.-Pétersbourg 1883.

Annales de l'Observatoire de Moscou, publ. p. Th. Bredichin. Vol. X, Livr. 1. Moscou 1884.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. 58 (Année 1883), No. 2—4. Moscou 1883. 84.

Meteorologische Beobachtungen ausgeführt am Meteorol. Observatorium d. Landwirthschaftlichen Academie zu Moskau von B. E. Bachmetieff. 1883, 1. Hälfte (Beilage z. Bulletin de la Soc. Imp. des Natural. de Moscou, T. 59). 1883, 2. Hälfte (Beilage z. Bulletin, T. 60.) Moscou 1883. 84.

Nouveaux Mémoires de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. XV (= T. XXI de la collection), Livr. 1. Moscou 1884.

Magnetische Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. d. J. 1881—82. Hrsg. von J. Mielberg. Tiflis 1883.

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1882. Hrsg. von J. Mielberg. Tiflis 1883.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat i. J. 1877 (Jahrg. 12). Bd. III, H. 2. In d. Jahren 1878. 79. 80 (Jahrg. 13—15). Bd. III, H. 3—5. Red. u. bearb. v. K. Weihrauch. Dorpat 1884.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 26. Riga 1883.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. T. 13. Helsingforsiae 1884.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XXV (1882—83). Helsingfors 1883.

Krüger, A., Zonenbeobachtungen d. Sterne zwischen 55. u. 56. Grad nördl. Declin., angestellt an d. Sternwarten zu Helsingfors u. Gotha u. auf Kosten d. Kais. Alexanders-Universität herausgegeben. Bd. 1. Helsingfors 1883.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XX, No. 113. Vol. XXI, No. 114. 115. Philadelphia 1883. 84.

Transactions of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. N. S. Vol. XVI, P. 1, Article 1. Philadelphia 1883.

Proceedings of the American Oriental Society at Boston, May 1884.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 14 (1883). Cambridge, Mass. 1884.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. VI, No. 3. 4. Vol. VII, No. 1. Baltimore 1884.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. III, No. 28—32. Baltimore 1884.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. S. Vol. X (Whole Ser. Vol. XVIII). From May 1882 to May 1883. Vol. XI, P. 1. 2. Selected from the Records. Boston 1883. 84.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol. III, No. 6. 7. Boston 1883.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XXI, P. 4 (Jan. —Apr. 1882). Vol. XXII, P. 1 (May—Nov. 1882). Boston 1883.

Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. IV, No. 4. Buffalo 1883.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. XI, No. 5—9. Cambridge, Mass. 1883.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. VIII, No. 3. Vol. IX, No. 3. Vol. X, No. 1. 3. Vol. XII. XIII. Cambridge, Mass. 1883. 84.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1882/83, 1883/84. Cambridge, Mass. 1883. 84.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 2. Madison 1883.

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. II, No. 10—13. Vol. III, No. 1. 2. New York 1883.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. II, No. 1—8. New York 1882. 83.

Bulletin of the American Geographical Society. 1883, No. 3—6. 1884, No. 1. 2. New York 1883. 84.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1883, P. 2 (June—Oct.). 3 (Nov. Dec.). 1884, P. 1 (Jan.—Apr.). 2 (May—Oct.). Philadelphia 1883. 84.

The Transactions of the Academy of sciences of St. Louis. Vol. IV, No. 3. St. Louis 1884.

Astronomical and meteorological Observations made during the year 1879 at the U. S. Naval Observatory (Washington Astronomical and meteorological Observations Vol. 26). Washington 1883.

Report of the Commissioner of agriculture for the year 1883. Washington 1883.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey, showing the progress of the work during the fiscal year ending with June 1882. P. 1. 2. Washington 1883.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 1. Washington 1883.

Monographs of the U. S. Geological Survey. Vol. II (Dutton, C. E., Tertiary history of the Grand Cañon District. With Atlas). Washington 1882.

Second Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior 1880—81, by J. W. Powell. Washington 1882.

Williams, Albert, Mineral Resources of the United States. Department of the Interior. U. S. Geological Survey. Washington 1883.

12th Annual Report of the U. S. Geological and Geographical Survey of the Territories. A report of progress of the exploration in Wyoming and Idaho for the year 1878. P. 1. 2. By F. V. Hayden. With Maps and Panoramas. Washington 1883.

Professional Papers of the Signal Service. U. S. War Department. No. 4. 8—12. 15. Washington 1881—84.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1882. Washington 1884.

The Artesian Wells of Denver. A report by a special committee of the Colorado Scientific Society. Published by the Society. Denver, Colorado 1884.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada for the years 1882 and 1883. Vol. 1. Montreal 1883.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto, being a continuation of the Canadian Journal of science, literature and history. Vol. 2, Fasc. 1. Toronto 1884.

Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya, para el año 1885 (Año V). México 1884.

Anales estadísticos de la Republica de Guatemala. Año de 1882. T. 1. Guatemala (1883).

Boletin de la R. Sociedad Económica de amigos del pais. Revista Filipina de ciencias y artes. Año 3 (1884), No. 1. 3. 4. Manila d. J.

Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire Impérial de Rio de Janeiro. 1881, No. 8. 1883, No. 10—12. Rio de Janeiro d. J.

Actas de la Academia nacional de ciencias en Córdoba. T. V, Entrega 1. Buenos Aires 1884.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. V, Entrega 4. T. VI, Entrega 1—3. Córdoba 1883. 84.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 44. 's Gravenhage 1884.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 21 (1883), No. 1—4. Deel 22 (1884), No. 1. Batavia 1883. 84.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 28, Afl. 5. 6. Deel 29, Afl. 1—4. Deel 30, Afl. 1. 2. Batavia 1883. 84.

Verbeek, R. D. M., Topographische en geolog. beschrijving van een gedeelte van Sumatra's westkust. Text u. Atlas. Batavia 1883.

Memoirs of the Science Department, Tôkiô Daigaku (University of Tôkiô). No. 9. Ewing, J. A., Earthquake measurement. Tôkiô 1883.

Einzelne Schriften.

Beckh-Widmanstetter, L. v., Ein Kampf ums Recht. Graz 1884.

Berlanga, Emm. Rod., Decretum Pauli Aemilii. Pactum fiduciae. Lex metalli Vipasiensis. Pars II. Malacae 1884.

Blasius, Wilh., Ellobius Tancréi nov. sp., ein neuer Moll-Lemming. (Sep.-A.) 1884.

Blasius, W., Ueber eine kleine Sammlung von Vögeln aus Java (Sep.-A.).

Ders., Ueber wahrscheinlich schon von d. eingebornen Sammlern u. Jägern ausgeführte Fälschungen von Vogelbälgen aus Ecuador (Sep.-A.).

Ders., Ueber die letzten Vorkommnisse des Riesen-Alks u. die in Braunschweig u. an andern Orten befindlichen Exemplare dieser Art (Sep.-A.).

Ders., Der japanische Nörz, Foetorius Itatsi (Temm). (Sep.-A.).

Ders., Ueber Spermophilus rufescens Keys. et Blas., den Orenburger Ziesel (Sep.-A.).

Ders., Zur Geschichte der Ueberreste von Alca impennis Linn. (Sep.-A.). Naumburg 1884.

Browne, H. J., The higher branch of science, or Materialism refuted by facts. Melbourne o. J.

Caligny, Anat. Marquis de, Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes. P. 1. 2. Paris 1883.

Geddes, Patr., A re-statement of the cell-theory. (Sep.-A.). Edinburgh 1883.

Hamon, A., Étude sur les eaux potables et le plomb. Paris 1884.

Latzina, Fr., Die Argentinische Republik als Ziel der europäischen Auswanderung. o. O. u. J.

Leonardelli, Gius., Il saldame, il rego e la terra di Punta Merlera in Istria come formazione termica. Roma 1884.

Lewis, H. Carvill, A summary of progress in mineralogy, in 1883. No. 2. From monthly notes in the 'American Naturalist'. Philadelphia 1884.

Ders., On supposed glaciation in Pennsylvania south of the Terminal Moraine (Sep.-A.). 1884.

Malortie, C. E. v., Beiträge zur Geschichte des Braunschweig-Lüneburgischen Hauses u. Hofes. H. 7. Hannover 1884.

Die Meteoriten-Kreisreihen als Erzeuger der Kometen, Sonnenflecke u. s. w. o. O. u. J.

Newlands, John A. R., On the discovery of the periodic law, and on relations among the atomic weights. London 1884.

Notes of the services of B. H. Hodgson Esq. and late British Minister at the Court of Nepal. Collected by a friend. o. O. 1883.

Piolti, Gius., Il porfido del vallone di Roburent (Valle della Stura di Cuneo). Torino 1884.

Portis, Aless., e Gius. Piolti, Il calcare del Monte Tabor (Piemonte). Torino 1883.

Robinski, Sev., Zur Kenntniss der Augenlinse u. deren Untersuchungsmethoden. Berlin 1883.

SITZUNG AM 12. JANUAR 1885.

R. Baltzer, *Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske.*

In einer Vorlesung, in der geometrische Aufgaben behandelt wurden, sagte Möbius 1840 uns, seinen Zuhörern: Es war einmal ein König in Indien, der hatte ein grosses Reich und fünf Söhne. Der letzte Wille des Königs bestimmte, die Söhne sollten nach dem Tode des Königs das Reich unter sich auf solche Weise theilen, dass das Gebiet eines jeden mit den vier übrigen Gebieten eine Grenzlinie (nicht bloss einen Punct) gemein hätte. Wie war das Reich zu theilen? — Als wir in der nächsten Vorlesung bekannten, wir hätten uns vergeblich bemüht, eine solche Theilung zu finden, lächelte Möbius und bemerkte, es thue ihm leid, dass wir uns abgemüht hätten, denn die geforderte Theilung sei unmöglich.

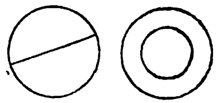
Ich habe Möbius für den geheimen Rathgeber des indischen Königs gehalten, bis mir bei Durchsicht des Möbius'schen schriftlichen Nachlasses einige vergilbte, nicht von M.'s Hand geschriebene Concepte auffielen, deren eines von der fraglichen Theilung handelt. Zwei andere beiliegende Blätter sind Briefe, die an den Leipziger Philologen, Professor Weiske, gerichtet waren, und ohne Zweifel von diesem selbst zu verschiedenen schriftlichen Aufzeichnungen benutzt worden sind. Aus der Übereinstimmung der Handschrift erkannte ich, dass das erstere Blatt von Weiske geschrieben ist. Also hat der von M. in der Vorrede zum barycentrischen Calcul gerühmte Freund Weiske den obigen Satz über Theilung einer begrenzten Fläche aufgeschrieben und dem Freunde M. vorgelegt. Der Eingang des Blattes lautet wie folgt:

»Erklärung. Spatia confinia sind Felder, von denen je zwei sich in einer Linie (nicht bloss in einem Puncte) berühren.

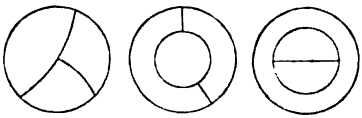
Satz. Fünf spatia confinia sind unmöglich in einer Fläche.

Beweis. Ein fünftes Spatium confinium kann zu vieren nicht hinzukommen, weil vier Spatia confinia stets so liegen, dass das vierte von den drei übrigen, die einen in sich zurücklaufenden Kranz bilden, rings eingeschlossen, und also jedes neuen Confiniums unfähig ist.«

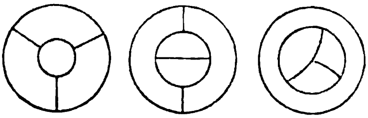
Zur Erläuterung braucht nur daran erinnert zu werden, dass ein Flächengebiet in zwei Confinien getheilt wird sowohl durch einen Querschnitt, als auch durch einen Rundschnitt.



Zur geforderten Dreitheilung genügen 1) ein Querschnitt des Ganzen und ein Querschnitt des einen Theils, 2) ein Rundschnitt und 2 Querschnitte des äusseren Theils, 3) ein Rundschnitt und ein Querschnitt des inneren Theils. Dabei werden zwei Theile ganz eingeschlossen, oder einer, oder keiner.



Zur Viertheilung genügen 1) ein Rundschnitt und 3 Querschnitte des äusseren Theils, 2) ein Rundschnitt, 2 Querschnitte des äusseren Theils und ein Querschnitt des inneren Theils, 3) ein Rundschnitt und 2 Querschnitte des inneren Theils. Dabei werden drei Theile ganz eingeschlossen, oder zwei, oder einer.



Bei einem in mehr als vier Theile getheilten Flächengebiet hat einer der Theile entweder mit einem oder mit zwei oder mit drei andern Theilen keine gemeinschaftliche Grenzlinie.

Der von Weiske gegebene Satz gehört in das Gebiet der seit Leibniz oft genannten, aber eines wissenschaftlichen Ausbaues noch immer harrenden *Situations-Geometrie* (geometria sitûs), in eine Disciplin, die vor ihrem Eintritt ins Dasein ihren Namen zum Theil hat abtreten müssen an Staudt's »Geometrie der Lage«, und die dafür zu derselben Zeit den neuen Namen Topologie durch Listing (Vorstudien zur Topologie 1847) empfangen hat. Einige kleine Beiträge mögen bei dieser Gelegenheit hier Platz finden.

I. Unter fünf Punkten einer Ebene giebt es mindestens einmal vier, von denen jeder *ausser* dem Dreieck der drei anderen liegt. Möbius baryc. Calcul § 255.

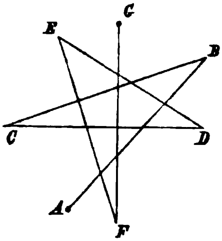
II. Die vielbesprochene, aber nicht immer mit wünschenswerther Klarheit wiedergegebene Unterscheidung einer linksgewundenen und einer rechtsgewundenen Spirallinie lässt sich auf die Bestimmung des Zeichens eines Tetraeders zurückführen. Wenn von dem Punkt A einer unebenen Linie die Puncte B, C, D derselben Linie vorwärts liegen, so liegen von D die Punkte C, B, A rückwärts, aber die Tetraeder $ABCD$ und $DCBA$ haben dasselbe Zeichen. Bei *positivem* Tetraeder der einander hinreichend nahen Punkte ist die Linie in A (oder D) *linksgewunden*, bei negativem Tetraeder rechtsgewunden. Wenn das Tetraeder auf der ganzen Linie positiv ist, so ist die Linie durchaus linksgewunden. Dies habe ich in meiner analytischen Geometrie § 56, 4 angemerkt.

III. Es ist bekannt, dass die Permutationen gegebener Elemente durch Vertauschungen von je einem Paar der Elemente alle ohne Wiederholungen bewirkt werden können. Durch solches Verfahren gelangt man von 1 2 3 bis 3 2 | 1, von 1 2 3 4 bis 4 | 1 2 3, von 1 2 3 4 5 bis 5 4 | 1 2 3, von 1 2 3 4 5 6 bis 6 | 1 2 3 4 5, u. s. w., so dass zuletzt bei gerader Anzahl der Elemente das letzte Element, bei ungerader Anzahl das letzte nebst dem vorletzten Element den Vortritt erhält, und die übrigen Elemente in ihrer ursprünglichen Ordnung folgen.

Durch Vertauschungen von je einem Paar *neben einander stehender* Elemente können die Permutationen von mehr als drei Elementen *nicht alle* ohne Wiederholungen bewirkt werden.

IV. Wenn zwei nichtfolgende Seiten eines Polygons sich *beide unverlängert* schneiden, so hat der Perimeter des Polygons

einen *Doppelpunct.* Eine Seite eines planen n-Ecks kann nicht mehr als $n - 3$ Doppelpunkte enthalten: *ein planes n-Eck kann nicht mehr als $\frac{1}{2}n(n-3)$ Doppelpunkte haben.*



Es werde die Seite AB von der Seite CD geschnitten, die gebrochene Linie ABC von der Seite DE in zwei Punkten, die zweimal gebrochenene Linie $ABCD$ von EF in drei Punkten, die $(n-2)$mal gebrochene Linie ABC.. von der $(n-1)$ten Seite in $n-3$ Punkten. *Also kann eine $(n-2)$mal gebrochene Linie $1+2+..+(n-3) = \binom{n-2}{2}$ Doppelpuncte haben, sowie jede geringere Anzahl.*

Ueber die noch auf der $n$ten Seite des Polygons möglichen Doppelpunkte erhält man Aufschluss durch folgende drei Lemmen: 1) Wenn AB und CD sich unverlängert schneiden, so liegen D und A auf demselben Ufer von BC. 2) Wenn D links von BC liegt, so liegt B links von CD. 3) Wenn E und A auf demselben Ufer der Linie BCD liegen, so wird BCD von EA nicht ungeradmal geschnitten.

a. Weil AB und CD sich schneiden, so liegen D und A auf demselben Ufer von BC; DA kann BC nicht schneiden. *Ein Viereck kann nicht mehr als einen Doppelpunkt haben.*

Wenn nun A z. B. links von BC, so ist auch D links von BC, E rechts von BC. Zugleich ist B links von CD, A rechts von CD. Demnach liegen E und A auf demselben Ufer von BCD; EA kann BCD nicht ungeradmal schneiden. *Ein Fünfeck kann 0, 1, 2, 3 Doppelpunkte haben, auch 5, aber nicht 4.* Fünfecke mit 0, 1, 2, 3, 5 Doppelpunkten werden erwähnt im baryc. Calcul § 165.

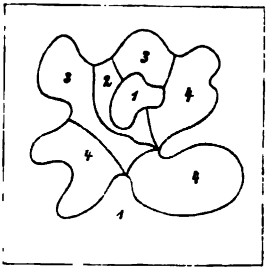
b. Nun liegt F links von BC, A desgleichen, F und A auf dem linken Ufer von BC. Ferner liegt E wie B links von CD, also F und A auf dem rechten Ufer von CD. Weil E links von CD, so ist C links von DE, F desgleichen, also B rechts von DE, A links von DE; FA kann BCD nicht schneiden. *Ein Sechseck kann sechs Doppelpunkte haben, auch weniger, aber nicht mehr.*

c. Weil F links von BC, so ist G rechts von BC. Nun war A rechts von CD, also liegen G und A auf demselben Ufer von

BCD; *GA* kann *BCD* nicht ungeradmal schneiden. Weil *F* links von *DE*, so ist *G* rechts von *DE*. Zugleich ist *D* links von *EF*, *C* rechts, *B* links, *A* rechts von *EF*, also liegen *G* und *A* auf demselben Ufer von *DEF*; *GA* kann *DEF* nicht ungeradmal schneiden, und *GA* kann *BCDEF* nicht ungeradmal schneiden. *Ein Siebeneck kann* 10 *Doppelpunkte haben, auch weniger, aber nur* 2 *oder* 4 *mehr, also* 12 *oder* 14, *nicht* 11 *oder* 13. Auf dem angezeigten Wege ergiebt sich:

Ein planes n-Eck kann $\binom{n-2}{2}$ *Doppelpuncte haben, auch weniger. Nur das Ungerad-Eck kann eine gerade Anzahl mehr Doppelpunkte haben, höchstens* $\frac{1}{2}n(n-3)$ *Doppelpunkte.*

Postscript. Herr College Klein hat die Güte gehabt, mich auf eine den oben erwähnten Gegenstand berührende Arbeit des Herrn Kempe in London On the geographical problem of the four colours (American Journal of mathematics 1879 vol. 2 p. 193—204) aufmerksam zu machen. Diese Arbeit geht von den Thatsachen aus, dass auf den englischen Landkarten 1) jedes einzelne Gebiet der Karte in seiner ganzen Ausdehnung (nicht bloss auf seiner Grenze) durch *eine* bestimmte Färbung kenntlich gemacht wird, 2) dass zwei Gebiete, welche eine Grenzlinie (nicht bloss einen Punkt) gemein haben, *verschiedene* Färbung erhalten, 3) dass die Verfertiger der Landkarten bei diesem Verfahren mit *vier* Farben ausreichen, wenn es unverwehrt ist, Gebiete, welche eine gemeinschaftliche Grenzlinie nicht haben, mit derselben Farbe zu überziehen. (Z. B. die nebenstehende Karte hat zwei Gebiete der Farbe 1, ein Gebiet der Farbe 2, zwei Gebiete der Farbe 3, und drei Gebiete der Farbe 4). Die letztere in England seit längerer Zeit bekannte Thatsache sei durch die Herren De Morgan und Cayley zur Discussion gestellt worden. Herrn Kempe's Deduction stützt sich auf die Betrachtungen,



durch welche die Grund-Eigenschaften einer einfach-zusammenhängenden Polyederfläche, die Relation zwischen den Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten, u. s. w. gefunden werden. Nach dem oben mitgetheilten kleinen Satze ist die zur Discussion

gestellte Thatsache sofort verständlich. Denn es giebt nicht mehr als vier benachbarte Gebiete, deren jedes mit jedem anderen eine gemeinschaftliche Grenze hat; also genügen vier Farben zur Unterscheidung aller Gebiete.

Wie würde Möbius sich gefreut haben, wenn er die merkwürdige öconomische Bedeutung des von Freund Weiske ihm mitgetheilten Satzes erfahren hätte.

Giessen, den 9. Januar 1885.

A. Mayer, *Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung.**)

Lagrange hat seine Multiplicatorenmethode, durch die er zur Aufstellung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung gelangte, ohne Weiteres aus der Mechanik übertragen in die Variationsrechnung. Ein wirklicher Beweis für die Richtigkeit dieser Methode in dem Falle, wo nicht bloss endliche Bedingungsgleichungen vorliegen, sondern den unbekannten Functionen des Problems von vornherein auch Differentialgleichungen vorgeschrieben sind, ist aber bisher noch nicht erbracht worden. Es ist vielmehr nur kein Beispiel bekannt, in welchem das Lagrange'sche Verfahren zu einem falschen Resultate geführt hätte, und alle diejenigen besonderen Regeln der Variationsrechnung, die, wie die isoperimetrische, sich auch noch auf anderem, directen Wege beweisen lassen, gehen als blosse Anwendungen aus demselben hervor. Daher wurde die Lagrange'sche Methode von einem Theile der Mathematiker gewissermassen als Axiom acceptirt, während ein anderer Theil es vorzog, alle diejenigen Aufgaben der Variationsrechnung, zu deren Lösung man keine anderen Methoden kennt, überhaupt einfach zu ignoriren.

Im Anschlusse an Clebsch habe ich selbst mich immer zu dem ersten Theile gehalten und die Lagrange'sche Regel allen meinen Arbeiten über Variationsrechnung zu Grunde gelegt. Obgleich ich aber das Ungenügende der bisherigen Versuche, die Lagrange'sche Multiplicatorentheorie in dem Falle von Bedingungsdifferentialgleichungen zu begründen, recht wohl herausfühlte, wurde mir der eigentliche Kernpunkt, um den es

---

*) Vorgelegt und zum Druck übergeben in der Sitzung am 12. Jan. 1885.

sich hierbei handelt, doch erst vollständig klar bei einer Besprechung mit Herrn L. Scheeffer, dessen wichtige Untersuchungen über die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale die Mathematischen Annalen demnächst bringen werden, und seiner Darstellung der Theorie der isoperimetrischen Probleme folgend gelangte ich zu einer, wie ich glaube, in allem Wesentlichen völlig befriedigenden Begründung der Lagrange'schen Methode.

Um die Grundgedanken klarer hervortreten zu lassen, beschränke ich mich im Folgenden auf den Fall, wo den unbekannten Functionen nur Bedingungsdifferentialgleichungen vorgeschrieben sind. Hierdurch geschieht der Allgemeinheit kein Abbruch, da man sich aus jeder endlichen Bedingungsgleichung immer eine der Unbekannten bestimmt denken kann. Es handelt sich dann um die Lösung des folgenden Problems:

Unter allen Functionen $y_1, \ldots y_n$ von x, die $m < n$ vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen:

$$1)\quad \varphi_k(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0\,, \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

genügen, in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und x_1 gegebene Grenzwerthe besitzen und zwischen diesen Grenzen mit ihren ersten Ableitungen stetig bleiben, diejenigen zu finden, für welche das gegebene Integral

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\,dx$$

einen grössten oder kleinsten Werth erreicht. —

Ich setze voraus, dass die Determinante:

$$2)\qquad \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y'_2} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_m}$$

nicht Null ist und auch in Folge der Bedingungsgleichungen 1) nicht identisch verschwindet.

Ist dann das vorgelegte Problem überhaupt allgemein, d. h. ohne Einschränkung der Grenzwerthe der Functionen y lösbar, so ist klar, dass dasselbe, solange man diese festen Grenzwerthe nicht specialisirt, jedenfalls auch solche Lösungen zulassen muss, für welche die Determinante 2) nicht identisch Null wird.

Denkt man sich nun diese Lösungen bereits gefunden und überall für die y substituirt, so muss die erste Variation des gegebenen Integrales:

$$3) \qquad \delta V \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) = 0$$

werden für alle stetigen Functionen $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$ von x, welche in den beiden Grenzen verschwinden und den m Bedingungsgleichungen

$$4) \qquad \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) = 0$$

genügen.

Indem man diese Bedingungsgleichungen, mit vorläufig unbestimmten Functionen μ_k multiplicirt, der Bedingung 3) unter dem Integralzeichen hinzufügt und die Differentialquotienten $\delta y'$ durch theilweise Integration fortschafft, bringt man diese Forderung auf die Form:

$$5) \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) \delta y_i = 0 \ ,$$

worin zur Abkürzung

$$6) \qquad f + \mu_1 \varphi_1 + \ldots + \mu_m \varphi_m = F$$

gesetzt worden ist. Setzt man nun weiter für $r = 1, 2, \ldots, m$

$$7) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_r} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_r} = 0 \ ,$$

so bilden nach der über die Determinante 2) gemachten Voraussetzung diese Gleichungen ein System von m linearen Differentialgleichungen 1. O. für die μ Multplicatoren $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Daher lässt sich die Bedingung 5) ihrerseits wieder zurückführen auf die:

Für alle mit den Beschränkungen, denen die n Variationen $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$ unterworfen sind, verträglichen Functionen $\delta y_m, \ldots, \delta y_n$ muss die Gleichung bestehen:

$$8) \qquad U_{\delta y} \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{m+1}^{n} s \left(\frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_s}\right)\delta y_s = 0 \, .$$

in der $\mu_1, \ldots, \mu_m$ irgend ein System Lösungen der m linearen Differentialgleichungen 6) bilden.

Um also die Differentialgleichungen des Problems zu finden, kommt es zunächst darauf an, festzustellen, welche Bedingungen sich aus jenen Beschränkungen für die übrig gebliebenen $n - m$ Variationen $\delta y_m, \ldots, \delta y_n$ ergeben.

Zu diesem Ende multiplicire ich die Bedingungsgleichungen 4) mit neuen Factoren $\nu_\varkappa$ und addire die Producte. Ihre Summe lässt sich dann so schreiben:

$$\sum_1^n{}_i\, \delta y_i \sum_1^m{}_\varkappa \left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_i}\right) + \frac{d}{dx}\left(\sum_1^n{}_i\, \delta y_i \sum_1^m{}_\varkappa\, \nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_i}\right) = 0 \, .$$

Nennt man also:

$$\nu^\varrho_1, \quad \nu^\varrho_2, \ldots, \quad \nu^\varrho_m, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

die m linear unabhängigen Systeme von Lösungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ der m verkürzten linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$9) \quad \sum_1^m{}_\varkappa \left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_r} - \frac{d}{dx}\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_r}\right) = 0 \, , \quad (r = 1, 2, \ldots, m) \, ,$$

so folgt aus den Bedingungsgleichungen 4)

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_1^n{}_i\, \delta y_i \sum_1^m{}_\varkappa\, \nu^\varrho_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_i}\right)$$

$$+ \sum_{m+1}^n{}_s\, \delta y_s \sum_1^m{}_\varkappa \left(\nu^\varrho_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_s} - \frac{d}{dx}\nu^\varrho_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_s}\right) = 0 \, .$$

Durch Integration erhält man hieraus, weil alle δy für $x = x_0$ verschwinden müssen:

$$10)\quad \sum_1^m{}_r\, \delta y_r \sum_1^m{}_\varkappa\, \nu^\varrho{}_\varkappa \frac{\partial \varphi_r}{\partial y'_r} = - \sum_{m+1}^n{}_s\, \delta y_s \sum_1^m{}_\varkappa\, \nu^\varrho{}_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_s}$$

$$- \int_{x_0}^x dx \sum_{m+1}^n{}_s\, \delta y_s \sum_1^m{}_\varkappa \left(\nu^\varrho{}_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \nu^\varrho{}_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_s}\right) .$$

Wegen $\varrho = 1, 2, \ldots, m$ sind das m lineare Gleichungen für die m Unbekannten $\delta y_1, \ldots, \delta y_m$, deren Determinante:

$$11)\quad \sum \pm \nu^1{}_1 \nu^2{}_2 \ldots \nu^m{}_m \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y'_2} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_m}$$

nicht Null ist, m Gleichungen also, welche diese m Unbekannten bestimmen und somit den m Bedingungsgleichungen 4) vollständig äquivalent sind.

Weiter aber sollen alle n Variationen δy auch für $x = x_1$ verschwinden, also müssen $\delta y_m, \ldots, \delta y_n$ den m Bedingungen genügen:

$$12)\quad W^\varrho{}_{\delta y} \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{m+1}^n{}_s\, \delta y_s \sum_1^m{}_\varkappa \left(\nu^\varrho{}_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \nu^\varrho{}_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_s}\right) = 0$$

und dies sind, wenn man sich x_0 und x_1 so gewählt denkt, dass die Determinante 11) in keiner dieser beiden Grenzen verschwindet, eben auch alle Bedingungen, denen die δy_s unterworfen sind.

Setzt man nun für $s = m + 1, \ldots, n$:

$$13)\quad \delta y_s = z_s + \sum_1^m{}_\sigma\, \alpha_\sigma u^\sigma{}_s ,$$

wo die $u^\sigma{}_s$ beliebig zu wählende und die z_s willkürliche Functionen von x bezeichnen, die in beiden Grenzen verschwinden, die α_σ dagegen Constanten sind, so gehen die Bedingungen 12) über in:

$$14)\quad W^\varrho{}_z + \sum_1^m{}_\sigma\, \alpha_\sigma W^\varrho{}_{u^\sigma} = 0 .$$

Hat man daher für die $u^\sigma{}_s$ irgend $m(n - m)$ solche an beiden

Grenzen verschwindende Functionen gesetzt, dass die Determinante

$$\text{15)} \qquad \sum \pm W^1_{u^1} W^2_{u^2} \dots W^m_{u^m}$$

nicht Null wird, so lassen sich die m Constanten α_σ so bestimmen, dass die m Gleichungen 14) erfüllt und die Gleichungen 12) also durch die Substitutionen 13) identisch befriedigt werden.

Weiter haben die Auflösungen der Gleichungen 14) die Form:

$$\text{16)} \qquad \alpha_\sigma = \sum_1^m {}^\varrho \, \beta^\sigma{}_\varrho W^\varrho{}_z \; ,$$

wo die Constanten $\beta^\sigma{}_\varrho$ nur von der Wahl der Functionen $u^\sigma{}_s$ abhängen, aber dieselben Werthe behalten für alle beliebigen Functionen z.

Führt man nun die Werthe 13) der δy_s in die Bedingung 8) ein, so verwandelt sich diese in:

$$U_z + \sum_1^m {}^\sigma \, \alpha_\sigma U_{u^\sigma} = 0 \; ,$$

oder nach 16) in:

$$U_z + \sum_1^m {}^\varrho \, \gamma_\varrho W^\varrho{}_z = 0 \; ,$$

wo die

$$\gamma_\varrho = \sum_1^m {}^\sigma \, \beta^\sigma{}_\varrho U_{u^\sigma}$$

von der Wahl der Functionen z unabhängige Constanten sind.

Nach 8) und 12) lässt sich aber diese Bedingung also schreiben:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{m+1}^n {}^s \, z_s \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_s} \right.$$

$$\left. + \sum_1^m {}^\varrho \, \gamma_\varrho \sum_1^m {}^\varkappa \left(\nu^\varrho{}_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \nu^\varrho{}_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_s} \right) \right\} = 0$$

und verlangt daher, da die Functionen z bis auf die Grenzwerthe ganz willkürlich geblieben sind, dass der Coefficient jedes einzelnen z_s Null sei. D. h. aber, da die

$$\nu_\varkappa = \sum_1^m {}^\varrho \gamma_\varrho \nu^\varrho_\varkappa$$

wiederum Lösungen der Diffferentialgleichungen

$$9)\quad \sum_1^m {}^\varkappa \left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_r} - \frac{d}{dx}\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_r}\right) = 0\,,\quad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

sind, die gesuchten Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ sowie die m Multiplicatoren $\mu_1, \ldots, \mu_m$ müssen neben den m Gleichungen

$$7)\quad \frac{\partial F}{\partial y_r} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_r} = 0\,,\quad (r = 1, 2, \ldots, m)\,,$$

welche die Multiplicatoren $\mu_\varkappa$ definiren, noch den $n - m$ Gleichungen genügen:

$$17)\quad \frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_s} + \sum_1^m {}^\varkappa \left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_s}\right) = 0\,,$$

in denen $s = m + 1, \ldots, n$ und die $\nu_\varkappa$ Lösungen der Differentialgleichungen 9) sind.

Addirt man aber zu jeder Gleichung 7) die entsprechende Gleichung 9), so erhalten die Gleichungen 7) die nämliche Form wie die Gleichungen 17), und wenn man sich noch der Bedeutung 6) von F erinnert und

$$\mu_\varkappa + \nu_\varkappa = \lambda_\varkappa$$

setzt, so ergiebt sich somit schliesslich, dass die Lösungen y_1, $\ldots, y_n$ des Problems zusammen mit den m Multiplicatoren λ_1, $\ldots, \lambda_m$ den n Gleichungen genügen müssen:

$$18)\quad \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_1^m {}^\varkappa \lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} + \sum_1^m {}^\varkappa \lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_i}\right) = 0\,.$$

Das ist aber eben die Lagrange'sche Regel. —

Diese Ableitung setzt stillschweigend voraus, dass die Determinante 15) nicht für alle beliebigen, in den beiden Grenzen verschwindenden Functionen u^σ_s Null sei, d. h. mit anderen

Worten, dass es kein System Lösungen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ der m Differentialgleichungen 9) gebe, welches zugleich auch den $n-m$ Gleichungen:

$$19) \quad \sum_1^m {}_{\varkappa} \left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_s}\right) = 0\,, \quad (s = m+1\,, \ldots, n)$$

genügte.

In Verbindung mit den Gleichungen 1) und den Grenzbedingungen würden aber die n Gleichungen 9) und 19) im Allgemeinen selbst schon die Functionen y vollständig und zwar ganz unabhängig von der Function f bestimmen und daher ist klar, dass, im Allgemeinen wenigstens, die Lösungen des Problems nicht den letzteren Gleichungen unterworfen sein können.

Im Besonderen dürfen jedoch keine Multiplicatoren $\nu_1, \ldots, \nu_m$ existiren, für welche die n Gleichungen 9) und 19) Identitäten oder blosse Folgen der Gleichungen 1) würden. Nun sagt das identische Bestehen jener n Gleichungen aus, dass

$$\sum_1^m {}_{\varkappa}\, \nu_\varkappa \varphi_\varkappa$$

ein vollständiger Differentialquotient ist. Die vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen 1) dürfen also keine Gleichung von der Form:

$$\frac{d\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)}{dx} = 0$$

nach sich ziehen. Diese Voraussetzung ist aber bereits in der früheren Annahme enthalten, dass unser Problem den Grenzwerthen der y keinerlei Beschränkungen auferlegen sollte.

Georg Pick, *Zur Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen.* Vorgelegt von Prof. Dr. *Klein.*

Die folgende Mittheilung enthält eine kurze Übersicht über einige Untersuchungen, betreffend die singulären Moduln der elliptischen Functionen, welche demnächst in ausführlicherer Form in den Mathematischen Annalen zur Veröffentlichung gelangen werden. Die Anregung zu diesen Untersuchungen ging von Hrn. Klein aus; sie bilden den ersten Schritt in Ausführung des Vorhabens, die von Hrn. Kronecker schon vor mehr als zwanzig Jahren angegebenen Sätze über die singulären Moduln [1]) im Sinne der von Hrn. Klein geschaffenen Theorie der elliptischen Modulfunctionen aller »Stufen« [2]) zu erweitern und neu zu beweisen. Hrn. Kronecker's Sätze beziehen sich auf Moduln *zweiter* Stufe; hier sollen nun vor Allem singuläre Moduln *erster* Stufe zur Sprache kommen, und zwar soll es sich um die genaue Bestimmung der Galois'schen Gruppe jener Zahlengleichung handeln, von welcher die singulären Moduln einer willkürlich gegebenen »Determinante« die Wurzeln sind. Es ist übrigens leicht zu sehen, dass der Übertragung der hier zu behandelnden Sätze auf »Congruenzmoduln vom Geschlecht Null« kein wesentliches Hinderniss entgegensteht. Dagegen werden sich bei Congruenzmoduln höheren Geschlechts allerdings mit neuen Fragestellungen auch neue Schwierigkeiten ergeben, insofern man wünschen wird, nicht bloss die singulären Moduln selbst, sondern auch die zugehörigen »singulären Integralwerthe« hinsichtlich ihrer zahlentheoretischen Natur zu charakterisiren.

---

1) Berliner Monatsberichte, 1857 u. 1862.

2) Vgl. z. B. F. Klein, Math. Ann. Bd. 17, S. 62 ff.

§ 1.

Aufstellung der Gleichungen für die singulären Moduln und elementarste Eigenschaften derselben.

Wenn für das Argument ω einer elliptischen Modulfunction $F(\omega)$ die mit positivem imaginären Bestandtheil versehene Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung (von negativer Discriminante) gesetzt wird, so bezeichnet man den Werth von $F(\omega)$ als »singulären Modul« oder »Modul complexer Multiplication«. Bedeutet insbesondere $F(\omega)$ einen Modul *erster* Stufe, als welcher in der Folge immer

$$x(\omega) = 1728\, J(\omega) = 1728 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

verwendet wird, so entsprechen die singulären Werthe desselben wechselseitig eindeutig den Klassen ganzzahliger quadratischer Formen von negativer Determinante, wofern man diese stets ohne Theiler und mit positiven äusseren Coefficienten voraussetzt. Bezeichnet man als Determinante der Form

$$[A, B, C] = A\omega_1^2 + B\omega_1\omega_2 + C\omega_2^2$$

die Grösse

$$-\Delta = B^2 - 4AC,$$

so ist die Form erster oder zweiter Art, je nachdem $\Delta \equiv 0$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ ist. Hiernach werden gelegentlich auch singuläre Moduln erster oder zweiter Art unterschieden werden.

Ein grosser Teil der folgenden Aufstellungen gründet sich nun auf nachstehenden Hilfssatz:

Setzt man in die Modulargleichung für den n^{ten} Transformationsgrad

$$\Phi_n(x, y) = 0$$

für x irgend einen singulären Modul der Determinante $-\Delta$, so genügen derselben für y gesetzt alle und nur diejenigen singulären Moduln von derselben Determinante, welche aus x durch Composition mit denjenigen Formen (eben dieser Determinante) hervorgehen, durch welche n eigentlich darstellbar ist.

Man bezeichne nun mit

$$x_1, x_2, \ldots x_{h_\Delta}$$

die sämmtlichen verschiedenen singulären Moduln, welche zu $-\Delta$ gehören, und setze

$$F_\Delta(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_{h_\Delta}) .$$

Dann stellt

$$F_\Delta(x) = 0$$

die »Gleichung der complexen Multiplication« für die Determinante $-\Delta$ dar. Wendet man jetzt den angezogenen Hilfssatz auf jene Fälle an, wo ursprünglicher und transformirter Modul übereinstimmt, so erhält man folgende Normen zur Aufstellung der Polynome $F_\Delta(x)$:

1) Ist $\Delta \equiv 0, 4, 8 \pmod{16}$, so ist $F_\Delta(x)$ genau das Product der einfachen Lineartheiler von $\Phi_{\frac{\Delta}{4}}(x, x)$, also in bekannter Weise explicite zu erhalten.

2) Ist $\Delta \equiv 12 \pmod{16}$, so ist das Product der einfachen Lineartheiler von $\Phi_{\frac{\Delta}{4}}(x, x)$ gleich $F_\Delta(x) \,.\, F_{\frac{\Delta}{4}}(x)$, welche beiden Polynome mit Zuhilfenahme von $\Phi_{\frac{\Delta+4}{16}}(x, x)$ separirt werden können, worin $F_{\frac{\Delta}{4}}(x)$ aufgeht, $F_\Delta(x)$ dagegen nicht.

3) Hierdurch ist zugleich der Fall $\Delta \equiv 3 \pmod{4}$ miterledigt.

Von den letzten beiden Regeln tritt eine Ausnahme ein, wenn Δ das dreifache einer Quadratzahl ist. In diesem Falle ist

2′) für $\Delta \equiv 12 \pmod{16}$ $F_\Delta(x)$ wieder genau das Product der einfachen Lineartheiler von $\Phi_{\frac{\Delta}{4}}(x, x)$, und

3′) für $\Delta \equiv 3 \pmod{4}$ $F_\Delta(x)$ genau das Product der in $\Phi_\Delta(x, x)$ je dreifach auftretenden Lineartheiler[1]).

In allen diesen Angaben ist jedoch von möglicherweise auftretenden Factoren

$$x \text{ und } x - 1728$$

1) Man vergleiche hier im Allgemeinen die von Herrn Gierster aufgestellte »Klassenzahlrelation erster Stufe« (Math. Ann. Bd. 21, S. 25 ff.).

abgesehen, welche ja jedesmal von vornherein entfernt werden können.

Aus ganz elementaren Eigenschaften der Modulargleichungen für $x(\omega)$ folgt nun:

Die Gleichungen $F_\Delta(x) = 0$ besitzen ganze rationale Zahlen als Coefficienten, deren höchster gleich Eins ist; die singulären $x(\omega)$ sind ganze algebraische Zahlen.

Ferner ergiebt eine höchst einfache Überlegung das Resultat:

Von den singulären Moduln sind diejenigen und nur diejenigen reell, deren entsprechende Formenklassen ambig sind.

§ 2.

Relationen zwischen den zu derselben Determinante gehörigen singulären Moduln.

Im Folgenden werden wir uns der symbolischen Schreibweise

$$x_\nu = A \,.\, x_\mu$$

bedienen, um anzudeuten, dass der singuläre Modul x_ν aus x_μ durch Composition mit der Formenklasse A hervorgeht. Die Entwickelungen dieses Paragraphen gehen darauf hinaus, zu zeigen, dass jeder solchen symbolischen Relation eine wirkliche entspricht, welche wir dann in der Form

$$x_\nu = A(x_\mu)$$

schreiben werden, wobei $A(x)$ eine durch die Formenklasse A bestimmte rationale Function bedeutet, deren Coefficienten dem Zahlkörper $(1, \sqrt{-\Delta})$ angehören[1].

Es sei nun zunächst p eine in 6Δ nicht enthaltene Primzahl, und $\left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1$. Man unterwerfe x_μ der Transformation von der Ordnung p. Dann besitzt die Modulargleichung

$$\Phi_p(x_\mu, x) = 0$$

nach dem Hilfssatze des vorigen Paragraphen zwei Auflösungen, welche zugleich Auflösungen von

$$F_\Delta(x) = 0$$

1) Vgl. DIRICHLET-DEDEKIND, Zahlentheorie, XI. Supplement.

sind, und aus x_μ durch Composition mit den beiden (entgegengesetzten) Formenklassen P, P^{-1} entstehen, durch welche p darstellbar ist. Ist

$$P = P^{-1}$$

(das heisst P ambig), so findet man durch einfache Elimination die betreffende gemeinsame Wurzel von

$$F_\Delta(x) = 0$$

und

$$\Phi_p(x_\mu, x) = 0,$$

als rationale Function von x_μ mit ganzzahligen Coefficienten.

Ist dagegen P nicht gleich P^{-1}, so tritt das folgende Verfahren ein. Es sei p^λ die niedrigste Potenz von p, welche durch die Hauptklasse der Determinante $-\Delta$ darstellbar ist. Dann besitzt die Gleichung

$$\Phi_{p^\lambda}(x, y) = 0$$

die Auflösung

$$x = y = x_\mu,$$

und zwar stellt das so bezeichnete Werthsystem einen Doppelpunkt der Curve

$$\Phi_{p^\lambda}(x, y) = 0$$

dar. In der bekannten Relation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=y=x_\mu} = \frac{p^\lambda}{M^2},$$

in welcher M den Multiplicator der Transformation bedeutet, hat also jede der beiden Seiten zwei Werthe. Es gelingt nun durch successive Vollführung der Transformation $p^{\lambda\text{ter}}$ Ordnung, diese Gleichung nach jenen beiden Werthen zu zerfällen, und zwar in der Form

$$\Psi(x_\mu, P.x_\mu) = \frac{p^\lambda}{M_1^2}$$
$$\Psi(x_\mu, P^{-1}.x_\mu) = \frac{p^\lambda}{M^2_{-1}},$$

wo M_1 und M_{-1} conjugirt complexe Zahlen des Körpers $(1, \sqrt{-\Delta})$ bedeuten, und Ψ eine rationale mit rationalen

Zahlencoefficienten versehene Function ihrer beiden Argumente vorstellt. Der gemeinsame Theiler zweiten Grades von $F_\Delta(x)$ und $\Phi_p(x_\mu, x)$ lässt sich jetzt mit Hilfe der gefundenen Relationen offenbar so auflösen, dass man jede seiner Wurzeln rational in x_μ mit in $\sqrt{-\Delta}$ rationalen Coefficienten ausdrücken kann:

$$P . x_\mu = P(x_\mu)$$
$$P^{-1} . x_\mu = P^{-1}(x_\mu) .$$

Sei nun A eine beliebige Klasse der Determinante $-\Delta$, so wähle man in bekannter Weise irgend eine durch dieselbe darstellbare Zahl a aus, welche gegen 6Δ theilerfremd ist. Ist ferner in Primzahlen zerlegt

$$a = p_1 . p_2 \ldots ,$$

so folgt daraus eine Zerlegung von A:

$$A = P_1 . P_2 \ldots ,$$

wobei die Formenklassen $P_1, P_2, \ldots$ jeweils die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ darzustellen fähig sind. Es wird also dann

$$A . x_\mu = P_1 . P_2 \ldots x_\mu$$
$$= P_1 [P_2 (\ldots x_\mu \ldots)] ,$$

oder

$$A . x_\mu = A(x_\mu) ,$$

wo A wieder eine Function von der wiederholt angegebenen Beschaffenheit bedeutet.

Die so gewonnenen Functionen A befolgen, wie sich aus ihrer Ableitung von selbst ergiebt, in ihren gegenseitigen Beziehungen dieselben Gesetze, welche für die Composition der entsprechenden Formenklassen Geltung haben; sie sind also insbesondere vertauschbar. Hieraus folgt:

Die Gleichungen $F_\Delta(x) = 0$ werden durch Adjunction von $\sqrt{-\Delta}$ zu Abel'schen Gleichungen.

§ 3.

Irreducibilitätsbeweis für die Gleichungen $F_\Delta(x) = 0$.

Im vorigen Paragraphen ist für die Gruppe der Gleichungen der complexen Multiplication eine *obere* Grenze abgeleitet wor-

en. Nun soll gezeigt werden, dass wenn ausser $\sqrt{-\varDelta}$ keine eiteren Irrationalitäten adjungirt werden, die besprochenen leichungen irreducibel sind. Damit wird zugleich gezeigt sein, ass die Gruppe jener Gleichungen mit der im vorigen Pararaphen erhaltenen »Gruppe der Composition« identisch ist. enn diese ist *genau einfach transitiv*, also jede eigentliche Unrgruppe derselben notwendig intransitiv.

Der den folgenden Auseinandersetzungen zu Grunde lieende Gedankengang ist derselbe, welcher zuerst von Herrn EDEKIND zum Beweise der Irreducibilität der Kreistheilungsleichungen verwendet worden ist[1]. Es wird gezeigt, dass das Polynom $F_\varDelta(x)$ nach einer Primzahl $p > 3$, für welche

$$\left(\frac{-\varDelta}{p}\right) = +1,$$

als Modul betrachtet, keine doppelten Factoren enthält. Andererseits wird bewiesen werden, dass, wenn $f(x)$ einen irreduciblen Factor von $F_\varDelta(x)$ bedeutet, und $f_1(x)$ jenes Polynom, dessen Wurzeln aus denen von $f(x)$ durch Composition mit der Formenklasse P hervorgehen, in $f_1(x)$ (mod p) keine Factoren enthalten sind, welche nicht schon in $f(x)$ (mod p) vorkämen. Aus diesen beiden Resultaten wird man schliessen, dass $F_\varDelta(x)$ selbst der in Frage stehende irreducible Factor ist. Genauer genommen handelt es sich hier nicht eigentlich um die Primzahl p, sondern um einen der beiden in ihr enthaltenen idealen Primfactoren ($\mathfrak{p}$) des Körpers $(1, \sqrt{-\varDelta})$. Es ist aber leicht zu sehen, dass in eben diesem Körper die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots p-1$$

ein vollständiges Restsystem (mod $\mathfrak{p}$) bilden, wie im Gebiete der rationalen Zahlen nach dem Modul p. Also kann man als Primfactoren der ganzen Functionen einer unbestimmten Grösse in unserem Falle genau dieselben Polynome auswählen, wie in der Theorie der gewöhnlichen höheren Congruenzen[2].

Ein sehr einfaches Verfahren dient zunächst dazu, die Eigenschaften der Modulargleichungen vom Transformations-

---

1) CRELLE's Journal, Bd. 54, S. 27.

2) Vgl. hinsichtlich dieser Theorie: DEDEKIND in CRELLE's Journal, Bd. 54, S. 1.

grade p^λ nach dem Primideal $\mathfrak{p}$ als Modul ausfindig zu machen. Wir erörtern dasselbe an dem einfachsten Falle der Transformation p^{ter} Ordnung. Bezeichnet man mit Q die sonst mit q^2 benannte Grösse

$$e^{2\pi i\omega},$$

so ist der ursprüngliche Modul

$$x = \frac{1}{Q}\{1 + \gamma_1 Q + \gamma_2 Q^2 + \ldots\};$$

aus ihm gehen die sämmtlichen transformirten Moduln hervor, indem man für Q die Grössen

$$Q^{\frac{1}{p}},\quad \alpha Q^{\frac{1}{p}},\ \ldots,\ \alpha^{p-1} Q^{\frac{1}{p}},\ Q^p \qquad \left(\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p}}\right)$$

einsetzt. Es ist also

$$\Phi_p(x, y) = \prod_{r=0}^{p-1} \frac{1}{\alpha^r Q^{\frac{1}{p}}}\{1 + (\gamma_1 - y)\alpha^r Q^{\frac{1}{p}} + \gamma_2 \alpha^{2r} Q^{\frac{2}{p}} \ldots\}$$

$$\cdot \frac{1}{Q^p}\{1 + (\gamma_1 - y)Q^p + \gamma_2 Q^{2p} + \ldots\}.$$

Nun wird aber

$$\prod_{r=0}^{p-1} \frac{1}{\alpha^r Q^{\frac{1}{p}}}\{1 + (\gamma_1 - y)\alpha^r Q^{\frac{1}{p}} + \gamma_2 \alpha^{2r} Q^{\frac{2}{p}} + \ldots\}$$

$$\equiv \left[\frac{1}{Q^{\frac{1}{p}}}\{1 + (\gamma_1 - y)Q^{\frac{1}{p}} + \gamma_2 Q^{\frac{2}{p}} + \ldots\}\right]^p$$

$$\equiv \frac{1}{Q}\{1 + (\gamma_1 - y^p)Q + \gamma_2 Q^2 + \ldots\}$$

$$\equiv x - y^p \pmod{\mathfrak{p}},$$

und

$$\frac{1}{Q^p}\{1 + (\gamma_1 - y)Q^p + \gamma_2 Q^{2p} + \ldots\}$$

$$\equiv \left[\frac{1}{Q}\{1 + \gamma_1 Q + \gamma_2 Q^2 + \ldots\}\right]^p - y$$

$$\equiv x^p - y \pmod{\mathfrak{p}},$$

wie man findet, indem man bekannte Sätze über höhere Congruenzen so anwendet, als ob die vorkommenden *unendlichen*

Reihen Polynome in $Q^{\frac{1}{p}}$ resp. Q und y wären. Die Rechtfertigung dieses Verfahrens darf als ganz elementar wohl übergangen werden. Es resultirt

$$\Phi_p(x, y) \equiv (x - y^p)(x^p - y) \pmod{\mathfrak{p}} .$$

In ähnlicher Weise erhält man allgemein:

$$\Phi_{p^\lambda}(x, y) \equiv \frac{(x - y^{p^\lambda})(x^p - y^{p^{\lambda-1}}) \dots . (x^{p^\lambda} - y)}{(x - y^{p^{\lambda-2}}) \dots . (x^{p^{\lambda-2}} - y)} ,$$

wo die rechte Seite nur scheinbar Bruchform besitzt.

Setzt man in diese Congruenz

$$y = x$$

ein, so bietet der Fall eines ungeraden λ keine weitere Schwierigkeit. Für ein gerades λ hingegen verschwindet die rechte Seite identisch. In der That muss man in diesem Falle das Polynom $\Phi_{p^\lambda}(x, x)$ vor der Reduction nach dem Zahlenmodul p durch p dividiren, um das gewünschte Resultat zu erlangen. Die geringe hierdurch geschaffene Complication soll indess hier nicht ferner zur Sprache kommen.

Es bezeichne Kürze halber

$$\Pi_{p^\nu . \Delta_\mu}$$

das Product über alle

$$F_{p^\nu . \Delta_\mu}(x) ,$$

für welche Δ_μ durch p nicht theilbar, und die Hauptform der Determinante $-\Delta_\mu p^\mu$ aber keine niedrigere Potenz von p darzustellen fähig ist. Dann ist nach § 2

$$\Phi_{p^\lambda}(x, x) = \Pi^2_{\Delta_\lambda} . \Pi^2_{p^2 \Delta_{\lambda-2}} \dots .$$

Wir leiten nun aus den angegebenen Relationen neue ab, indem wir jedes vorkommende Polynom durch dasjenige ersetzen, dessen Wurzeln aus dem des ursprünglichen durch Transformation p^{ter} Ordnung hervorgehen. Hierbei verwandelt sich

$$\begin{array}{lll} \Pi_{p^\varkappa \Delta_\mu} & \text{in } \Pi^p_{p^{\varkappa+2}\Delta_\mu} & . \Pi_{p^{\varkappa-2}\Delta_\mu} \quad (\varkappa \geqq 2) \\ \Pi_{p \Delta_\mu} & \text{in } \Pi^p_{p^3 \Delta_\mu} & . \Pi_{p \Delta_\mu} \\ \Pi_{\Delta_\mu} & \text{in } \Pi^{p-1}_{p^2 \Delta_\mu} & . \Pi^2_{\Delta_\mu} . \end{array}$$

Ferner geht modulo $\mathfrak{p}$ genommen jedes Polynom $\varphi(x)$ mit Rücksicht auf

$$(x - y^p)(x^p - y) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

über in

$$\varphi(x^p) \,.\, \varphi(x) \equiv \varphi(x)^{p+1} \pmod{\mathfrak{p}} \;.$$

Indem man nun alle die erhaltenen Congruenzen in geeigneter Weise verbindet, erhält man das Resultat:

Das Polynom Π_{Δ_λ} ist nach dem Modul $\mathfrak{p}$ ein Divisor von $x^{p^\lambda} - x$.

Aus bekannten Eigenschaften der Function $x^{p^\lambda} - x$ folgt dann:

Das Polynom $F_{\Delta_\lambda}(x)$ enthält keine zwei nach dem Modul $\mathfrak{p}$ congruente Factoren.

Hierdurch ist der erste Theil des Beweises im Allgemeinen skizzirt.

Es sei jetzt $f(x)$ ein in $F_\Delta(x)$ enthaltener irreducibler Factor. Unterwirft man diesen der Transformation p^{ter} Ordnung, so entsteht ein neues Polynom, welches nach Früherem

$$\equiv f(x)^{p+1} \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist. Dieses Polynom enthält also keine nicht schon in $f(x)$ aufgehenden Primfactoren. Unter den Wurzeln desselben befinden sich aber alle aus den Wurzeln von $f(x)$ durch Composition mit P hervorgehenden singulären Moduln, welche selbst ebenfalls Wurzeln von $F_\Delta(x) = 0$ sind. Hierdurch ist der zweite Punkt des angekündigten Beweises erledigt.

Wir fassen das Gesammtresultat etwa so zusammen:

Die Gleichungen der complexen Multiplication $F_\Delta(x) = 0$ sind nach Adjunction von $\sqrt{-\Delta}$ irreducible Abel'sche Gleichungen (im weiteren Sinne des Worts).

Prag, im December 1884.

Theodor Molien, *Ueber gewisse, in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Einheitswurzeln.* Vorgelegt von Prof. *Klein*.

In der Theorie der linearen Transformation der ϑ-Functionen knüpft sich ein besonderes Interesse an die Bestimmung einer in der Transformationsgleichung als Factor auftretenden 8. Einheitswurzel; ein gleiches Interesse gilt dem Verhalten der Hermite'schen Functionen $\chi(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$. Von dem Standpuncte der Weierstrass'schen Theorie aus lässt sich das Verhalten aller jener Functionen, soweit es auf diese Einheitswurzel Bezug hat, aus dem Verhalten einer einzigen Function, der 24. Wurzel aus der Discriminante, schliessen [1]. Das Folgende enthält zunächst hierfür den Nachweis.

Es seien ω_1 und ω_2 die Perioden der Function $p(u)$, die Bezeichnung derselben sei so gewählt, dass der reelle Bestandtheil von $\frac{\omega_2}{\omega_1 i}$ positiv ist; ferner sei Δ die Discriminante.

Bei linearen Substitutionen der Perioden:

$$1)\qquad \begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}$$

verhält sich Δ invariant, eine n^{te} Wurzel aus Δ erhält einen Factor, der eine n^{te} Einheitswurzel ist.

Die ϑ_i werden durch folgende Gleichungen definirt:

---

1) Man vergl. die verwandte Auffassung bei Dedekind (Riemann's Werke, p. 438 ff. oder Journal für Mathematik, Bd. 83, p. 281 ff.); die Function $\eta(\omega)$ ist in unserer Bezeichnung gleich $\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} \cdot \sqrt[24]{\Delta}$.

$$
2)\begin{cases}
\sigma(u)\,.\,\sqrt[8]{\Delta} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\,.\,e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,.\,\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1}, q\right), \\
\sigma_1(u)\,.\,\frac{\sqrt[12]{\Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)}}{\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\,.\,e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,.\,\vartheta_2\left(\frac{u\pi}{\omega_1}, q\right); \\
\sigma_2(u)\,.\,\frac{\sqrt[12]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}}{e^{\frac{\pi i}{24}}\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\,.\,e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,.\,\vartheta_3\left(\frac{u\pi}{\omega_1}, q\right), \\
\sigma_3(u)\,.\,\frac{\sqrt[12]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\,.\,e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,.\,\vartheta_0\left(\frac{u\pi}{\omega_1}, q\right).
\end{cases}
$$

Desgleichen ist:

$$
3)\qquad \chi(\omega) = \frac{e^{\frac{\pi i}{24}}\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}{\sqrt[24]{\Delta\left(\omega_1 \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}};
$$

$$
\varphi(\omega) = \frac{e^{\frac{\pi i}{24}}\sqrt[24]{\Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}}; \quad \psi(\omega) = \frac{e^{\frac{\pi i}{24}}\sqrt[24]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}}.
$$

Bei linearer Transformation werden nun die σ_i nur permutirt; in der That fällt also die Bestimmung der Einheitswurzeln ganz auf die 24. Wurzeln aus Δ und seinen transformirten Werthen zurück, in letzter Instanz auf $\sqrt[24]{\Delta}$ allein. Hierdurch ist eine systematische Behandlung jener Fragen gegeben, die eine genauere Erforschung von $\sqrt[24]{\Delta}$, abgesehen von dem Interesse, welches letztere an und für sich hat, wünschenswerth erscheinen lässt. Ich habe versucht, die hier angedeutete Frage zu beantworten, und theile hier die Resultate mit.

In erster Linie enthält die nachstehende Mittheilung die Bestimmung des Factors, um den sich $\sqrt[24]{\Delta}$ bei linearer Transformation ändert, in zweiter Reihe folgen die sich daraus ergebenden Anwendungen.

Bevor ich zur eigentlichen Behandlung der Frage übergehe, will ich noch eine Bemerkung vorausschicken. Die Function $\sqrt[24]{\Delta}$ ist durch folgende Gleichung als eine Productentwicklung gegeben:

$$\sqrt[24]{\Delta} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot q^{\frac{1}{12}} \prod_1^{\infty}(1 - q^{2m}) ;$$

die linear transformirte Function durch die folgende:

$$\sqrt[24]{\Delta'} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega'_1}} \cdot q'^{\frac{1}{12}} \prod_1^{\infty}(1 - q'^{2m}) .$$

In der Annahme der Zeichen von $\sqrt{\omega_1}$ und $\sqrt{\omega'_1}$ liegt vor der Hand eine Willkürlichkeit, die durch eine von vornherein gemachte Festsetzung aufgehoben werden kann.

Diese Festsetzung sei nun so gemacht, dass $\sqrt{\omega_1}$ einen beliebigen, aber festen Werth unter seinen beiden erhalte, $\sqrt{\omega'_1}$ aber durch $\sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}} \cdot \sqrt{\omega_1}$ bestimmt werde, wobei der Werth von $\sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}}$ so angenommen wird, dass sein *reeller Theil positiv* ist; wenn derselbe aber 0 sein sollte, soll der *imaginäre Theil positiv* sein. Diese Bestimmung kommt mit dem Ziehen eines Querschnittes in der Ebene ω_1, geradlinig von 0 über $-\omega_1$ ins Unendliche, überein. Im Übrigen ist, zur Vermeidung jeder Zweideutigkeit, die für $\sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}}$ geltende Festsetzung hier auf alle irgendwie vorkommenden Quadratwurzeln ausgedehnt worden.

§ 1.

Methoden, die zu einer ersten Bestimmung des Factors dienen.

Es sei:

$$\sqrt[12]{\Delta(\omega'_1, \omega'_2)} = k \sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} .$$

Zunächst führen wir einzelne Fälle an, die eine besonders einfache Erledigung gestatten, nämlich diejenigen, wo einer oder zwei der Substitutionscoefficienten gleich Null sind. Dies sind die folgenden:

$$\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, n\omega_1 + \omega_2)} = e^{\frac{n\pi i}{12}} \cdot \sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} \quad ,$$

$$\text{4a)} \quad \sqrt[24]{\Delta(\omega_1 + m\omega_2, \omega_2)} = e^{-\frac{m\pi i}{12}} \cdot \sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} \quad ,$$

$$\sqrt[24]{\Delta(-\omega_2, \omega_1)} = e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot \sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} \quad ,$$

schliesslich, wegen der Festsetzung über den Querschnitt:

$$\text{4b)} \quad \sqrt[24]{\Delta(-\omega_1, -\omega_2)} = -i \cdot \sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} \ .$$

Diese vier Formeln reichen in Fällen, in welchen es sich um numerische Bestimmung von k handelt, unmittelbar aus. Man vergleiche hierzu insbesondere SCHEIBNER in den Berichten d. sächs. Gesellschaft von 1862, p. 90 ff. Dagegen scheint eine directe Behandlung des allgemeinen Falles auf Grund derselben schwierig und ich habe also vorgezogen, analytische Umformungen zu benutzen [1]).

Zur analytischen Behandlung unseres Problems bieten sich vor Allem zweierlei Ansätze, deren erster von CAUCHY [2]), deren zweiter von HERMITE [3]) herrührt [4]). Bei Benutzung von CAUCHY's Methode gelangt die bekannte Reihe für $\sqrt[24]{\Delta}$ zur Anwendung:

$$\text{5)} \quad \sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda (-1)^{\lambda} \cdot q^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \quad ,$$

---

1) Beiderlei Methoden hat, was die lineare Transformation der ϑ angeht, bekanntlich JACOBI bereits in seinen Vorlesungen behandelt; vergl. die Andeutung in CRELLE's Journal, Bd. 36, p. 111 (Werke, Bd. II, p. 189).

2) CAUCHY, Bulletin de la société philomatique, Aug. 1817. Hr. KRONECKER giebt eine Darstellung dieser Methode in den Berliner Monatsberichten von 1880.

3) HERMITE, Journal des Mathématiques, sér. II, t. 3, 1858.

4) Es giebt noch eine Reihe anderer Verfahrungsweisen, die ich wenigstens anführen will. Man sehe, was lineare Transformation der ϑ angeht: GORDAN, Habitationsschrift (Giessen 1863), THOMAE, Abriss einer Theorie der complexen Functionen etc., 2. Aufl. (Halle 1873), ferner auch die Behandlung von log. Δ bei DEDEKIND (RIEMANN's Werke, p. 438 ff.).

bei HERMITE's Methothe wird man sich der folgenden Reihe bedienen:

$$6)\quad \Phi(u, \omega_1, \omega_2)$$
$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot e^{\frac{3\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \cdot q^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cdot \cos(6\lambda+1)\frac{u\pi}{\omega_1},$$

welche Herr KIEPERT im 87. Bande des Journals für Mathematik aufgestellt hat (p. 213 daselbst) und deren Werth

$$\sqrt[24]{\Delta} \cdot \sigma_1 u \cdot \sigma_2 u \cdot \sigma_3 u$$

ist. An dieser Stelle werde ich nur die Bestimmung von k nach der CAUCHY'schen Methode ausführen.

Es sei $\omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $\omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$; wir zerlegen dann $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ und $\frac{\omega'_2}{\omega'_1}$ jedes in zwei Theile:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\alpha}{\beta} + iy^2$$
$$\frac{\omega'_2}{\omega'_1} = \frac{\delta}{\beta} + \frac{i}{\beta^2 y^2};$$

y^2 ist eine complexe Grösse, deren reeller Bestandtheil positiv ist. Hierdurch sind die Reihen für $\sqrt[24]{\Delta}$ und $\sqrt[24]{\Delta'}$ in folgende Form gebracht worden:

$$7)\quad \sqrt[24]{\Delta} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \cdot e^{-\frac{\pi i\alpha}{12\beta}(6\lambda+1)^2 - \frac{\pi y^2}{12}(6\lambda+1)^2}$$

und

$$8)\quad \sqrt[24]{\Delta'} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega'_1}} \cdot \sum_{1}^{2\beta} {}_{\lambda} (-1)^{\lambda} R_{\lambda} \cdot e^{\frac{\delta\pi i}{12\beta}(6\lambda+1)^2},$$

wobei zur Abkürzung:

$$R_{\lambda} = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{m}\, e^{\frac{-\pi}{12\beta^2 y^2}(12m\beta+6\lambda+1)^2}$$

gesetzt worden ist. Durch Ausführung der CAUCHY'schen Transformation auf R_{λ} erhält man für diese Grösse eine nach Potenzen von $e^{-\frac{\pi y^2}{12}}$ fortschreitende Reihe, nämlich:

$$9)\quad R_\lambda = \sqrt{\frac{\omega'_1}{8\beta i\omega_1}}\left(\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} n\, e^{-\frac{n^2\pi y^2}{12}} \cos n \frac{6\lambda+1}{6\beta}\pi\right);$$

sonach ist auch für $\sqrt[24]{\Delta'}$ eine Reihe bekannt, die nach Potenzen von $e^{-\pi y^2}$ fortschreitet, wodurch uns eine Vergleichung derselben mit der Reihe für $\sqrt[24]{\Delta}$ ermöglicht ist. Bei der Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von $e^{-\pi y^2}$ ist noch zu beachten, dass wir wegen der Festsetzung über die Zeichen der Wurzeln

$$10)\quad \sqrt{\frac{\pi}{\omega'_1}} \cdot \sqrt{\frac{\omega'_1}{3\beta\omega_1 i}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3\beta^2}}\, e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\omega_1}}$$

setzen müssen; bei Berücksichtigung dieses Umstandes erhalten wir für k den folgenden Ausdruck:

$$11)\quad k = \left(\frac{3}{n}\right)\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3\beta^2}} \cdot e^{i\pi\frac{\alpha n^2 - 3\beta}{12\beta}} \sum_1^{2\beta}(-1)^{\lambda} \cdot e^{\frac{\delta\pi i}{12\beta}(6\lambda+1)^2} \cos n \frac{6\lambda+1}{6\beta}\pi,$$

wobei indess n von der Form $6g \pm 1$ sein muss. Für durch 2 oder 3 theilbare Werthe von n erhält die Summe:

$$\sum_1^{2\beta}(-1)^{\lambda} \cdot e^{\frac{\delta\pi i}{12\beta}(6\lambda+1)^2} \cos n \frac{6\lambda+1}{6\beta}\pi$$

den Werth 0.

Genau zu demselben Werthe von k gelangt man durch die Bestimmung nach der HERMITE'schen Methode. Ich darf die diesbezügliche Ausführung hier wohl unterlassen, einestheils, weil man genau den angegebenen Weg zu verfolgen hat, anderntheils weil ich in Bezug auf die CAUCHY'sche Methode schon ausführlich gewesen bin [1]).

---

1) [Eine Bestimmung von k nach der HERMITE'schen Methode unter Benutzung der Reihe (5) hat mir Hr. KIEPERT bereits vor Jahren privatim mitgetheilt; sein Resultat stimmt genau mit der Formel (11) des Textes überein, sofern man in dieser $n = 1$ setzt. F. KLEIN.]

§ 2.

Explicite Darstellung der Einheitswurzel.

Wir haben nunmehr die Aufgabe vor uns, aus dem Ausdrucke (11) für k diese Grösse frei von fremden Bestandtheilen als eine reine Einheitswurzel darzustellen. Wegen der in diesem Ausdrucke vorkommenden Summe haben wir auf die Theorie der Gauss'schen Summen zurückzugehen, aus welcher wir uns der Formel erinnern:

$$\sum_{1} e^{\frac{2m^2\pi i}{n}} = \varphi(m, n) = \left(\frac{m}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n}},$$

welche für ungerade, aber sowohl positive als auch negative n gilt. Die hier festgehaltene Schreibweise ist in Folge der Festsetzung über die Wurzelzeichen gegenüber der gewöhnlichen in etwas abgeändert worden.

Wir erleichtern uns das Geschäft der Auswerthung jener Summe (11) bedeutend, wenn wir vorher folgende Operationen ausführen:

I. Ist β eine durch 2 oder 3 theilbare Zahl, so bestimmen wir eine ganze Zahl μ_1 so, dass $\beta' = \beta + \mu_1 \delta$ ungerade und durch 3 untheilbar wird.

II. Wir bestimmen eine weitere Zahl μ_2 derart, dass auch $\delta' = \delta + \mu_2 \beta'$ ungerade und durch 3 untheilbar wird.

III. Wir bestimmen zwei weitere Zahlen $\alpha' = \alpha + \mu_1 \gamma$, $\gamma' = \gamma + \mu_2 \alpha'$, und erhalten in $\alpha'\omega_1 + \beta'\omega_2$, $\gamma'\omega_1 + \delta'\omega_2$ eine lineare Substitution der Perioden ω_1, ω_2, für welche wir die Zahl $k = k'$ bestimmen wollen.

Gehen α, β, γ, δ in α', β', γ', δ' über, so geht k in

$$k' = e^{\frac{\pi i(\mu_1 - \mu_2)}{12}} \cdot k$$

über. Die Zahlen μ_1 und μ_2 können nämlich dabei immer so gewählt werden, dass bei dem Uebergange von $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ zu $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ der Querschnitt in der Ebene ω_1 nicht überschritten wird.

Die folgende Tafel enthält die Werthe von μ_1, μ_2, $1 + \mu_1\mu_2$ für die neun verschiedenen möglichen Fälle, welche modulo 6 zu unterscheiden sind:

Nr.	$\beta \equiv$	$\delta \equiv$	μ_1	μ_2	$1 + \mu_1\mu_2$
1	± 1	± 1	0	0	1
2	± 1	0	0	1	1
3	± 1	3	0	2	1
4	± 1	± 2	0	3	1
5	3	± 2	1	3	4
6	3	± 1	2	0	1
7	± 2	± 1	3	0	1
8	0	± 1	1	0	1
9	∓ 2	3	1	2	3

Eventuell können, um etwaiges Ueberschreiten des Querschnitts zu vermeiden, μ_1, μ_2 um $24p$ vermehrt werden.

Im Falle 1 ist jetzt die Bestimmung von k ohne Schwierigkeit, wenn wir $n = \delta$ setzen. Wir erhalten:

$$12) \qquad k = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3\beta^2}} \cdot \left(\frac{3}{\delta}\right) \cdot e^{\frac{\gamma\delta - 3}{12}\pi i} \cdot \sum_1^{2\beta} (-1)^{\lambda} \left(e^{\frac{(6\lambda + 2)^2 \delta\pi i}{12\beta}} + e^{\frac{(6\lambda)^2\delta\pi i}{12\beta}} \right),$$

und nach der Umsetzung der Summe in GAUSS'sche Summen:

$$k = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3\beta^2}} \cdot \left(\frac{3}{\delta}\right) \cdot e^{\frac{\gamma\delta - 3}{12}\pi i} \cdot \left(\frac{3}{2}\,\varphi(6\delta, \beta) - \frac{1}{2}\,\varphi(2\delta, 3\beta) \right).$$

Die Eintragung der Werthe für die GAUSS'schen Summen ergiebt:

$$k = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3\beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{3\beta^2}}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{\delta}{\beta}\right) \cdot e^{\pi i \frac{\gamma\delta - 3 + 2\beta\delta}{12}} \cdot i^{1-\beta},$$

oder schliesslich:

$$13) \qquad k = \left(\frac{\delta}{\beta}\right) \cdot e^{\frac{\pi i}{12}(\gamma\delta + 2\beta\delta - 3\beta)},$$

oder auch:

$$14) \qquad k = r \cdot \left(\frac{\delta}{\beta}\right) \cdot e^{\frac{\pi i}{12}(\gamma\delta - \beta\delta + 3\delta - 3)}.$$

Der Factor r rührt von der Umsetzung des Jacobi'schen Zeichens her; er bedeutet $+1$, wenn irgend eine der Zahlen β oder δ positiv ist, -1, wenn beide negativ sind.

Im Übrigen ist die Bevorzugung von β und δ eine durch die Methode herbeigeführte Zufälligkeit, der durch veränderte Reihenfolge von α, β, γ, δ leicht zu begegnen ist, wie aus der folgenden kleinen Tabelle hervorgeht:

Subst.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
α_1	α	δ	δ	α	β	$-\gamma$	γ	$-\beta$
β_1	β	$-\gamma$	$-\beta$	γ	$-\alpha$	$-\delta$	$-\alpha$	$-\delta$
γ_1	γ	$-\beta$	$-\gamma$	β	δ	α	δ	α
δ_1	δ	α	α	δ	$-\gamma$	β	$-\beta$	γ
k_1	k	$\varrho . k$	$\frac{\varrho}{k}$	$\frac{\varrho}{k}$	$\varrho . kj^3$	ϱkj^3	$\frac{\varrho j^3}{k}$	$\frac{\varrho j^3}{k}$

Die Factoren ϱ in der letzten Horizontalreihe bedeuten dabei die positive oder negative Einheit; sie sind dazu bestimmt, etwaige Ueberschreitungen des Querschnitts beim Uebergange von der Substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ zu der in der betreffenden Verticalreihe enthaltenen auszugleichen. Insbesondere liefert die 6. Verticalreihe, wie eine leichte Umrechnung zeigt, aus 13) die Formel 14); ϱ ist daher in diesem Falle

$$= r = (-1)^{\frac{\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}-1}{2} \cdot \frac{\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2}}-1}{2}} .$$

Wir kehren zu der Aufgabe zurück, k in den acht übrig bleibenden Fällen zu bestimmen. Wir benutzen dazu die Relation $k = k' \cdot e^{\frac{\mu_1 - \mu_2}{12}\pi i}$ und finden nach kurzer Zwischenrechnung:

für Fall 2—5:

$$k = \left(\frac{\delta}{\beta}\right) e^{\frac{\pi i}{12}(\gamma\delta + 2\beta\delta - 3\beta)} \cdot e^{\frac{\pi i}{12}(\mu_2^2\alpha\beta + 2\mu_2\alpha\delta)},$$

für Fall 6—9:

$$k = r\left(\frac{\beta}{\delta}\right) e^{\frac{\pi i}{12}(\gamma\delta - \beta\delta + 3\delta - 3)} \cdot e^{\frac{\pi i}{12}\mu^2_2\alpha\beta}.$$

Nun ist in den Fällen 2—5:

$$e^{\frac{\pi i}{12}(\mu^2_2\alpha\beta + 2\mu_2\alpha\delta)} = e^{\frac{\pi i}{12}\alpha\beta(1 - \delta^2)},$$

in den Fällen 6—9:

$$e^{\frac{\pi i}{12}\mu^2_2\alpha\beta} = e^{\frac{\pi i}{12}\alpha\beta(1 - \delta^2)},$$

somit gilt überhaupt:

$$15)\ \begin{cases} k = \left(\frac{\delta}{\beta}\right) e^{\frac{\pi i}{12}[\gamma\delta + 2\beta\delta - 3\beta + \alpha\beta(1 - \delta^2)]}, & \textit{wenn } \beta \textit{ ungerade ist,} \\ k = r\left(\frac{\beta}{\delta}\right) e^{\frac{\pi i}{12}[\gamma\delta - \beta\delta + 3\delta - 3 + \alpha\beta(1 - \delta^2)]}, & \textit{wenn } \delta \textit{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Zum Schluss mögen noch Potenzen von k angeführt sein, die Interesse verdienen. Dies sind:

1) Die zweite Potenz von k. Man findet:

$$16)\ \begin{cases} k^2 = e^{\frac{\pi i}{6}\{\delta(\gamma - \beta + 3) - 3 + (1 - \delta^2)(\alpha\beta + 3\beta - 3)\}} \\ \text{oder auch:} \\ k^2 = e^{\frac{\pi i}{6}\{\beta(\alpha + \delta - 3) + (1 - \beta^2)(\alpha\gamma + 3\alpha + 3)\}}, \end{cases}$$

welche Zahl von Herrn HURWITZ [1]) bestimmt worden ist. In der That stimmt der Ausdruck 16) mit dem seinigen überein.

2) Die dritte Potenz von k. Es folgt:

$$17)\ \begin{cases} k^3 = \left(\frac{\delta}{\beta}\right) e^{\frac{\pi i}{4}(\alpha\beta + \beta\delta - 3\beta)}, & \text{wenn } \beta \text{ ungerade,} \\ k^3 = r\left(\frac{\beta}{\delta}\right) e^{\frac{\pi i}{4}(\gamma\delta - \beta\delta + 3\delta - 3)}, & \text{wenn } \delta \text{ ungerade.} \end{cases}$$

r hat in diesen Formeln die nämliche Bedeutung, wie vorhin.

---

1) HURWITZ, Mathem. Annalen, Bd. 18, p. 566.

k^3 ist unmittelbar diejenige Einheitswurzel, welche bei der linearen Transformation von ϑ_1 in Betracht kommt. Die Vergleichung unseres Resultates mit dem bez. von anderer Seite gefundenen gestaltet sich am einfachsten, wenn man die Formeln zu Grunde legt, welche STEPHEN SMITH im 35. Bande der Reports of the British Association (1865) gegeben hat (p. 329). Der Factor r scheint dort und anderwärts übersehen zu sein.

§ 3.

Anwendung auf die $\sqrt[4]{e_i - e_k}$ und die Hermite'schen Functionen.

Die bei der linearen Transformation der übrigen ϑ_i auftretenden Einheitswurzeln sind dieselben, welche man bei der linearen Transformation der $\sqrt[4]{e_i - e_k}$ findet. Das Verhalten dieser letzteren Grössenreihe ist überhaupt ein demjenigen von ϑ_1, ϑ_3, ϑ_0 analoges. Wir besitzen für dieselben folgende Ausdrücke:

$$18)\quad \begin{cases} \sqrt[4]{e_2 - e_3} = \dfrac{\sqrt[12]{\Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_1\right)}}{\sqrt[6]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}} \cdot \sqrt[8]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = u_{10} \cdot \sqrt[8]{\Delta}, \\ \sqrt[4]{e_1 - e_3} = e^{-\frac{\pi i}{24}} \cdot \dfrac{\sqrt[12]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}}{\sqrt[6]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}} \cdot \sqrt[8]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = u_{11} \cdot \sqrt[8]{\Delta}, \\ \sqrt[4]{e_1 - e_2} = \dfrac{\sqrt[12]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}{\sqrt[6]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}} \cdot \sqrt[8]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = u_{01} \cdot \sqrt[8]{\Delta}. \end{cases}$$

Unter dem Einfluss einer linearen Transformation gehe $u_{\mu\nu}$ über in

$$19)\quad u'_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} \cdot u_{\mu'\nu'},$$

wo die Indices μ', ν' 0 oder 1 sind und durch die Congruenzen:

$$20)\quad \left\{ \begin{aligned} \mu' &\equiv \alpha\mu + \gamma\nu \\ \nu' &\equiv \beta\mu + \delta\nu \end{aligned} \right\} \pmod{2}$$

gegeben sind.

Eine lineare Transformation, die mod. 2 der Identität congruent ist, lässt μ und ν ungeändert. Jede beliebige Transformation $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ kann als eine aus einer solchen (a, b, c, d) und einer Transformation $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ angesehen werden, wo $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ gleich 0 oder ± 1 sind und der Reihe nach zu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mod. 2 congruent sind.

Der Einfluss der Transformation a, b, c, d ist der folgende:

$$u'_{\mu\nu} = u_{\mu\nu} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}(ab\mu - cd\nu + 2d - 2)}$$

und in der nachstehenden kleinen Tabelle ist sowohl das Verhalten dieser Substitution bei den Substitutionen $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, als auch die Art, wie sich $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus a, b, c, d und $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ zusammensetzt, angegeben:

Nr.	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	u'_{10}	u'_{11}	u'_{01}	a	b	c	d
I	1	0	0	1	u_{10}	u_{11}	u_{01}	α	β	γ	δ
II	1	0	1	1	u_{10}	$1^{-\frac{1}{8}} u_{01}$	$1^{-\frac{1}{8}} u_{11}$	$\alpha - \beta$	β	$\gamma - \delta$	δ
III	1	1	0	1	$1^{\frac{1}{8}} u_{11}$	$1^{\frac{1}{8}} u_{10}$	u_{01}	α	$\beta - \alpha$	γ	$\gamma - \delta$
IV	1	1	-1	0	$1^{\frac{1}{8}} u_{11}$	$1^{\frac{1}{8}} u_{01}$	$1^{\frac{2}{8}} u_{10}$	β	$\beta - \alpha$	δ	$\delta -$ [illegible]
V	0	-1	1	1	$1^{-\frac{2}{8}} u_{01}$	$1^{-\frac{1}{8}} u_{10}$	$1^{-\frac{1}{8}} u_{11}$	$\alpha - \beta$	α	$\gamma - \delta$	γ
VI	0	-1	1	0	$1^{-\frac{2}{8}} u_{01}$	$1^{-\frac{1}{8}} u_{11}$	$1^{-\frac{2}{8}} u_{10}$	$-\beta$	α	$-\delta$	γ

Bei der Zusammensetzung der Transformationen, die eine kleine Rechnung erfordert, machen wir, um zu weitläufige Ausdrücke zu vermeiden, eine Unterscheidung, je nachdem $\alpha\delta$ oder $\beta\gamma \equiv 1$ mod. 2 ist. Es ist in den beiden Fällen resp.

$$20)\quad \begin{cases} u'_{\mu\nu} = u_{\mu'\nu'} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}\{(\alpha\beta + 2\alpha - 2)\mu + (-\gamma\delta + 2\delta - 2)\nu - (2\alpha - 2\beta\gamma^2)\mu\nu\}} \\ u'_{\mu\nu} = u_{\mu'\nu'} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}\{(-\alpha\beta + 2\beta)\mu + (\gamma\delta - 2\gamma)\nu - 2\beta - (2\alpha\delta^2)\mu\nu\}} \end{cases}.$$

Hierdurch ist das Verhalten der $\sqrt[4]{e_i - e_k}$ bekannt; um zu einem zusammenfassenden Ausdrucke auch für die lineare ϑ-Transformation zu gelangen, bezeichnen wir ϑ_1 mit ϑ_{00}, ϑ_2 mit

ϑ_{10}; ϑ_3 mit ϑ_{11}, ϑ_0 mit ϑ_{01}. *Alsdann finden wir folgende Schlussformel:*

$$21)\quad \vartheta_{\mu\nu}\left(\frac{u\pi}{\omega'_1}, q'\right) = k^3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu} \cdot \sqrt{\frac{\omega'_1}{\omega_1}} \cdot e^{\pi i \cdot \frac{\beta u^2}{2\omega_1}} \cdot \vartheta_{\mu'\nu'}\left(\frac{u\pi}{\omega_1}, q\right),$$

die auch für ϑ_{00} (gleich dem gewöhnlichen ϑ_1) stimmt, wenn wir ε_{00} durch 1 ersetzen. Man vergl. hierzu wieder STEPHEN SMITH, l. c.

In durchweg analoger Weise ist eine weitere Reihe von Grössen zu behandeln, welche auf die HERMITE'schen Functionen führen. Dieselben sind:

$$22)\quad w_1 = \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)}}{\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}, \qquad w_2 = \frac{e^{-\frac{\pi i}{24}}\sqrt[24]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}},$$

$$w_3 = \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}.$$

Wir erhalten beispielsweise für w_2, wenn wir

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}(\beta\delta - \gamma\delta - \alpha\beta(1-\delta^2))}$$

setzen, in den sechs mod. 2 incongruenten Fällen:

$$23)\left\{\begin{array}{ll}
1) & w'_2 = w_2 \cdot \varrho \cdot e^{-\frac{5\pi i}{8}(\alpha\beta - \alpha\gamma)}; \\
2) & w'_2 = w_3 \cdot \varrho\left(\frac{2}{\delta}\right) e^{-\frac{5\pi i}{8}(\beta\delta - \gamma\delta)}, \\
3) & w'_2 = w_1 \cdot \varrho\left(\frac{2}{\delta}\right) e^{-\frac{5\pi i}{8}(\alpha\beta + \gamma\delta)}, \\
4) & w'_2 = w_3 \cdot \varrho\left(\frac{2}{\gamma}\right) e^{\frac{5\pi i}{8}(\alpha\beta + \gamma\delta)}, \\
5) & w'_2 = w_1 \cdot \varrho\left(\frac{2}{\gamma}\right) e^{-\frac{5\pi i}{8}(\alpha\gamma + \gamma\delta)}, \\
6) & w'_2 = w_2 \cdot \varrho \cdot e^{-\frac{5\pi i}{8}(\alpha\gamma + \gamma\delta)}.
\end{array}\right.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Tafeln für w_1 und w_3.

Die HERMITE'schen Functionen sind $\varphi(\omega) = w_1 : w_2$, $\psi(\omega) = w_3 : w_2$, $\chi(\omega) = 1 : w_2$. Die Verwandlungstafeln für $\varphi(\omega)$ und $\psi(\omega)$, die sich aus denen für w_1, w_2, w_3 ableiten, stimmen mit denjenigen von Herrn HERMITE überein, so wie sich die Verwandlungstafel für w_2 ganz der von Herrn HERMITE für $\chi(\omega)$ gegebenen anschliesst [1].

---

1) Siehe HERMITE in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 46, 48.

W. Knop, *Ueber die Aufnahme verschiedener Substanzen durch die Pflanze, welche nicht zu den Nährstoffen gehören.*

Nachdem mit Hülfe der Wassercultur festgestellt worden war, dass die zur Ernährung der höher organisirten Pflanze *nothwendigen* Substanzen sich auf Wasser und eine geringe Anzahl Mineralbasen und Mineralsäuren beschränken und durch eine andere Reihe von Versuchen bewiesen ist, dass diese nothwendigen nicht durch andere, namentlich auch nicht durch chemisch nahe verwandte, Säuren und Basen vertreten werden können, erschien es angemessen, weitere Versuche über die Aufnahme und Wirkung anderer nicht nothwendiger Substanzen aus vollständigen Nährstofflösungen anzustellen. Eine Aufforderung zu Untersuchungen in dieser Richtung liegt schon in dem Umstande, dass die zahlreichen Analysen von Pflanzenaschen, welche jetzt vorliegen, eine grössere Anzahl von Metalloxyden und Mineralsäuren als Bestandtheile der Pflanzenaschen mit aufzählen, welche nach den Ergebnissen der Wassercultur nur als zufällige Begleiter der nothwendigen Mineralbestandtheile der Pflanze angesehen werden können, und dass eine und die andere Angabe über die Verbreitung solcher accessorischer Mineralbestandtheile im Pflanzenreich, wie z. B. die von Forchhammer gemachte, dass die Pflanzen allgemeiner Kupfer, Zinn, Zink, Blei, Nickel und Kobalt den Mineralen des Bodens entziehen (Poggend. Annal., Bd. 95, p. 6, auch Chem. Centralblatt 1855, p. 423) einer Bestätigung bedürftig erscheint. Diese Angabe fordert jedenfalls die Frage, nach welchen Methoden sind die Oxyde vom Zinn, Blei und Nickel in den Aschen bestimmt worden?

Vereinzelte Versuche in dieser Richtung habe ich schon früher angestellt und ihre Resultate in verschiedenen Abhandlungen beiläufig mit veröffentlicht. Seit einigen Jahren habe ich mich bemüht, Methoden ausfindig zu machen, mittels deren solche Versuche systematisch und in weiterem Umfange ausgeführt werden können. Diese haben sich nach mehrjährigem Gebrauch bewährt und bestehen in folgenden:

1) Ist die zu prüfende Base der Art, dass sie mit der in der vollständigen neutralen Lösung enthaltenen Schwefelsäure und Phosphorsäure keine unlöslichen Verbindungen eingeht, so fügt man zu derselben das salpetersaure oder salzsaure Salz in geringen, bestimmten Mengen hinzu. Ebenso bedient man sich der neutralen Lösung bei Prüfung der Säuren auf ihre Wirkung, wenn dieselben mit der Kalk- und Talkerde lösliche Verbindungen eingehen. Man wendet dann das neutrale Kalksalz oder Kalisalz der Säure an.

Die *neutrale Lösung*, *Normallösung*, soll gegen vier Gewichtstheile salpetersauren Kalk enthalten: ein Gewichtstheil Kalisalpeter, ein Gewichtstheil Kalisuperphosphat PKH_2O_4 und ein Gewichtstheil wasserfrei berechnete schwefelsaure Talkerde $SMgO_4$, d. i. ziemlich genau zwei Gewichtstheile krystallisirtes Bittersalz. In der Lösung dieses Salzgemisches wird dann noch phosphorsaures Eisenoxyd in geringer Menge aufgeschlämmt.

Eine im Allgemeinen zweckmässige Concentration der Lösung ist die von zwei pro Mille Salzgehalt. Ein Liter einer solchen Lösung enthält dann:

Basen	Säuren	In Summa
0,0377 bas. Wasser	0,1491 Phosphors.	0,7552 Basen
0,2320 Kali	0,1905 Schwefels.	1,2448 Säuren
0,3903 Kalk	0,9052 Salpeters.	2,0000 Gramm
0,0952 Magnesia	1,2448 Gramm	
0,7552 Gramm		

Die *saure Lösung* erhält man durch Hinzufügen von 0,07455 Gramm freier Phosphorsäure, berechnet als P_2O_5 zu einem Liter der Normallösung.

Auch diese Lösung kann man von der vorstehenden Concentration, die dann etwas über zwei pro Mille beträgt, anwenden. Die saure Lösung ertragen viele Pflanzen nicht so gut

als die neutrale; es ist deshalb häufig zweckmässig, auch die Concentration von nur eins pro Mille versuchsweise in Anwendung zu bringen. Die saure Lösung enthält anderthalbmal so viel Phosphorsäure, als die neutrale in Form von Kalisuperphosphat PKH_2O_4. Dieser Säuregrad dürfte das Maximum ausdrücken, das ausser einer Verminderung der Massenproduction keinen weiteren nachtheiligen Einfluss auf die Pflanze ausübt.

In der sauren Lösung sind die Phosphate der meisten Metalloxyde und Erden in geringen und, bei vollständiger Sättigung, bestimmten Mengen löslich. Stellt man sich die Phosphate zuvor rein dar und schlämmt sie mit dem phosphorsauren Eisenoxyd zusammen als frisch gefällte, so eben vollständig ausgewaschene Niederschläge in der sauren Nährstofflösung auf, so erleidet die letztere durch den Zusatz keinerlei unbekannte Veränderung in ihrer chemischen Zusammensetzung.

Beide Methoden zusammen gewähren dèn in der angegebenen Richtung anzustellenden Versuchen einen weiten Spielraum.

Jedenfalls ist für solche Versuche die Methode der Wassercultur allen anderen vorzuziehen. Schneidet man die zu untersuchenden Pflanzen drei bis vier Centimeter hoch über dem Kork des Gefässes, in dem sie gewachsen sind, ab, so ist man sicher, dass die bei der Analyse der Aschen wiedergefundenen Substanzen von der Pflanze mittels ihrer Wurzel aufgenommen und in ihr verbreitet waren, während man bei der Cultur in Erde und beliebig anderem Bodenmaterial, das begossen werden muss, nicht verhüten kann, dass die Stämme unten ausserhalb mit der Lösung der betreffenden Substanz benetzt werden, und es leicht fraglich werden kann, ob die geringen Mengen der wiedergefundenen Substanzen wirklich mit den nothwendigen Nährstoffen zusammen aufgenommen wurden oder bloss durch Eintrocknen der Lösung auf den unteren Theilen der Stämme und Blätter als Verunreinigung sich der Asche der Pflanze hinzugesellt haben.

Bei der Beurtheilung der Wirkung solcher Zusätze zur vollständigen Nährstofflösung hat man auf folgende Eigenthümlichkeiten der Entwicklung der Pflanze in wässrigen Lösungen ihrer Nährstoffe Rücksicht zu nehmen.

Junge Pflanzen, so wie dieselben beim Keimen der Samen

auf destillirtem Wasser hervorgehen, bekommen einen mehr oder weniger nachtheiligen Stoss, schon wenn man sie aus dem destillirten Wasser plötzlich in eine stärker concentrirte Lösung von zwei bis fünf pro Mille der normalen Nährstofflösung setzt, und solchen nachtheiligen Einfluss erkennt man auch noch, wenn man dieselben aus verdünnteren Lösungen von 0,5 bis eins pro Mille Concentration in jene concentrirteren Lösungen verpflanzt.

Junge Maispflanzen lassen solche nachtheilige Einflüsse sehr leicht an der Eigenthümlichkeit erkennen, dass sie, sobald die Nährstofflösung ihnen völlig zusagt, bei warmer Luft von etwa 15 bis 20° C. jeden Morgen früh zahlreiche Wassertropfen, oftmals an jeder Blattrippenspitze, hervorgepresst haben, die wie Thautropfen an ihnen hängen bleiben. Sobald die Nährstofflösung den jungen Maispflanzen nicht in jeder Beziehung entspricht, vermögen die Wurzeln nicht den hierzu erforderlichen Druck zu leisten. In der normalen Nährstofflösung erzogene, plötzlich in eine concentrirtere umgesetzte Pflanzen bieten nicht selten diese Erscheinung dar, und gewöhnlich beobachtet man darauf im Verlauf sehr warmer Tage eine Erschlaffung der Blätter, die aber in der folgenden Nacht wieder verschwindet. In einigen Tagen accommodirt sich aber die Wurzel der concentrirteren Nährstofflösung, und nach einem wohl merklichen Stillstand des Wachsthums der Wurzeln fangen diese an, wieder lebhaft sich vorzuschieben und die Blätter an den Enden der Blattnerven im Verlauf der Nacht wieder jene Wassertropfen auszusondern.

Die junge Keimpflanze ist gegen fernere Zusätze von Substanzen, die nicht zu den Nährstoffen gehören, in gleicher Weise viel empfindlicher, als Pflanzen, welche in der Nährstofflösung vor dem Zusatze solcher Substanzen schon stärkere Wurzeln, Stämme und zahlreichere Blätter entwickelt haben.

Nach den bis jetzt mir vorliegenden Resultaten zu urtheilen ist es wahrscheinlich, dass alle Mineralbasen und Mineralsäuren in äusserst geringer Menge mit der Lösung der normalen Nährstoffe aufgenommen werden können, falls sie sich, wenn auch nur spurenweise, in der Nährstofflösung auflösen. Mit organischen Substanzen dürfte es sich anders verhalten.

Die nachtheiligen Wirkungen einer Substanz, die man der vollständigen Nährstofflösung hinzugesetzt hat, werden sichtbar

schwächer, wenn man deren Quantität verringert, die Angaben: nachtheilig und schädlich, bleiben daher unsicher, wenn sie nicht auf jene Quantitäten bezogen werden.

Eine andere Unsicherheit bei der Beurtheilung der Wirkung einer Substanz, die man der Nährstofflösung hinzugesetzt hat, liegt in dem Umstande, dass wir nicht für alle Mineralbasen und Mineralsäuren, und namentlich nicht für organische Substanzen Reactionen besitzen, welche scharf genug sind, um minutiöse Mengen derselben neben den natürlichen Mineralbestandtheilen zu erkennen. Äschert man die erzeugte Pflanze ein oder zerstört man sie durch Erhitzen mit conc. Schwefelsäure oder Salpetersäure, so macht es die Gegenwart des phosphorsauren Eisenoxyds oft allein schon unmöglich, eine Spur eines anderen Metalles, z. B. des Nickels, daneben zu erkennen, während das Kobalt noch sicher an der blauen Farbe erkannt wird, welche die Asche beim Schmelzen mit Phosphorsalz zur Perle annimmt, und Lithion, Strontian und andere noch leicht in der Asche mittels der Spectralanalyse nachgewiesen werden können.

Geben die zu prüfenden Substanzen mit der normalen Nährstofflösung keinen Niederschlag, so hat man es in der Hand, die Quantität, welche ein Liter der Lösung enthalten soll, von vornherein zu bestimmen.

Muss man dagegen die zweite Methode anwenden, und ein beliebiges Quantum des Phosphates einer Erde oder eines Metalloxydes in der sauren Lösung aufschlämmen, so kann man allerdings wohl nachweisen, ob von dem Phosphat sich etwas in der Flüssigkeit löst. Da aber bei den Vegetationsversuchen mit completer Nährstofflösung immer phosphorsaures Eisenoxyd mit jenem Phosphat in der Lösung aufgeschlämmt werden muss, um grüne und nicht gelbsüchtige Pflanzen zu erhalten, so muss man in Fällen, wo die Bestimmung der aufgelösten Quantität des zu prüfenden Phosphates gefordert wird, ein Liter der sauren Nährstofflösung für sich mit demselben Quantum des zu prüfenden Phosphates im Gewächshause längere Zeit stehen lassen und im Filtrat die Quantität des gelösten Phosphates bestimmen.

Bei dem Versuch mit phosphorsaurem Uranoxyd und Chromoxyd wuchsen die Maispflanzen gerade so gut fort, wie in der reinen sauren Nährstofflösung, und in der Asche der

Pflanzen war keine Spur dieser beiden Oxyde nachzuweisen, obschon beide Metalle sehr charakteristische Reactionen haben. Die Prüfung auf die Löslichkeit der Phosphate beider Oxyde ergab nun aber, dass in einem Liter der sauren Lösung auch keine Spur derselben sich gelöst und dass die Pflanze bei diesen Versuchen lediglich in der reinen sauren Nährstofflösung vegetirt hatte. Es ist aber in den meisten Fällen nicht nöthig, solche Lösungen für sich zu analysiren, weil man bei Anwendung der Phosphate in der sauren Nährstofflösung weiss, dass diese bei der langen Dauer der Versuche sich vollständig sättigen, dass sie also eine bestimmte Menge desselben enthalten müssen, die in allen Fällen gering ist. Kommt auf eine genauere Bestimmung etwas an, so kann dieselbe später jederzeit nachgeliefert werden.

Was nun die Resultate der Untersuchungen über die Aufnahme und Wirkung verschiedener, nicht zu den nothwendigen Nährstoffen gehöriger Substanzen durch die Wurzel der Pflanzen anbetrifft, so zeigten Versuche von Dircks und Weigelt (Bericht von der Sitzung am 6. Februar 1869), dass:

Brom und *Jod* bei geringem Zusatz zur neutralen Lösung ebenso unschädlich wie Chlor auf das Wachsthum der Pflanze sind und dass sie sich durch die ganze Pflanze ebenso wie dieses verbreiten. Bei einiger Steigerung der Quantitäten wirkt Brom schädlich und Jod noch schädlicher. Beide wurden in Form von Jodkalium und Jodnatrium der Nährstofflösung hinzugesetzt.

Von *Strontian*, *Baryt* und *Mangan* zeigte ich bereits 1877, dass dieselben ohne allen Nachtheil von Maispflanzen mit aufgenommen werden, während:

Zink aus einer Lösung von 0,1 Zinkvitriol pro Liter und einer Aufnahme von 0,003 g Zinkoxyd pro Exemplar schon giftig wirkte. Ebenso wirkte

Freie Borsäure bei Quantitäten von 0,5 g pro Liter der neutralen Nährstofflösung schon giftig. Die antiseptische Wirkung der Borsäure hängt offenbar damit zusammen. In der Asche der abgestorbenen, 2—3 Centimeter über dem Kork abgeschnittenen Pflanzen liess sich die Gegenwart des Bors nicht nachweisen.

Silber in Form von phosphorsaurem Silberoxyd zur sauren Nährstofflösung hinzugefügt, Goldchlorid in Quantitäten von 0,05 *Goldchlorid* zur sauren Lösung und *Chlorplatinkalium* ebenso

wie *Chlorplatinammonium* bis zur Sättigung in der letzteren Lösung aufgelöst (Versuche von 1882) wirkten giftig.

Kobalt und *Kupfer* werden aufgenommen und wirken giftig. *Nickel* wirkt ebenso wie Kobalt, indess liess sich aus Mangel einer hinreichend genauen Trennungsmethode dasselbe nicht in der Asche nachweisen (Versuche von 1880 und später).

Uranoxyd und *Chromoxyd* wirkten gar nicht auf das Wachsthum der Pflanze, aus dem oben schon angegebenen Grunde. Chromsäure dagegen, in Form von saurem chromsauren Kali und in Quantitäten von 0,05 bis 0,1 zur neutralen Lösung hinzugesetzt, stark giftig (Versuche vom Sommer 1882).

Im Verlauf der beiden letzten Jahre habe ich noch die folgenden Versuche mit Maispflanzen angestellt und über den Verlauf der Vegetationserscheinungen einiger dieser Pflanzen in der letzten Sitzung 1883 berichtet. Die Untersuchung der Aschen konnte erst später ausgeführt werden und stelle ich die Resultate derselben jetzt mit denen der Versuche von vorigem Sommer hier zusammen. Die Versuchspflanze war auch hier Cinquantinomais.

Bei allen diesen Versuchen wurden Pflanzen angewandt, welche Anfangs Mai auf destillirtem Wasser gekeimt, bis Anfang Juni in destillirtem Wasser gestanden und darauf bereits eine Zeit lang in der reinen Nährstofflösung sich bewurzelt hatten. Vanadinsäure in Form von vanadinsaurem Ammoniak und in Quantitäten von 0,05 g und 0,1 g pro Liter saurer Lösung zur sauren Nährstofflösung hinzugesetzt, zeigte schon nach Verlauf von zwei Tagen eine schädliche Wirkung. Während der Versuchsdauer war die Temperatur gerade sehr hoch und die Beleuchtung im Gewächshause stark. Die Temperatur stieg Tags auf 30° C. und sank auch Nachts nicht unter 20° C. Alle Blätter dieser Versuchspflanzen erschlafften im Laufe des Morgens und blieben in diesem Zustande ohne weitere Schädigung bis zur Nacht, in welcher sie sich jedesmal wieder erholten, so dass sie des anderen Morgens früh ihre Turgescenz vollkommen wieder erhalten hatten. Nach Verlauf von vier bis fünf Tagen waren alle Wurzelspitzen und stellenweise längere Strecken der Wurzeln blau gefärbt, durch Reduction der Vanadinsäure zu ihren niederen blauen Oxyden. Die geringe Menge des vanadinsauren Ammoniaks färbt die ganze Lösung schon sehr deutlich gelb. Die Pflanzen starben aber später nicht ab, die einmal

blau gefärbten Wurzeln derselben wuchsen nicht viel weiter; in dem Maasse aber als neue Wurzeln in der Nährstofflösung sich entwickelten, während das aufgesogene Quantum derselben durch neue, nicht ferner mit vanadinsaurem Ammoniak versetzte Lösung ergänzt wurde, wuchsen die Pflanzen bis zum Herbst fort. Blüthen entwickelten sie nicht, was aber mit der Wirkung der Vanadinsäure in keinem Zusammenhang zu stehen braucht. Ob die Säure von der Pflanze oberhalb der Wurzel aufgenommen worden, liess sich in der Asche aus Mangel einer dazu hinreichend scharfen Bestimmungsmethode des Vanadins nicht ermitteln.

Molybdänsäure, ebenso wie vorige Säure als molybdänsaures Ammoniak und in derselben Quantität angewandt, verhielt sich genau ebenso wie diese. Auch färbten sich die Wurzelspitzen und stellenweise die Wurzeln der Länge nach durch Reduction der Säure zu ihren niederen Oxyden gleich in den ersten Tagen blau.

Wolframsäure, als Phosphorwolframsäure in Quantitäten von 0,05 g bis 0,01 g pro Liter angewandt, wirkte stark giftig. Alle Pflanzen starben im Verlauf der ersten 8 bis 14 Tage ab. Ob die grünen Theile der Versuchspflanzen während dieser Zeit von der Säure etwas aufgenommen hatten, liess sich ebensowenig wie bei der Vanadinsäure und Molybdänsäure nachweisen.

Die Phosphorwolframsäure fällt Eiweiss, verschiedene Alkaloide, z. B. das Betain (Scheibler), aus ihren Lösungen und, was für diesen Vegetationsversuch von Belang ist, das Chlorophyll, wie Rob. Sachsse bei seinen Untersuchungen über den grünen Farbstoff der Pflanzen gefunden hat, ganz vollständig. Der natürliche grüne Farbstoff wird dabei in die gelben Farbstoffe, die in Lösung bleiben und in die dunkelgrünen, die sich schon beim Schütteln der Chlorophylllösung in Benzin mit der trockenen Säure auf dieselbe niederschlagen, gespalten.

Tellur. Bei einer Versuchsreihe erhielten die Pflanzen pro Liter Lösung 0,05 g und 0,1 g tellurige Säure, bei einer zweiten ebensoviel Tellursäure. In beiden Fällen wurden die Säuren zuerst mit Ammoniak übersättigt und das überschüssige Ammoniak nachher durch längeres Stehenlassen über Schwefelsäure wieder entfernt.

Die Versuche mit der tellurigen Säure sind nicht rein, da

dieselbe sich nicht merklich in der Nährstofflösung auflöst. Im Verlauf beider Versuchsreihen wurde, wie bei allen übrigen meiner Versuche, wo eine Abweichung nicht besonders angegeben ist, die aufgesogene Quantität Flüssigkeit durch reine Nährstofflösung ohne ferneren Zusatz der zu prüfenden Substanz ersetzt.

In beiderlei Lösungen wuchsen die Pflanzen mit dunkelgrünen Blättern ebenso gut wie in der reinen Nährstofflösung fort und starben erst wie diese im Herbst ab. Zur Blüthe kamen sie nicht.

Die *Tellursäure*, die in ihren chemischen Eigenschaften und in ihrer Formel der Schwefelsäure nahe verwandt ist, verhält sich also bei geringen Zusätzen und bei Gegenwart des nothwendigen Quantums Schwefelsäure wie diese, was darum von einigem Interesse ist, weil es sich mit der chemisch gleichfalls ähnlichen Selensäure umgekehrt verhält. In der Asche konnte ich die Gegenwart des Tellurs mit Sicherheit nachweisen. Ich erhielt daraus einige Milligramme Schwefeltellur durch die Analyse.

Selen, in derselben Quantität wie bei vorigen Versuchen als selenigsaures und selensaures Ammoniak in der sauren Lösung angewandt, zeigte sogleich stark giftige Wirkungen.

In der stärker concentrirten Lösung von 0,1 g von beiderlei Säuren fielen schon nach zwei Tagen in der Nährstofflösung die Nebenwurzeln sämmtlich, wie welk, auf und um die Hauptwurzeln herum zusammen. Die Wurzeln der Pflanzen in der an den Säuren verdünnteren Lösung folgten in derselben Weise vier bis fünf Tage später nach.

Es geht hieraus hervor, dass die Schädlichkeit der Säuren nicht blos an den Grad der Oxydation der drei verschiedenen Metalloide: Schwefel, Selen, Tellur, sondern auch an die Substanz derselben gebunden ist. Denn es ist bei der Ernährung der Pflanze

Schwefelsäure: nothwendig.

Schweflige Säure: giftig, wie alle reducirend wirkenden Mittel.

Tellursäure: unschädlich.

Selensäure: giftig.

Selenige Säure: giftig.

Arsen. Arsenige Säure und Arsensäure wirken sehr ver-

schieden auf die Pflanze. Die arsenige Säure ist ein starkes Gift für dieselbe, die Arsensäure dagegen ist nicht giftig, wenn sie der Wurzel in sehr geringer Menge zugeführt wird; sie verbreitet sich von da aus durch Stamm und Blätter, die Pflanzen können Blüthen und Früchte bringen, doch stellt sich nach den im Sommer 1883 angefangenen und 1884 mit vielen Pflanzen wiederholten Versuchen eine Beeinträchtigung der Massenproduction deutlich bei der Maispflanze heraus.

Schon bei der Gabe von 0,05 arseniger Säure pro Liter der neutralen wie sauren Lösung starben mir alle Pflanzen bald ab.

Unabhängig von diesen Versuchen haben im Sommer 1883 auch F. Nobbe, P. Baeseler und H. Will gemeinschaftlich in Tharandt Versuche über die Aufnahme der arsenigen Säure durch die Pflanze angestellt, deren Resultate mit vorstehenden übereinstimmen. Sie fanden:

»Dass die arsenige Säure schon in einer Beigabe von einem Milliontel zur Nährstofflösung merkliche Wachsthumsstörungen hervorbringt.«

Nach ihren Versuchen tritt das Arsen nur in sehr geringer Menge in die Pflanze ein, so dass es nicht möglich ist, irgend welche erhebliche Mengen in dieselben einzuführen. Diese schädliche Wirkung geht nach diesen Beobachtern von den Wurzeln aus, indem deren Protoplasma corrodirt wird. Die Wurzeln sterben dann ohne Zuwachs ab.

»Die oberen Theile der Pflanze folgen dann unter Welken und einigen Erholungsperioden nach.«

»Durch Verhinderung der Transpiration, Abschluss der Beleuchtung oder Einstellen in feuchte Wärme, lässt sich die Pflanze längere Zeit in der Lösung der arsenigen Säure turgescent erhalten, sie stirbt aber später ab.«

»Wird die Pflanze nur kurze Zeit, aber länger als zehn Minuten in eine mit arseniger Säure versetzte Nährstofflösung gesetzt, so verzögert sich die schädliche Wirkung, später aber tritt Wachsthumsverzögerung und selbst der Tod ein.«

Die von Nobbe, Baeseler und Will zum Versuch gewählten Pflanzen waren Buchweizen, Hafer, Pferdezahnmais, Weisserle, Alnus incana und rother Ahorn, Acer rubrum (Landw. Versuchsstat. 1884. Band 30. S. 382 und S. 401).

Auch Francis B. Phillips (Chem. News 46. Band 1882. Nr. 1119. S. 224) giebt an, dass Kupfer- und Arsenverbin-

dungen giftig für die Pflanzen seien. Diese Angabe bezüglich des Arsens stimmt mit vorstehenden und auch meinen Versuchen überein, so weit unter Arsenverbindungen die der arsenigen Säure verstanden werden, die Arsensäure dagegen stört die Functionen der Maispflanze nicht.

Die *Arsensäure* als arsensaures Kali angewandt wirkt bei jungen Keimpflanzen vom Cinquantinomais von etwa einem Decimeter Blatt- und Wurzellänge nachtheilig, so dass die Pflanzen im Wachsthum zurückbleiben und absterben können, wenn die Lösung pro Liter 0,05 g bis 0,1 g und darüber Arsensäure enthält.

Lässt man die Pflanzen aber bis zum 10.—15. Blatt zuvor in der reinen Nährstofflösung sich kräftig bewurzeln und setzt man sie darauf in eine Lösung, welche 0,05 g Arsensäure pro Liter erthält, so wachsen sie fort und entwickeln dieselben gesunde grosse und grüne Blätter. Sie gedeihen bei hoher Sommertemperatur nicht so gut als bei kühlerem Wetter und in der sauren Lösung niemals so gut wie in der neutralen Lösung. Am besten gedeihen sie bei Wassercultur, wenn man die Versuchsgefässe ringsum, die etwa ein Decimeter langen Wurzeln mit groben Quarzkiesen, von der Grösse des Coriandersamens, umschüttet, die Gefässe darauf zuerst mit reiner neutraler Nährstofflösung füllt und die Pflanzen bis zum fünfzehnten Blatt sich entwickeln lässt, bevor man das arsensaure Kali hinzusetzt. Man giesst zu dieser Zeit die Hälfte der neutralen Lösung aus den Gefässen aus und ersetzt dieses Quantum durch das gleiche Volum einer neutralen Nährstofflösung, welche pro Liter 0,05 g Arsensäure in Form des krystallisirten arsensauren Kalis $AsKH_2O_4$ enthält und giesst später in dem Maasse, als die Flüssigkeit aufgesogen wird, dieselbe Arsensäurelösung nach. Auf solche Weise erhielt ich im Herbst 1884 eine gedrungene Maispflanze, deren Stamm, ungefähr ein Decimeter hoch, einen Kolben von zwei Centimeter Durchmesser zur Reife brachte. Der Kolben enthält 45 Samen, von welchen eine grössere Anzahl völlig voll, nicht runzlich und ganz normal gebildet aussehen. Die oberen Blätter sind an fünf Decimeter lang und zwei bis drei Centimeter breit.

Auch in Gefässen, die ohne Kiesfüllung mit der arsensäurehaltigen neutralen Nährstofflösung versehen worden waren, erhielt ich kräftige Pflanzen von fünf bis sechs Decimeter Stamm-

höhe, mit Blättern von drei bis vier Centimeter Breite und sechs bis sieben Decimeter Länge der oberen Blätter.

Fünf bis sechs Stück der erzeugten Pflanzen reichten vollständig aus, um die bei gelinder Rothgluth bereitete Asche qualitativ auf Arsen zu prüfen und zwar nicht bloss dasselbe mit Hülfe des Marsh'schen Apparates nachzuweisen, sondern das Arsen nach Reduction der in Salzsäure gelösten Asche durch schweflige Säure als dreifach Schwefelarsen zu gewinnen.

Diese Versuche über das Verhalten der Arsensäure boten beiläufig Gelegenheit zu beobachten, dass auch einzellige grüne Algen und ein farbloser Pilz in der neutralen mit arsensaurem Kali versetzten Lösung üppig fortwachsen.

Die Kiese, mit welchen ich mehrere Gefässe zur Aufnahme der Maiswurzeln angefüllt hatte, überzogen sich, sobald die Oberfläche nicht mehr ganz und gar von der Nährstofflösung überdeckt war, mit einer zusammenhängenden Schicht von Volvox globator.

Im Sommer 1883 litten viele meiner Maispflanzen durch einen Pilz, dessen Mycelium sich unter dem Spiegel der Nährstofflösung entwickelt und die Wurzeln derselben ringsum der ganzen Länge nach überzieht, so dass dieselben, wenn man die Pflanze aus dem Versuchsgefäss heraushebt, wie mit einer fingerdicken Gallerte überzogen erscheinen. Ich habe den Pilz bis jetzt nicht bis zur Sporenentwicklung züchten und bestimmen können. In demselben Sommer wucherte der Pilz ebenso üppig in den arsensäurehaltigen, wie in der normalen Nährstofflösung.

Dieser Fähigkeit der Arsensäure, in die lebende Pflanze einzutreten, wird man in Zukunft bei gerichtlich chemischen Analysen Rechnung tragen müssen.

Cadmium, als phosphorsaures Cadmiumoxyd in der sauren Nährstofflösung (Versuche vom Sommer 1884) angewandt, wirkt noch etwas giftiger als Zink. Alle Pflanzen starben dabei in 10 bis 14 Tagen ab.

Thallium, als salpetersaures Thalliumoxyd in der neutralen Lösung angewandt, wirkt giftig. Bei 0,05 Gehalt an Thalliumoxyd starben die Pflanzen binnen 14 Tagen ab.

Blei. Das phosphorsaure Bleioxyd in der sauren Lösung aufgeschlämmt haftet in lockeren Flocken den Wurzeln gut und bleibend an. Die Pflanzen blieben klein aber kräftig, sie wur-

den etwa zwei Decimeter hoch, bekamen aber an fünf Decimeter lange und an zwei bis vier Centimeter breite Blätter, entwickelten zu gleicher Zeit männliche und weibliche Blüthen und einen dicht beblätterten Kolben. Ausser der Beeinträchtigung der Massenentwicklung wurden die Functionen der Pflanze in keiner Weise gestört. Die Kolben kamen allerdings nicht zur Reife, indessen braucht diese Erscheinung in keinem Zusammenhange mit der Aufnahme des Bleies zu stehen.

Das Blei liess sich deutlich in der Asche nachweisen; die Quantitäten schätze ich ungefähr halb so hoch, wie die des Baryts von einer Pflanze aus den entsprechenden, mit phosphorsaurem Baryt versehenen Pflanzen, etwa zu ein Milligramm pro Stück. Zu demselben Resultat, dass Blei mit dieser Störung der Massenproduction auf die Pflanze wirke, ohne dass dieselbe übrigens Krankheitserscheinungen zeige und dass das Bleioxyd in der Asche solcher Pflanzen sich nachweisen lasse, gelangten (s. d. oben citirte Abhandlung) auch Nobbe, Baessler und Will bei ihren 1883 zu Tharandt angestellten Versuchen.

Wismuth, als phosphorsaures Wismuthoxyd in saurer Lösung angewandt, wirkte vollständig so wie das entsprechende Bleisalz. Auch hierbei wurden stark beblätterte Kolben erhalten, die zu gleicher Zeit vollkommene männliche und weibliche Blüthen brachten. Es gelang mir aber nicht, aus der Asche von drei solchen Pflanzen das Wismuthoxyd in Substanz (als Schwefelwismuth aus der in Salzsäure gelösten Asche) auszuscheiden.

Organische Substanzen. Geringe Zusätze von Oxalsäure, Humussäuren, Aepfelsäure, Weinsäure, Citronensäure, Benzoësäure und Bernsteinsäure zeigten sich bei früher angèstellter Untersuchung ohne Vortheil und ohne Nachtheil für die Pflanze. Ueber das Verhalten mehrerer Alkaloide habe ich gleichfalls (gemeinschaftlich mit W. Wolf) Versuche angestellt.

Dass das *gelbe Blutlaugensalz* oder *Ferrocyankalium* die Gelbsucht der Pflanzen in auffallend kurzer Zeit aufhebt, bei Maispflanzen oft vollständig in drei bis vier Tagen, habe ich bereits in der Sitzung am 6. Februar 1869 berichtet. Dabei zeigte es sich, dass das Blutlaugensalz zersetzt wird und in der dunkel gehaltenen Nährstofflösung ein Absatz von Berlinerblau sich bildet. Bei einer im Ganzen geringen Menge von gelbem Blutlaugensalz, von 0,1 prò Liter, hob es das fernere Wachsthum von Maispflanzen, die bis zwei, drei und fünf Decimeter Höhe

vorher gelbsüchtig (ohne Zusatz von einem Eisenoxydsalz) aufgezogen waren, völlig auf, ohne der Pflanze übrigens schädlich zu sein, sie erhielten sich bei dieser constanten Grösse bis zum Herbst gesund und grün und starben dann ganz normal ab.

Im Sommer 1883 habe ich diesen Vorgang noch etwas genauer untersucht und gefunden, dass unter der Wirkung der Wurzel Ammoniak sich bildet, das in die Lösung übergeht und darin nachgewiesen werden kann. Bereitet man eine Blutlaugensalzlösung, die ein Gramm Salz = 0,1326 g Eisen im Liter enthält und fügt von solchem Vorrath bei verschiedenen Pflanzen 10, 20, 30, 40, 50 ccm zu einem Liter Nährstofflösung und hält diese dunkel, so verschwindet in wenig Tagen die gelbliche Färbung, welche das Blutlaugensalz der Flüssigkeit ertheilt, die Lösung wird farblos und reagirt nicht ferner auf Eisenchlorid. Dieses Salz wird also sofort von der Wurzel aufgenommen.

Das *Ferridcyankalium* oder *rothe Blutlaugensalz* wirkt ähnlich wie das gelbe, nur traten schädliche Wirkungen schon bei kleineren Gaben als denen vom gelben ein.

Stellt man die mit dem gelben wie rothen Blutlaugensalz versetzten Nährstofflösungen bei 20° Lufttemperatur in directes Sonnenlicht, so werden sie gleichfalls farblos, und später trübe durch Absatz von Berlinerblau. Die Lösungen beider Salze enthalten nun freies Ammoniak. Das Sonnenlicht bewirkt also dieselbe Zersetzung der beiden Blutlaugensalze, wie die Wurzel der Pflanzen im Dunkeln.

Dass Rhodanammonium (Schwefelcyanammonium) giftig auf die Pflanze wirkt, hat Dr. H. Kraüch bereits 1882 gefunden.

Das *Hydroxylamin* wirkt nach Bertoni (Gazz. ital. 9. 569) reducirend auf Blutkörperchen und ist daher ein energisches Gift für den thierischen Organismus. Ich habe daher im Sommer 1883 Versuche mit dem salzsauren Hydroxylamin NH_3O, HCl, ein halbes Gramm pro Liter Nährstofflösung, angestellt. Schon bei dieser Verdünnung wirkt das Hydroxylamin stark giftig.

Salzsaures *Methylamin* zeigte sich bei geringem Zusatz zur neutralen Nährstofflösung ohne merkliche Wirkung.

Die *Mellithsäure*, Honigsteinsäure, findet sich in Verbindung mit Thonerde als Honigstein in schönen Krystallen auf Braunkohle. Da sie von einer früher zu Grunde gegangenen Vegetation herrührt, so schien es der Mühe werth, zu prüfen, wie diese Säure sich zu Pflanzen der jetzigen Flora verhält. Bei

einem Zusatz von 1 g freier Säure und auch von 1 g honigsteinsaurem Ammoniak wirkte die Säure schon giftig in freier neutraler Nährstofflösung. Waren die Versuchsgefässe aber mit Kiesen ausgefüllt, in deren Zwischenräumen Wurzeln und Lösung sich befanden, so ertrugen sie den Zusatz, wenn nachher reine Nährstofflösung nachgegossen wurde.

Da es meine Absicht ist, diese Art von Untersuchungen noch fortzusetzen und in neuerer Zeit auch von anderen Seiten dieses Gebiet in Angriff genommen worden ist, so gebe ich in folgender Tabelle eine Uebersicht der Mineralbasen und Mineralsäuren, welche theils durch die Analyse der Aschen natürlicher Pflanzen und der künstlich ernährten Pflanzen als constante oder zufällige Begleiter der eigentlichen Nährstoffe in die Pflanze mit aufgenommen werden, wenn sie in der Bodenflüssigkeit oder einer künstlich zusammengesetzten Nährstofflösung aufgelöst vorhanden sind, dazu über diejenigen, die auf die Wurzeln einen sichtbaren Einfluss ausüben, obschon bisher ihre Verbreitung in der Pflanze nicht nachgewiesen werden konnte. Es sind dieses folgende aufnehmbare:

Metalloide und Oxyde derselben	*Alkalische Erden*
Chlor	Baryt
Jod	Strontian
Brom	*Erden*
Fluor	Thonerde
Tellursäure	*Schwere Metalle*
Arsenige Säure	Manganoxyd
Arsensäure	Kobaltoxyd
Kieselsäure	Nickeloxyd?
Alkalien	Zinkoxyd
Natron	Cadmiumoxyd
Lithion	Bleioxyd
Cäsiumoxyd	Wismuthoxyd?
Rubidiumoxyd	

Nickeloxyd und Wismuthoxyd sind unter den aufnehmbaren Oxyden mit hierher gestellt, weil es bei der chemischen Aehnlichkeit des Nickels mit dem Kobalt und des Wismuth mit dem Blei sehr wahrscheinlich, dass sie sich wie diese verhalten, wenn es bei dem Mangel einer zu ihrer Nachweisung hinreichend scharfen Methode auch thatsächlich nicht gelang, das Nickel und

Wismuth unter den Aschenbestandtheilen der geernteten Exemplare nachzuweisen.

Wegen völliger Unlöslichkeit ihrer Phosphate in der Nährstofflösung wurden nicht aufgenommen und zeigten keinerlei Wirkung auf die Pflanze:

Uranoxyd
Chromoxyd.

Die folgenden Substanzen wirken sogleich mehr oder weniger nachtheilig auf die Thätigkeit der Wurzel. Ob sie sich darnach in der Pflanze verbreiten, ist nicht nachgewiesen. Aber auch wenn sie in der Asche der oberen Theile der Pflanze gefunden wären, würde man nicht darüber aburtheilen können, ob sie von der lebenden Pflanze selbständig mit eingeholt oder ihre Lösungen, erst nach ihrem Absterben im Körper derselben durch die Capillarität der todten Organe verbreitet wurden. Es sind dieses folgende:

Silberoxyd	Thalliumoxyd
Goldchlorid	Selenige Säure
Platinchlorid	Selensäure
Vanadinsäure	Borsäure
Molybdänsäure	Chromsäure.
Phosphorwolframsäure	

SITZUNG AM 2. FEBRUAR 1885.

H. Bruns, *Über die Rotation eines starren Körpers.*

Bei der Behandlung der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt ist bisher fast durchgängig zur Integration der Bewegungsgleichungen von der Vereinfachung Gebrauch gemacht worden, welche die Wahl der invariabelen Ebene als Fundamentalebene einzuführen gestattet. Diese Specialisirung ist indessen zur Durchführung einer directen Integration der Differentialgleichungen nicht erforderlich, wie vor einiger Zeit Frahm in Bd. VIII der Math. Annalen gezeigt hat; überdies ist dieselbe ohne Vortheil im Falle der Astronomie, wenn es sich, wie bei Erde und Mond, darum handelt, die durch kleine störende Kräfte erzeugte Modification des Vorganges der freien Rotation aufzusuchen. Es ist deshalb vielleicht von Interesse, hier kurz eine Transformation der Bewegungsgleichungen anzugeben, welche nicht nur für den Fall der Astronomie zu zweckmässigen Formeln führt, sondern auch erkennen lässt, warum man bei der allgemeinen Integration der Rotationsgleichungen — abgesehen von den beiden bekannten und längst erledigten, einfachsten Fällen — auf bis jetzt nicht überwundene Schwierigkeiten gestossen ist.

Es seien $(x_\alpha y_\alpha z_\alpha)$ der Ort des Massentheilchens m_α, bezogen auf ein durch den Drehpunkt gelegtes, festes Axensystem (xyz), $(a_\alpha b_\alpha c_\alpha)$ der Ort von m_α, bezogen auf die durch den Drehpunkt gelegten Hauptträgheitsaxen, ferner fgh, $f'g'h'$, $f''g''h''$ die Richtungscosinus der beweglichen Axen gegen die festen, also

$$x_\alpha = f a_\alpha + f' b_\alpha + f'' c_\alpha \ ,$$
$$y_\alpha = g a_\alpha + g' b_\alpha + g'' c_\alpha \ ,$$
$$z_\alpha = h a_\alpha + h' b_\alpha + h'' c_\alpha \ ,$$

dann bestehen zwischen den f, g, h . . und den Componenten p, q, r der Drehungsgeschwindigkeit, bezogen auf die beweglichen Axen, die bekannten Relationen

$$\frac{df}{dt} = f'r - f''q \ , \quad \text{etc.}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn m die Gesammtmasse des Körpers und

$$\frac{m}{N_1} = \Sigma m_\alpha (b_\alpha^2 + c_\alpha^2) \ , \qquad \frac{m}{N_2} = \Sigma m_\alpha (c_\alpha^2 + a_\alpha^2) \ ,$$
$$\frac{m}{N_3} = \Sigma m_\alpha (a_\alpha^2 + b_\alpha^2)$$

die drei Hauptträgheitsmomente bedeuten, für die lebendige Kraft T die Gleichung

$$2T = m\left(\frac{p^2}{N_1} + \frac{q^2}{N_2} + \frac{r^2}{N_3}\right) \ ;$$

ferner werden die Componenten der doppelten Flächengeschwindigkeit bezw. gleich

$$A = m\left(f\frac{p}{N_1} + f'\frac{q}{N_2} + f''\frac{r}{N_3}\right) \ ,$$
$$B = m\left(g\frac{p}{N_1} + g'\frac{q}{N_2} + g''\frac{r}{N_3}\right) \ ,$$
$$C = m\left(h\frac{p}{N_1} + h'\frac{q}{N_2} + h''\frac{r}{N_3}\right) \ .$$

Drückt man jetzt die f, g, h . . in bekannter Weise durch die Winkel ψ, χ, ϑ aus, wo ψ der aufsteigende Knoten der ab-Ebene auf der xy-Ebene, χ der Abstand der a-Axe vom Knoten und ϑ der Winkel zwischen der c-Axe und der z-Axe, so ist

$$h = \sin\chi \sin\vartheta \ , \qquad h' = \cos\chi \sin\vartheta \ , \qquad h'' = \cos\vartheta \ ,$$
$$p\,dt = h\,d\psi + \cos\chi\,d\vartheta \ ,$$
$$q\,dt = h'\,d\psi - \sin\chi\,d\vartheta \ ,$$
$$r\,dt = h''\,d\psi + d\chi \ .$$

Führt man nun die zu ψ, χ, ϑ conjugirten Variabeln ψ', χ', ϑ' durch die Gleichungen

$$\psi' = \frac{\partial T}{\partial \frac{d\psi}{dt}}, \quad \chi' = \frac{\partial T}{\partial \frac{d\chi}{dt}}, \quad \vartheta' = \frac{\partial T}{\partial \frac{d\vartheta}{dt}}$$

ein, so wird

$$\frac{\psi'}{m} = \frac{p}{N_1} h + \frac{q}{N_2} h' + \frac{r}{N_3} h'' ,$$

$$\frac{\chi'}{m} = \frac{r}{N_3} ,$$

$$\frac{\vartheta'}{m} = \frac{p}{N_1} \cos\chi - \frac{q}{N_2} \sin\chi ,$$

$$\frac{mp}{N_1} = \frac{\sin\chi}{\sin\vartheta} (\psi' - \chi' \cos\vartheta) + \cos\chi\,\vartheta' ,$$

$$\frac{mq}{N_2} = \frac{\cos\chi}{\cos\vartheta} (\psi' - \chi' \cos\vartheta) - \sin\chi\,\vartheta' ,$$

$$\frac{mr}{N_3} = \chi' .$$

Hieraus erhält man zunächst

$$\begin{aligned} 2mT = {} & (N_1 \sin\chi^2 + N_2 \cos\chi^2) \left(\frac{\psi' - \chi' \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2 + N_3 \chi'^2 \\ & + (N_1 \cos\chi^2 + N_2 \sin\chi^2) \vartheta'^2 \\ & + 2(N_1 - N_2) \sin\chi \cos\chi \frac{\psi' - \chi' \cos\vartheta}{\sin\vartheta} \vartheta' . \end{aligned}$$

Ist nun U die Kräftefunction, $H = T - U$, so werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi'}, \quad \frac{d\psi'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \text{etc.};$$

bilden wir ferner mittelst einer beliebigen Function V von den Variablen ψ, χ, ϑ und den neuen Grössen s, s', s'' die Gleichungen

$$\psi' = \frac{\partial V}{\partial \psi}, \quad \chi' = \frac{\partial V}{\partial \chi}, \quad \vartheta' = \frac{\partial V}{\partial \vartheta},$$

$$S = \frac{\partial V}{\partial s}, \quad S' = \frac{\partial V}{\partial s'}, \quad S'' = \frac{\partial V}{\partial s''},$$

so führt die Ersetzung der Variabeln $\psi\psi' \ldots$ durch die $sS \ldots$ zu dem kanonischen System

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s}, \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S}, \quad \text{etc.}$$

Die transformirende Function V soll nun in folgender Weise bestimmt werden. Wir denken uns ein sphärisches Dreieck mit den Seiten, ϑ, 2δ, 2ζ und den gegenüberliegenden Winkeln Θ, $\varDelta$, Z, wo δ und ζ als Functionen der s durch die Gleichungen

$$s = 2s'' \sin\delta^2 \quad , \qquad s' = 2s'' \sin\zeta^2$$

gegeben sind, und setzen an

$$V = s''\Theta + (s'' - s)(Z + \psi) + (s'' - s')(\varDelta + \chi) \; ,$$

wo die Dreieckswinkel durch ϑ und die s ausgedrückt zu denken sind. Berücksichtigt man die Differentialformeln für sphärische Dreiecke, so erhält man ohne Schwierigkeit die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \psi' &= s'' \cos 2\delta \; , & S &= -Z - \psi \; , \\ \chi' &= s'' \cos 2\zeta \; , & S' &= -\varDelta - \chi \; , \\ \vartheta' &= s'' \sin 2\delta \sin Z \; , & S'' &= \Theta + Z + \varDelta + \psi + \chi \, . \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man die oben aufgestellten Ausdrücke für die p, q, r, A, B, C benutzt und die Relationen im sphärischen Dreieck berücksichtigt, nach den erforderlichen Reductionen

$$\begin{aligned} mp &= N_1 s'' \sin 2\zeta \cos(S' + \tfrac{1}{2}\pi) \; , \\ mq &= N_2 s'' \sin 2\zeta \sin(S' + \tfrac{1}{2}\pi) \; , \\ mr &= N_3 s'' \cos 2\zeta \; , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= s'' \sin 2\delta \cos\left(\frac{3\pi}{2} - S\right) \; , \\ B &= s'' \sin 2\delta \sin\left(\frac{3\pi}{2} - S\right) \; , \\ C &= s'' \cos 2\delta \; , \end{aligned}$$

wo die geometrische bezw. mechanische Bedeutung der einzelnen Grössen unmittelbar ersichtlich ist. Ferner wird

$$\begin{aligned} 2mT &= (s'' \sin 2\zeta)^2 (N_1 \sin S'^2 + N_2 \cos S'^2) + N_3 (s'' \cos 2\zeta)^2 \\ &= [s''^2 - (s'' - s')^2] \left[\frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2S'\right] \\ &\quad + N_3 (s'' - s')^2 \; . \end{aligned}$$

Um nun U durch die Variabeln S, s . . auszudrücken, ist es erforderlich, die Richtungscosinus f, g, h . . durch die neuen

Variabeln explicite darzustellen, wobei ich der Kürze halber die weiter keine Schwierigkeit darbietende Herleitung unterdrücke. Setzt man zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
\log \sigma_1 &= \log \sin \delta + iS + \tfrac{1}{2} iS'' ,\\
\log \tau_1 &= \log \sin \delta - iS - \tfrac{1}{2} iS'' ,\\
\log \sigma_2 &= \log \sin \zeta + iS' + \tfrac{1}{2} iS'' ,\\
\log \tau_2 &= \log \sin \zeta - iS' - \tfrac{1}{2} iS'' ,
\end{aligned}
$$

so erhält man die zur Bestimmung der reellen Grössen f, g, h . . ausreichenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
f + g' + i(g - f') &= 2(\cos \delta \cos \zeta - \tau_1 \tau_2)^2 e^{iS''} ,\\
f - g' + i(g + f') &= 2(\tau_1 \cos \zeta + \sigma_2 \cos \delta)^2 ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'' + ig'' &= -2i(\tau_1 \cos \zeta + \sigma_2 \cos \delta)(\cos \delta \cos \zeta - \tau_1 \tau_2) e^{\frac{1}{2} iS''} ,\\
h - ih' &= -2i(\sigma_1 \cos \zeta + \tau_2 \cos \delta)(\cos \delta \cos \zeta - \tau_1 \tau_2) e^{\frac{1}{2} iS''} ,\\
h'' &= \cos 2\delta \cos 2\zeta + \sin 2\delta \sin 2\zeta \cos(S + S' + S'') .
\end{aligned}
$$

Wenn keine äusseren Kräfte wirken, so ist $U = 0$, $H = T$ zu setzen; wenn dagegen die Schwere einwirkt, und zwar parallel der z-Axe, so wird U eine lineare Function von h, h', h'' mit constanten Coefficienten, die sich auf $k \cdot h''$ reducirt, wenn der Schwerpunkt auf der c-Axe liegt. Setzt man noch $N_1 = N_2$, so erhält man den Lagrange'schen Fall. Aus der Form von H erkennt man dann sofort, dass sowohl bei dem ersten Problem ($U = 0$), als auch bei dem Lagrange'schen Fall die vollständige Integration nur noch die Ausführung einer Quadratur erfordert, indem in H die drei Variabeln S, S', S'' nur in einer einzigen Verbindung, nämlich entweder S' oder $S + S' + S''$ auftreten.

Erwin Papperitz, *Zur algebraischen Transformation der hypergeometrischen Functionen.* Vorgelegt von *Prof. Klein.*

Die vorliegende Note bezieht sich auf die Verallgemeinerung eines Satzes, welchen Herr GOURSAT zuerst in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences vom 18. Februar und 10. März 1884 veröffentlicht und in einem im XXIV. Bde. der Mathem. Annalen p. 445 abgedruckten Artikel: »Sur les intégrales rationelles de l'équation de Kummer« ausführlich dargelegt hat. Sie soll im Anschlusse an jenen Satz, durch welchen die Frage nach den *rationalen Integralen der Kummer'schen Differentialgleichung 3. Ordnung,* von welcher die Transformation der hypergeometrischen Functionen abhängt, ihre Lösung gefunden hat, einen Beitrag zur Lösung des allgemeinen Problems der Bestimmung ihrer *algebraischen Integrale* liefern [1].

Wir legen unseren Betrachtungen einen etwas anderen Gesichtspunkt zu Grunde als Herr GOURSAT, indem wir von der Bemerkung ausgehen, dass die Transformationstheorie der hypergeometrischen Functionen im Wesentlichen identisch ist mit der der *Schwarz'schen Function* $s(\lambda, \mu, \nu, x)$, d. i. des Quotienten zweier linearunabhängiger Zweige der hypergeometrischen Function, und indem wir ferner auf das Hülfsmittel der *Riemann'schen Fläche* und die Eigenart der durch die s-Function vermittelten *conformen Abbildung* recurriren, wie sie aus den Untersuchungen des Herrn SCHWARZ [2]) bekannt ist.

---

1) Eine ausführlichere Darstellung soll in den »Mathem. Annalen« erscheinen.

2) CRELLE's Journal. Bd. 75.

1.

Man nehme an, dass die Differentialgleichung

$$1)\quad \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2x(1-x)}$$

in eine Differentialgleichung derselben Form:

$$2)\quad \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \frac{1-\lambda'^2}{2y^2} + \frac{1-\nu'^2}{2(1-y)^2} - \frac{\lambda'^2-\mu'^2+\nu'^2-1}{2y(1-y)}$$

übergehe, sofern man statt x eine neue unabhängige Variable y einführt, welche mit x durch die algebraische Gleichung

$$3)\qquad f(x, y) = 0$$

zusammenhängt, oder dass die Gleichung 3) eine Integralgleichung der KUMMER'schen Differentialgleichung:

$$4)\quad \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \frac{(1-\mu^2)x^2+(\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1)x+(1-\lambda^2)}{2x^2(1-x)^2}\cdot x'^2 = \frac{(1-\mu'^2)y^2+(\lambda'^2+\mu'^2-\nu'^2-1)y+(1-\lambda'^2)}{2y^2(1-y)^2}$$

darstelle.

Der Grad der Gleichung 3) in x und y sei resp. durch n' und n, ihr Geschlecht durch p bezeichnet. Über der x- und y-Ebene wollen wir uns dementsprechend die zugehörige RIEMANN'sche Fläche mit n resp. n' Blättern ausgebreitet denken.

Man betrachte jetzt in der s-Ebene ein Polygon S, welches aus $2n$ abwechselnd der positiven und negativen Halbebene x entsprechenden Kreisbogendreiecken (λ, μ, ν) mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ besteht. Die Randcurven dieses zunächst einfach zusammenhängenden Gebietes S denke man sich einander paarweise durch lineare Substitutionen der Variablen s zugewiesen, welche je zwei den beiden Ufern einer und derselben Strecke $\overline{01}$, $\overline{1\infty}$, $\overline{\infty 0}$ der Axe der reellen x entsprechende Kreisbogen ineinander überführen. In dieser Auffassung repräsentirt das »Fundamentalpolygon« S eine geschlossene Mannichfaltigkeit Σ von bestimmtem (eventuell höherem) Zusammenhang.

Unsere Voraussetzung geht dahin, dass diese Mannichfaltigkeit Σ genau der über der x-Ebene zu construirenden RIEMANN-schen Fläche entspreche, mithin auch ausnahmslos eindeutig auf die n'-blättrige y-Fläche bezogen sei. Hieraus folgt auf Grund

des Schwarz'schen Satzes, dass das Polygon S einem aus $2n'$ (abwechselnd der positiven und negativen Halbebene y entsprechenden) Kreisbogendreiecken (λ', μ', ν') zusammengesetzten Polygone S' äquivalent ist. Die Dreiecke des letzteren werden nämlich das Gebiet S in solcher Weise einfach erfüllen, dass die am Rande liegenden Dreiecke eventuell zerstückt erscheinen, die getrennten Theile eines und desselben Dreiecks aber ihren Zusammenhang durch Vereinigung der zugeordneten Randcurven von S erlangen.

Indem wir so in der geschlossenen, ein doppeltes Dreiecksnetz tragenden Mannichfaltigkeit Σ ein Äquivalent für die über der x- resp. y-Ebene auszubreitenden Riemann'schen Flächen gewonnen haben, gelingt es, die Eigenschaften der letzteren und damit die Natur der zwischen x und y bestehenden algebraischen Beziehung zu erschliessen.

Zuerst bemerkt man, dass y in Bezug auf x und umgekehrt x in Bezug auf y nur an solchen Stellen verzweigt sein kann, wo wenigstens eine der Variablen x und y einen der singulären Werthe $0, \infty, 1$ annimmt. Von den Werthepaaren, welche hiernach für die Untersuchung der Verzweigung beider Riemann'scher Flächen allein in Betracht kommen, sind die Combinationen der Werthe $x = 0, \infty, 1$ mit den Werthen $y = 0, \infty, 1$, welche $f(x, y) = 0$ befriedigen, gesondert zu behandeln. Sie mögen als Verzweigungswerthe 1. Art bezeichnet sein. Nach Ausschluss derselben mag die Gleichung $f(x, y) = 0$ für $x = 0, \infty, 1$ noch resp. r, s, t unter sich verschiedene y-Werthe: $y = \eta_1, \dots, \eta_r;\ \eta_1', \dots, \eta_s';\ \eta_1'', \dots, \eta_t''$, für $y = 0, \infty, 1$ dagegen resp. r', s', t' verschiedene x-Werthe: $x = \xi_1, \dots, \xi_{r'};\ \xi_1', \dots, \xi_{s'}';\ \xi_1'', \dots, \xi_{t'}''$ als Wurzeln zulassen. Diese bilden die Verzweigungswerthe 2. Art.

Einem Werthepaare 2. Art, z. B. $x = 0$, $y = \eta_i$, entspricht in Σ ein Eckpunkt der Eintheilung in Dreiecke (λ, μ, ν), für welchen die Summe der anliegenden Dreieckswinkel $= 2\alpha\pi$ ist, unter α eine positive ganze Zahl verstanden. Die Anzahl dieser Winkel ist dabei nothwendig eine gerade und zwar doppelt so gross als die Zahl der Blätter, welche in dem Windungspuncte $x = 0$ der x-Fläche cyclisch zusammenhängen. Die Zahl α hingegen bedeutet die Zahl der im Punkte $y = \eta_i$ der y-Fläche einen Cyclus bildenden Blätter. Für unser Beispiel ist

die Grösse der in Betracht kommenden Dreieckswinkel durch $\lambda\pi$, ihre Anzahl durch $\frac{2\alpha}{\lambda}$ gegeben und folglich muss $\frac{\alpha}{\lambda}$ gleich einer positiven ganzen Zahl ϱ sein.

Wir setzen:

$$5)\quad \lambda = \frac{\alpha}{\varrho}, \quad \mu = \frac{\beta}{\sigma}, \quad \nu = \frac{\gamma}{\tau}; \quad \lambda' = \frac{\alpha'}{\varrho'}, \quad \mu' = \frac{\beta'}{\sigma'}, \quad \nu' = \frac{\gamma'}{\tau'}$$

und erkennen im Verfolg obiger Schlussweise, dass die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ und $\varrho, \sigma, \tau, \varrho', \sigma', \tau'$ positive ganze Zahlen[1]) (die letzteren > 1) darstellen, sofern nicht die ihnen entsprechenden Zahlen r, s, t, r', s', t' Null sind. Das Resultat unserer bisherigen Überlegungen bringen wir in folgende Übersicht.

Es hängen im Cyclus zusammmen:

in der x-Fläche

bei:	$x = 0$	r mal ϱ Blätter	
	$x = \infty$	s - σ -	
	$x = 1$	t - τ -	
	$x = \xi_1$ . . . . $x = \xi_{r'}$	je α' Blätter	Die übrigen Blätter verlaufen an diesen Stellen isolirt.
	$x = \xi_1'$ . . . . $x = \xi'_{s'}$	- β' -	
	$x = \xi_1''$ . . . . $x = \xi''_{r'}$	- γ' -	

in der y-Fläche

bei:	$y = \eta_1$ . . . . $y = \eta_r$	je α Blätter	Die übrigen Blätter verlaufen an diesen Stellen isolirt.
	$y = \eta_1'$ . . . . $y = \eta_s'$	- β -	
	$y = \eta_1''$ . . . . $y = \eta_t''$	- γ -	

---

1) Die Exponenten $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ können unbeschadet der Allgemeinheit positiv angenommen werden.

bei: $y = 0$ r' mal ϱ' Blätter
$y = \infty$ s' - σ' -
$y = 1$ t' - τ' -

Es blieben noch die Werthepaare 2. Art unberücksichtigt. Diesen werden im Allgemeinen ebenfalls Windungspunkte der Riemann'schen Flächen entsprechen. Die Anzahlen der hierbei in Betracht kommenden Blätter mögen für die x-Fläche nach folgendem Schema bezeichnet werden:

	$x = 0$	$x = \infty$	$x = 1$
$y = 0$	α_{11}	α_{21}	α_{31}
$y = \infty$	α_{12}	α_{22}	α_{32}
$y = 1$	α_{13}	α_{23}	α_{33}

Dann ergiebt sich ohne Weiteres, dass die entsprechenden Blätterzahlen für die y-Fläche durch das Schema:

	$x = 0$	$x = \infty$	$x = 1$
$y = 0$	$\alpha_{11}\frac{\lambda}{\lambda'}$	$\alpha_{21}\frac{\mu}{\lambda'}$	$\alpha_{31}\frac{\nu}{\lambda'}$
$y = \infty$	$\alpha_{12}\frac{\lambda}{\mu'}$	$\alpha_{22}\frac{\mu}{\mu'}$	$\alpha_{32}\frac{\nu}{\mu'}$
$y = 1$	$\alpha_{13}\frac{\lambda}{\nu'}$	$\alpha_{23}\frac{\mu}{\nu'}$	$\alpha_{33}\frac{\nu}{\nu'}$

gegeben sind. Über die Art der Vertheilung der Blätter in Cyclen ist dagegen von vornherein Nichts bekannt. Die Gesammtzahl der fraglichen Cyclen sei für jede der Flächen mit q bezeichnet.

Setzt man jetzt zur Abkürzung:

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = a\,, \quad \frac{1}{\lambda'}(\alpha_{11}\lambda + \alpha_{21}\mu + \alpha_{31}\nu) = a'\,,$$

6) $$\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = b\,, \quad \frac{1}{\mu'}(\alpha_{12}\lambda + \alpha_{22}\mu + \alpha_{32}\nu) = b'\,;$$

$$\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = c\,, \quad \frac{1}{\nu'}(\alpha_{13}\lambda + \alpha_{23}\mu + \alpha_{33}\nu) = c'\,;$$

wobei die Relation

7) $$a\lambda + b\mu + c\nu = a'\lambda' + b'\mu' + c'\nu'$$

bemerkenswerth ist, so hat man für die Gesammtzahlen n und n' der Blätter beider RIEMANN'scher Flächen die Zerlegungen:

$$8)\quad \begin{aligned} n &= a + r\varrho = b + s\sigma = c + t\tau \,, \\ n' &= a' + r'\varrho' = b' + s'\sigma' = c' + t'\tau' \,, \end{aligned}$$

überdies aber die Ungleichungen:

$$9)\quad a + b + c \geqq q \,, \qquad a' + b' + c' \geqq q \,.$$

Drückt man endlich das Geschlecht p nach bekannter Formel durch die Blätterzahl und die Multiplicitäten der Verzweigungspunkte aus, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen 6) und 8):

$$10)\quad \begin{aligned} 2p + q - 2 &= n - r - s - t + r'(\alpha' - 1) + s'(\beta' - 1) \\ &\qquad + t'(\gamma' - 1) \\ &= n' - r' - s' - t' + r(\alpha - 1) + s(\beta - 1) \\ &\qquad + t(\gamma - 1) \,. \end{aligned}$$

Demnach können wir sagen:

Das Problem der algebraischen Transformation hängt in erster Linie ab von der Auflösung des Systems unbestimmmter Gleichungen 5), 6), 8) und 10) in positiven ganzen Zahlen und unter Berücksichtigung der Ungleichungen 9).

Dieses System geht für $p = 0$, $q = 3$, $n' = 1$ über in das Diophantische Gleichungssystem der rationalen Transformation, welches Herr GOURSAT aufgestellt hat.

Zu weiterem Gebrauche stellen wir noch einige Relationen zusammen, welche algebraische Folgen der bereits angegebenen sind:

$$11)\quad n(1 - \lambda - \mu - \nu) = n'(1 - \lambda' - \mu' - \nu') \,;$$

$$12)\quad \begin{aligned} r(\varrho - 3) + s(\sigma - 3) + t(\tau - 3) &\leqq 6p + 2q - 6 \,, \\ r'(\varrho' - 3) + s'(\sigma' - 3) + t'(\tau' - 3) &\leqq 6p + 2q - 6 \,; \end{aligned}$$

$$13)\quad \begin{aligned} n - r - s - t &\leqq 2p + q - 2 \,, \\ n' - r' - s' - t' &\leqq 2p + q - 2 \,; \end{aligned}$$

$$14)\quad \begin{aligned} a + r(\varrho - 2) + b + s(\sigma - 2) &\leqq 2(t + 2p + q - 2) \,, \\ a' + r'(\varrho' - 2) + b' + s'(\sigma' - 2) &\leqq 2(t' + 2p + q - 2) \,. \end{aligned}$$

2.

Indem wir uns dazu wenden, aus den aufgestellten Bedingungen Folgerungen zu ziehen, übergehen wir die Fälle, wo

von den Exponenten λ, μ, ν oder λ', μ', ν' noch mindestens einer willkürlich bleibt. Diese Fälle sind schon früher von Herrn Goursat behandelt worden[1]: er findet, dass nur solche algebraische Transformationen stattfinden, welche durch Combination der bekannten rationalen Transformationen erhalten werden.

Nun zeigt sich, dass, so oft von jedem der beiden Grössensysteme r, s, t und r', s', t' wenigstens ein Element Null ist, unter den Exponenten λ, μ, ν und λ', μ', ν' im Allgemeinen ein Paar zugeordneter vorkommt, welche durch einen völlig willkürlichen Parameter darstellbar bleiben, sofern man nämlich ganzzahlige Exponentenwerthe ausschliesst. Wir dürfen daher voraussetzen, dass etwa r, s, t sämmtlich von Null verschieden seien.

Neben den s-Functionen mit ganzzahligen Exponenten (zu denen unter Anderen auch die aus der Theorie der elliptischen Modulfunctionen bekannten Functionen $s(0,\ 0,\ 0,\ x)$ und $s\left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{2},\ x\right)$ gehören, welche den Werth des Periodenverhältnisses ω eines elliptischen Integrals 1. Gattung als Function des Moduls $x = k^2$, oder der absoluten Invariante $x = J$ darstellen) nehmen, wie sich zeigen wird, noch die Functionen:

$$\text{(I)}\quad s\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2},\ \frac{\gamma}{m},\ x\right),\quad s\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{3},\ \frac{\gamma}{3},\ x\right),\quad s\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ x\right),$$
$$s\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{3},\ \frac{\gamma}{5},\ x\right),$$

$$\text{(II)}\quad s\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{3},\ \frac{\gamma}{6},\ x\right),\quad s\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{4},\ \frac{\gamma}{4},\ x\right),\quad s\left(\frac{\alpha}{3},\ \frac{\beta}{3},\ \frac{\gamma}{3},\ x\right).$$

in denen α, β, γ, m irgend welche ganze Zahlen bedeuten, eine Ausnahmestellung ein. Die unter (I) aufgeführten sind sämmtlich *algebraisch*, die unter (II) aufgeführten aber lassen sich, soweit sie nicht ebenfalls *algebraisch* sind, auf *elliptische Integrale* zurückführen. Alle diese Functionen theilen nämlich die Eigenschaft, eine *unendliche Mannichfaltigkeit algebraischer Transformationen* ihres Argumentes zuzulassen.

Der Discussion der Diophantischen Gleichungen schicken wir eine allgemeine Bemerkung voraus, welche an die Gleichung 11) anknüpft:

---

1) Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique (Thèse). Paris 1881. p. 100, f.

Das Vorzeichen der Grösse $\Omega = 1 - \lambda - \mu - \nu$ bleibt bei jeder algebraischen Transformation, welche man auf die Function $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ anwenden mag, ungeändert erhalten.

Man theilt daher die s-Functionen zweckmässig nach dem Zeichen von Ω ein, wie dies schon bei Herrn SCHWARZ geschieht.

Wir nehmen nun die Zahlen ϱ, σ, τ, ϱ', σ', τ' von der Einheit verschieden an und lassen die Voraussetzungen

$$\varrho \leqq \sigma \leqq \tau \ , \qquad \varrho' \leqq \sigma' \leqq \tau' \ ,$$
$$r > 0 \ , \qquad s > 0 \ , \qquad t > 0$$

in Kraft treten.

Man bemerkt ohne Schwierigkeit, dass, solange die Zahlen p und q nicht fixirt sind, die Diophantischen Gleichungen des ersten Abschnitts im Allgemeinen eine *unbegrenzte Anzahl von Lösungen* zulassen werden. Wir wollen uns daher die Zahlen p und q fest gegeben denken.

Dann folgt aus 12), dass die Grössen ϱ, σ, τ nicht gleichzeitig $\geqq 6p + 2q - 3$ sein können. Ist aber $\tau > 6p + 2q - 3$, so folgt $\varrho = 2$ und wir können (den Fall $\varrho = \sigma = 2$ ausschliessend) $\varrho = 2$, $\sigma > 2$, $\tau \geqq \sigma$ annehmen. Aus 14) ergiebt sich dann:

$$b + s(\sigma - 2) \leqq 2(t + 2p + q - 2) \ ,$$

oder

$$c + t\tau = b + s\sigma \leqq \frac{2\sigma}{\sigma - 2}(t + 2p + q - 2) \ ;$$

mithin, da $\frac{2\sigma}{\sigma - 2} \leqq 6$ ist, $t(\tau - 6) \leqq 6(2p + q - 2)$, d. h.:

15) $$\tau < 12p + 6q - 5 \ .$$

Sonach kommt nur eine bestimmte endliche Anzahl möglicher Systeme der ϱ, σ, τ in Frage. Für jedes dieser Systeme ist, sobald man es nicht mit den oben angeführten Ausnahmefällen (I) und (II) zu thun hat, die Grösse $1 - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}$ positiv. Aus 13) aber folgt, wenn $r = \frac{n - a}{\varrho}$, $s = \frac{n - b}{\sigma}$, $t = \frac{n - c}{\tau}$ gesetzt wird:

$$n\left(1 - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}\right) < 2p + q - 2 \ ,$$

also für n die obere Begrenzung:

$$n < \frac{2p+q-2}{1-\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tau}}\,.$$

Über die Zahlen r', s', t' kann noch eine vierfache Annahme gemacht werden. Für jede derselben lässt sich die soeben gebrauchte Schlussweise mit unwesentlichen Modificationen wiederholen und zwar findet sich Folgendes:

A) $r' = s' = t' = 0$, $n' < 2p + q - 2$;

B) $r' > 0,\ s' = t' = 0$, $\varrho' < 6p + 2q - 2$,

$$n' < \frac{2p+q-2}{1-\frac{1}{\varrho'}}\,;$$

C) $r' > 0,\ s' > 0,\ t' = 0,$ $\left\{\begin{array}{l}\varrho',\ \sigma' < 6p+2q-2\\ \text{oder}\\ \varrho' = 2,\ \sigma' < 12p+6q-5\,,\end{array}\right.$

$$n' < \frac{2p+q-2}{1-\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{\sigma'}}\,;$$

D) $r' > 0,\ s' > 0,\ t' > 0,$ $\left\{\begin{array}{l}\varrho',\ \sigma',\ \tau' < 6p+2q-2\\ \text{oder}\\ \varrho' = 2,\ \sigma',\ \tau' < 12p+6q-5,\end{array}\right.$

$$n' < \frac{2p+q-2}{1-\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{\sigma'}-\frac{1}{\tau'}}\,.$$

Nach dem Gesagten ergiebt sich, so oft p und q gegeben sind, eine obere Begrenzung für die beiden Ordnungszahlen n und n'. Sind aber diese fixirt, so existirt auch, wie man sofort erkennt, jedesmal eine bestimmte endliche Anzahl von Lösungssystemen der Diophantischen Gleichungen.

Wir fassen die erhaltenen Resultate zusammen:

Soll die Kummer'sche Differentialgleichung algebraische Integrale besitzen, so ist im Allgemeinen erforderlich, dass die Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ *rationale Werthe* $\frac{\alpha}{\varrho}, \frac{\beta}{\sigma}, \frac{\gamma}{\tau}, \frac{\alpha'}{\varrho'}, \frac{\beta'}{\sigma'}, \frac{\gamma'}{\tau'}$ *haben. Sind die Grössen* $1-\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tau}$ *und* $1-\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{\sigma'}-\frac{1}{\tau'}$ *positiv und von Null verschieden, so ergiebt sich nur eine endliche bestimmte Anzahl wesentlich verschiedener Lösungen, andernfalls unendlich viele.*

Ist andererseits für die gesuchte algebraische Integralgleichung

$f(\overset{n}{x}, \overset{n}{y}) = 0$ das Geschlecht p der Riemann'schen Fläche und die Gesammtzahl q der Blättercyclen gegeben, welche Combinationen der singulären Werthe $x = 0, \infty, 1$ und $y = 0, \infty, 1$ entsprechen sollen, so giebt es immer nur eine bestimmte Anzahl von Fällen, die nicht zu den oben angeführten Ausnahmen gehören und in denen die Kummer'sche Differentialgleichung Integrale der geforderten Art besitzt.

Liegt ein vollständiges Lösungssystem der Diophantischen Gleichungen berechnet vor, so erscheint für die hier mitgetheilte Auffassung das Transformationsproblem identisch mit dem Problem der Aufstellung der algebraischen Irrationalitäten, welche eindeutige Functionen des Ortes auf einer gegebenen RIEMANN'schen Fläche sind.

Hierbei wird man in jedem gegebenen Falle durch eine vorgängige Untersuchung zu entscheiden haben, ob und auf wie vielerlei Weisen durch das betrachtete Lösungssystem der Diophantischen Gleichungen eine *zusammenhängende Riemann'sche Fläche* definirt werden kann. Diese Entscheidung wird dadurch erleichtert, dass die RIEMANN'sche Fläche in zweierlei Form (als x- und y-Fläche) definirt erscheint.

Leipzig, den 29. Januar 1885.

SITZUNG AM 2. MÄRZ 1885.

Felix Klein, *Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen.*

I.

Die Betrachtungen, welche ich in meiner vorigen Note*) der Gesellschaft der Wissenschaften unterbreitete, sind ursprünglich dadurch veranlasst worden, dass ich die Fälle kleiner Primzahlen: $n = 2, 3, 5, 7, 11$ einer directen functionentheoretischen Untersuchung unterwarf **) und dadurch einen Fingerzeig erhielt, in welcher Richtung auch bei höheren Primzahlen einfache Modulsysteme zu finden sein möchten. Die solchergestalt erhaltenen Resultate erwiesen sich dann überhaupt für ungerade Zahlen als gültig, oder doch für solche ungerade Zahlen, welche nicht durch 3 theilbar sind. Es ist aber keineswegs ausgeschlossen, dass für zusammengesetzte Zahlen dieser Art noch einfachere Modulsysteme existiren mögen***), während die Moduln gerader Stufe allgemein noch zu behandeln bleiben. Unter diesen Umständen schien es nützlich, jene directe functionentheoretische Methode, die ihrer Natur nach nur bei kleinen Zahlen durchführbar ist, auf kleine *zusammengesetzte* Zahlen anzuwenden. Ein Mitglied meines Seminars, Herr Fricke, hat sich mit der hierdurch bezeichneten Frage-

---

*) Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe (Sitzung vom 14. Nov. 1884).

**) Vergl. meine bez. Arbeiten in den Bänden 14 und 15 der Mathematischen Annalen.

***) Eine gleiche Vermuthung äusserte mir gelegentlich Herr Kiepert. Man sehe auch die neueste Arbeit von Herrn Weber, Bd. 6 der Acta Mathematica.

stellung ausführlich beschäftigt, und ich möchte im Folgenden zunächst über die hauptsächlichen von ihm erhaltenen Resultate Bericht erstatten. Die Beweise, welche ich unterdrücke, beruhen in allen Fällen auf directer Betrachtung der zugehörigen Fundamentalpolygone der ω-Ebene [ω = Periodenverhältniss].

Erinnern wir uns zunächst der Fälle $n = 2, 3$. In beiden Fällen existirt ein einziger sogenannter *Hauptmodul*, durch welchen sich alle anderen Moduln derselben Stufe rational darstellen. Es ist dies bei $n = 2$ das *Doppelverhältniss* λ, welches mit der absoluten Invariante J durch eine Diëdergleichung sechsten Grades verbunden ist*):

$$(1)\quad J:J-1:1 = 4(\lambda^2-\lambda+1)^3:(2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2)^2:27\lambda^2(1-\lambda)^2,$$

bei $n = 3$ die *Tetraëderirrationalität* a, deren Verbindung mit J durch folgende Gleichung fixirt sei**):

$$(2)\quad J:J-1:1 = (a^4+8a)^3:(a^6-20a^3-8)^2:64(a^3-1)^3.$$

Auch bei $n = 4$ existirt, wie ich früher ausführlich zeigte***), ein Hauptmodul: die *Oktaëderirrationalität* o, definirt durch die Gleichung 24ten Grades:

$$(3)\quad \begin{aligned} &J:J-1:1 = \\ &(o^8+14o^4+1)^3:(o^{12}-33o^8-33o^4+1)^2:108o^4(o^4-1)^4. \end{aligned}$$

Herr Fricke hat nun zunächst, um die *vierte* Stufe an die *zweite* anzuschliessen, den Zusammenhang zwischen o und λ klar gelegt. Wir schreiben in gewöhnlicher Weise für $\lambda(\omega)$ das Legendre'sche $\varkappa^2$ und wählen $\varkappa(\omega)$ insbesondere so, dass

$$\varkappa(0) = 0,\quad \varkappa(1) = +1,\quad \varkappa(i\infty) = \infty$$

ist, während

$$o(\tfrac{1}{2}) = 0,\quad o(0) = 1,\quad o(i\infty) = \infty$$

sein soll. Setzen wir dann noch in üblicher Weise

$$\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$$

und nehmen $\varkappa'(0) = 1$, so kommt:

---

*) Vergl. wegen der im Text gebrauchten Ausdrucksweise ausser den bereits genannten, in den Mathematischen Annalen publicirten Arbeiten meine »Vorlesungen über das Ikosaëder und die Gleichungen fünften Grades« (Leipzig, 1884), im Folgenden kurz als »Vorl.« citirt. — Uebrigens ist λ dieselbe Grösse, welche bei Legendre und Jacobi als $\varkappa^2$ bezeichnet wird, eine Benennung, auf die ich später im Texte zurückgreife.

**) Vorl. pag. 133.

***) Math. Ann. XIV, pag. 155.

(4) $$o = \varkappa' - i\varkappa\,, \qquad \varkappa = i\,\frac{o^2 - 1}{2o}\,, \qquad \varkappa' = \frac{o^2 + 1}{2o}\,.$$

Wir betrachten ferner die *sechste* Stufe. Das aus 72 Doppeldreiecken bestehende Fundamentalpolygon der sechsten Stufe gehört zum Geschlechte $p = 1$. Daher wird sich ein volles Modulsystem sechster Stufe nur durch Nebeneinanderstellung mindestens zweier Moduln erreichen lassen. Am nächsten liegt es, in diesem Sinne die beiden Grössen λ und a (mit denen man in der That ausreicht) simultan zu betrachten. Das Fundamentalpolygon erscheint dann eindeutig auf die Curve bezogen, deren Gleichung sich durch Elimination von J aus (1) und (2) ergibt:

(5) $$256 \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} = 27 \cdot \frac{a^3(a^3 + 8)^3}{(a^3 - 1)^3}\,.$$

Inzwischen erscheint es zweckmässig, die beiden Moduln λ und a durch zwei andere x, y zu ersetzen, indem wir schreiben:

(6) $$\lambda = \frac{(3 - y)^3\,(1 + y)}{16\,y^3}\,, \qquad a = \frac{x^3 + 4}{3x^2}\,.$$

Die Elimination von λ und a zwischen (5), (6) ergibt dann nämlich:

(7) $$y^2 = x^3 + 1$$

und es erscheint also die Curve vom Geschlechte $p = 1$ auf die für sie geltende *Normalform* bezogen. Will man x und y rational durch λ und a ausdrücken, so hat dies keine Schwierigkeit, führt aber zu Formeln, die wir der Kürze halber hier weglassen müssen.

Im Falle der *achten* Stufe, den wir nunmehr betrachten, kommt ein Fundamentalpolygon von 192 Doppeldreiecken und dem Geschlechte $p = 5$ in Betracht. Zugehörige Moduln sind, wie selbstverständlich, die Quadratwurzeln $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$. *Es ist aber sehr wichtig, zu bemerken, dass sie allein genommen noch nicht ausreichen, um die einzelne Stelle des Fundamentalpolygons zu fixiren.* Vielmehr gehören zu jedem Puncte der durch $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ bestimmten ebenen Curve vom Geschlechte 3 und der Gleichung:

(8) $$(\sqrt{\varkappa})^4 + (\sqrt{\varkappa'})^4 = 1$$

immer noch zwei Stellen des Polygons. *Um eindeutige Beziehung zu erhalten, müssen wir zu $\sqrt{x}$, $\sqrt{x'}$ etwa noch folgende Grösse hinzunehmen:*

(9) $$\sqrt{o} = \sqrt{x' - ix}\,.$$

Wir haben dann neben (8) noch folgende Relation:

(10) $$(\sqrt{o})^2 = (\sqrt{x'})^2 - i\,(\sqrt{x})^2$$

und also unser Fundamentalpolygon eindeutig auf eine (durch (8), (10) dargestellte) Raumcurve achter Ordnung abgebildet. — Des Näheren wollen wir die hier angeführten Wurzelzeichen in der Folge so fixirt denken, dass

$$\sqrt{x(1)} = 1\,, \qquad \sqrt{x'(0)} = 1\,, \qquad \sqrt{o(0)} = 1$$

wird.

Wir schreiten zu $n = 9$. Wir haben dann 324 Doppeldreiecke und ein Geschlecht $p = 10$ des Fundamentalpolygons. Sei $\varrho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. *Eine einfache Ueberlegung zeigt dann, dass ein volles Modulsystem der neunten Stufe durch Nebeneinanderstellung der folgenden Cubikwurzeln gegeben ist:*

(11) $$\sqrt[3]{a-1}\,, \qquad \sqrt[3]{a-\varrho}\,, \qquad \sqrt[3]{a-\varrho^2}\,.$$

Zwischen denselben bestehen die selbstverständlichen Relationen:

(12) $$\left(\sqrt[3]{a-1}\right)^3 + 1 = \left(\sqrt[3]{a-\varrho}\right)^3 + \varrho = \left(\sqrt[3]{a-\varrho^2}\right)^3 + \varrho^2;$$

das Fundamentalpolygon erscheint also vermöge unserer Darstellung eindeutig auf eine Raumcurve neunter Ordnung bezogen.

Wir erledigen endlich noch den Fall $n = 16$. Es handelt sich um ein Fundamentalpolygon von 1536 Doppeldreiecken und dem Geschlechte $p = 81$. Zugehörige Moduln sind vor allen Dingen:

(13) $$\sqrt[4]{x}\,, \quad \sqrt[4]{x'}\,,$$

zwischen denen die Relation besteht:

(14) $$\left(\sqrt[4]{x}\right)^8 + \left(\sqrt[4]{x'}\right)^8 = 1\,,$$

aber allein genommen reichen dieselben wieder keineswegs aus, um die einzelne Stelle des Fundamentalpolygons festzu-

legen. Wollen wir ein volles Modulsystem der sechszehnten Stufe haben, so können wir einmal, wie bei der achten Stufe, die Quadratwurzel aus der Oktaëderirrationalität:

$$(15)\qquad \sqrt{o}$$

hinzunehmen, worauf neben (14) die folgende Gleichung tritt:

$$(16)\qquad \left(\sqrt{o}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{x'}\right)^4 - i\left(\sqrt{x}\right)^4 .$$

Aber hiermit reichen wir noch nicht aus; wir müssen überdies noch eine zweite Irrationalität adjungiren, welche selbst wieder mit den vorgenannten Moduln durch eine quadratische Gleichung zusammenhängt. Als derartige Irrationalität bringt Herr Fricke insbesondere in Vorschlag:

$$(17)\qquad \sqrt{\frac{\sqrt{2x'} + \sqrt{x' + ix}}{\sqrt{2x'} - \sqrt{x' - ix}}} .$$

Zwischen den so definirten Moduln bez. Modulsystemen ergeben sich natürlich bei Transformation zweiter oder dritter Ordnung von ω zahlreiche Zusammenhänge, von denen hier die einfachsten erwähnt werden sollen*).

1) Es ist:

$$(18)\qquad \lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{(o-1)^4}{8o(1+o^2)}, \quad \lambda\left(\frac{\omega+1}{2}\right) = \frac{(1+io)^4}{8io(1-o^2)},$$
$$\lambda(2\omega) = 1 - o^4\,{}^{**});$$

analog:

$$(19)\qquad \lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = -\frac{(1+x'-2\sqrt{x'})^2}{8\sqrt{x'}(1+x')},$$

$$(20)\qquad \lambda\left(\frac{\omega}{8}\right) = -\frac{\left[(1+\sqrt{x'})^2 - 2\sqrt{2}\,\sqrt[4]{x'}\,\sqrt{1+x'}\right]^2}{2\sqrt{2}\,\sqrt[4]{x'}\,\sqrt{1+x'}\,(1+\sqrt{x'})^2}, \text{ etc.}$$

2) Von den transformirten Werthen von o kommen insbesondere die folgenden in Betracht:

---

*) Man könnte insbesondere immer auch die transformirten Werthe von J in Betracht ziehen, doch haben die betreffenden Formeln wegen ihrer Complicirtheit kein sonderliches Interesse.

**) Bei anderer Fixirung von o wird diese Formel einfach:

$$\lambda(2\omega) = o^4.$$

$$(21)\quad o\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\varkappa'},\quad o\left(\frac{\omega+1}{2}\right) = -i\sqrt{\varkappa},\quad o(2\omega) = \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\varkappa'}+\sqrt{\varkappa}}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\varkappa'}-\sqrt{\varkappa}}$$

$$(22)\quad o\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1+o}{2\sqrt{\varkappa'}\sqrt[4]{o}}\quad \text{u. s. w.}$$

3) Endlich hat man für Transformation dritter Ordnung der Tetraëderirrationalität, wenn man die Moduln neunter Stufe (11) der Kürze halber bez. mit x, y, z bezeichnet:

$$(23)\quad a\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{a+2}{yz},\quad \text{etc.},\quad a(3\omega) = \frac{a+2xyz}{a-xyz}\text{*)}.$$

Andererseits wird man fragen, wie die eingeführten Moduln mit den *Theilwerthen der elliptischen Functionen* zusammenhängen. Es muss dabei wohl beachtet werden, dass Weierstrass' elliptische Functionen (die einzigen, die wir hier gebrauchen) homogene Functionen der beiden Variabelen ω_1, ω_2 sind, während unsere Moduln nur von dem Verhältnisse $\omega_1 : \omega_2$ abhängen. Es ist daher zweckmässig, unsere Moduln λ, a, o selbst in Zähler und Nenner zu spalten:

$$(24)\qquad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},\qquad a = \frac{a_1}{a_2},\qquad o = \frac{o_1}{o_2},$$

---

*) Ebenso, wie man die wiederholte quadratische Transformation verwenden kann, um aus gegebenem λ das zugehörige ω zu berechnen, kann man die Formel des Textes dazu benutzen, um bei gegebenem a das Entsprechende zu erreichen. Für sehr kleine Werthe von $q\,(=e^{i\pi\omega})$ ist ω annäherungsweise $= -\frac{3}{2i\pi}\log(3a-3)$. Sei nun abkürzend $a_\nu = a(3^\nu\omega)$, worauf wir dem Texte die Formelkette entnehmen:

. . . .

$$a_\nu = \frac{a_{\nu-1}+2\sqrt[3]{a_{\nu-1}^3-1}}{a_{\nu-1}-\sqrt[3]{a_{\nu-1}^3-1}},$$

$$a_{\nu+1} = \frac{a_\nu+2\sqrt[3]{a_\nu^3-1}}{a_\nu-\sqrt[3]{a_\nu^3-1}},$$

. . . .

Dann ist allgemein:

$$\omega = \left[\frac{i\log(3a_\nu-3)}{2\pi\cdot 3^{\nu-1}}\right]\lim \nu=\infty\,.$$

wobei wir nun Zähler und Nenner (übrigens in Uebereinstimmung mit den Fundamentalgleichungen (1), (2), (3)) definiren werden, indem wir bestimmte Darstellungen von g_2 und g_3 durch λ_1, λ_2 etc. verlangen.

Zunächst, was die *Theilwerthe von* $p(u)$ angeht, so findet Herr Fricke folgende Resultate.

1) Sei $n = 2$ und

$$(25) \qquad \frac{3g_3}{g_2} = \frac{-2\lambda_1^3 + 3\lambda_1^2\lambda_2 + 3\lambda_1\lambda_2^2 - 2\lambda_2^3}{\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2},$$

so wird:

$$(26) \quad p\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \lambda_2 - 2\lambda_1, \quad p\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \lambda_1 - 2\lambda_2, \quad p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = \lambda_1 + \lambda_2;$$

oder auch (indem wir die Weierstrass'sche Bezeichnung e_1, e_2, e_3 für die drei Theilwerthe aufnehmen):

$$(27) \quad e_1 - e_2 = -3(\lambda_1 - \lambda_2), \quad e_1 - e_3 = -3\lambda_1, \quad e_2 - e_3 = -3\lambda_2.$$

2) Im Falle $n = 3$ bestimme man a_1, a_2 in Uebereinstimmung mit folgender Gleichung:

$$(28) \qquad \frac{2g_2}{3g_3} = \frac{a_1(a_1^3 + 8a_2^3)}{a_1^6 - 20a_1^3a_2^3 - 8a_2^6}.$$

Es gelten dann nachstehende Formeln:

$$(29) \quad \begin{aligned} &\sqrt{p\left(\frac{\omega_1}{3}\right)} = i\sqrt{3}\cdot a_1, \quad \sqrt{p\left(\frac{\omega_2}{3}\right)} = a_1 + 2a_2, \\ &\sqrt{p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right)} = a_1 + 2\varrho a_2, \quad \sqrt{p\left(\frac{\omega_1+2\omega_2}{3}\right)} = a_1 + 2\varrho^2 a_2. \end{aligned}$$

3) Endlich sei $n = 4$. Wir unterwerfen o_1, o_2 der folgenden Bedingung:

$$(30) \qquad \frac{g_2}{g_3} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{o_1^8 + 14o_1^4o_2^4 + o_2^8}{o_1^{12} - 33o_1^8o_2^4 - 33o_1^4o_2^8 + o_2^{12}}.$$

Dann kommt:

$$(31) \quad \begin{cases} p\left(\frac{\omega_1}{4}\right) = o_1^4 - 5o_2^4, \quad p\left(\frac{\omega_1+2\omega_2}{4}\right) = -5o_1^4 + o_2^4, \\ p\left(\frac{\omega_2}{4}\right) = (o_1 - o_2)^4 - 2o_1o_2(o_1^2 + o_2^2), \\ p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\right) = (o_1 - io_2)^4 - 2io_1o_2(o_1^2 - o_2^2), \\ p\left(\frac{2\omega_1+\omega_2}{4}\right) = (o_1 + o_2)^4 + 2o_1o_2(o_1^2 + o_2^2), \\ p\left(\frac{3\omega_1+\omega_2}{4}\right) = (o_1 + io_2)^4 + 2io_1o_2(o_1^2 - o_2^2). \end{cases}$$

Wichtiger erscheinen auch hier wieder die *Theilwerthe von* σ, die ich in meiner vorigen Note (pag. 64 daselbst) mit $\sigma_{\lambda\mu}$ bezeichnete und durch die Formel definirte:

$$(32)\qquad \sigma_{\lambda\mu} = -e^{-\frac{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}{2n^2}} \cdot \sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right);$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist, ist bereits die n^{te} Potenz von $\sigma_{\lambda\mu}$, oder erst die $2n^{\text{te}}$, eine Modulform der n^{ten} Stufe. Herr Fricke findet für die Darstellung der in Rede stehenden Potenzen von $\sigma_{\lambda\mu}$ in den einzelnen von ihm behandelten Fällen folgende Resultate.

1) Sei $n = 2$ und dabei λ_1, λ_2 in der Art gewählt, dass

$$(33)\qquad g_2 = +\frac{16}{3}\cdot\frac{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\,.$$

Dann kommt für die Theilwerthe von σ:

$$(34)\qquad \sigma_{01}^4 = \lambda_1\,,\qquad \sigma_{10}^4 = \lambda_2\,,\qquad \sigma_{11}^4 = -\lambda_1+\lambda_2\,.$$

2) Im Falle $n = 3$ setzen wir

$$(35)\qquad 3g_3 = -\frac{a_1^6-20a_1^3a_2^3-8a_2^6}{a_2^2(a_1^3-a_2^3)^2}\,;$$

wir finden dann*)

$$(36)\qquad \begin{aligned} -\sigma_{10}^3 &= \sqrt{-3}\,.\,a_2\,, & -\sigma_{01}^3 &= a_1-a_2\,,\\ -\sigma_{11}^3 &= a_1\varrho^2-a_2\,, & -\sigma_{21}^3 &= a_1\varrho-a_2\,, \end{aligned}$$

vier Ausdrücke, deren nahe Beziehung zu den oben eingeführten Moduln neunter Stufe ersichtlich ist.

3) Für $n = 4$ nehmen wir:

$$(37)\qquad g_2^2 = \frac{8}{9}\cdot\frac{(o_1^8+14o_1^4o_2^4+o_2^8)^2}{o_1^3o_2^3(o_1^4-o_2^4)^3}\,.$$

Es kommen dann folgende Darstellungen der Theil-Sigma:

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma_{10}^8 &= 2\,\frac{o_2^3}{o_1}\,, & \sigma_{12}^8 &= -2\,\frac{o_1^3}{o_2}\,,\\ \sigma_{01}^8 &= \frac{(o_1-o_2)^3}{o_1+o_2}\,, & \sigma_{21}^8 &= -\frac{(o_1+o_2)^3}{o_1-o_2}\,,\\ \sigma_{11}^8 &= \frac{(o_1-io_2)^3}{o_1+io_2}\,, & \sigma_{31}^8 &= -\frac{(o_1+io_2)^3}{o_1-io_2}\,. \end{aligned}\right.$$

*) Man vergl. auch Bianchi im 17. Bande der Math. Annalen, pag. 244.

Ihnen laufen die folgenden Formeln parallel, bei denen rechter Hand die in (34) bestimmten zweiten Theilwerthe gebraucht werden, die ich der Reihe nach, um jedes Missverständniss zu vermeiden, mit μ, ν, ϱ bezeichnen will:

$$(39)\quad \begin{cases} \sigma_{10}{}^4 = \dfrac{i-1}{2\sqrt{2}}\cdot\varrho\nu(\varrho^2+i\nu^2)\,, & \sigma_{12}{}^4 = \dfrac{1-i}{2\sqrt{2}}\cdot\varrho\nu(\nu^2+i\varrho^2)\,; \\ \sigma_{01}{}^4 = \dfrac{i-1}{2\sqrt{2}}\cdot\mu\varrho(\varrho^2+i\mu^2)\,, & \sigma_{21}{}^4 = \dfrac{1-i}{2\sqrt{2}}\cdot\mu\varrho(\mu^2+i\varrho^2)\,; \\ \sigma_{11}{}^4 = \dfrac{1-i}{2\sqrt{2}}\cdot\mu\nu(\nu^2+i\mu^2)\,, & \sigma_{31}{}^4 = \dfrac{i-1}{2\sqrt{2}}\cdot\mu\nu(\mu^2+i\nu^2)\,. \end{cases}$$

Die Formeln, welche die *zweiten* Potenzen der vorliegenden $\sigma_{\lambda\mu}$ durch die Moduln 16ter Stufe darstellen, werden zu complicirt, um hier eine Stelle finden zu können.

4) Sei endlich $n = 8$. Es möge genügen, eine einzige der dann in Betracht kommenden Formeln anzuführen. Es wird:

$$(40)\quad \sigma_{01} = -e^{-\frac{\eta_2\omega_2}{128}}\cdot\sigma\left(\frac{\omega_2}{8}\right)$$

$$= -e^{-\frac{\eta_2\omega_2}{32}}\cdot\sigma\left(\frac{\omega_2}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt[16]{8}\cdot\sqrt[8]{x'}\cdot\sqrt[32]{x'}\cdot\sqrt[16]{1+x'}}{\sqrt[4]{1+\sqrt{x'}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x'}+\sqrt{1+x'}}}}\,.$$

Neben diese Darstellungen der $\sigma_{\lambda\mu}$ durch unsere Moduln stellen sich natürlich andere, welche unsere Moduln durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausdrücken. Dieselben erscheinen um so bemerkenswerther, als die $\sigma_{\lambda\mu}$ von vornherein für sämmtliche Stufen bekannt sind und wir also hoffen dürfen, bei höheren Stufen einfachste Modulsysteme zu finden, indem wir analoge Combinationen der $\sigma_{\lambda\mu}$ heranziehen, wie sie für niedere Stufen in unseren Formeln sich thatsächlich einstellen. Herr Fricke bemerkt in dieser Hinsicht insbesondere folgende Darstellungen der Moduln 16ter Stufe.

1) Unter $\sigma_{\lambda\mu}$ die vierten Theilwerthe verstanden hat man:

$$(41)\quad \sqrt[4]{x} : \sqrt[4]{x'} : \sqrt[8]{-1} = \sigma_{01}\sigma_{21} : \sigma_{11}\sigma_{31} : \sigma_{10}\sigma_{12}\,.$$

2) Ferner, unter $\sigma_{\lambda\mu}$ die achten Theilwerthe verstanden:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{o}} \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{2x'} - \sqrt{x' - ix}}{\sqrt{2x'} + \sqrt{x' + ix}}} = \dfrac{\sigma_{01} \cdot \sigma_{21} \cdot \sigma_{41} \cdot \sigma_{61}}{\sigma_{03} \cdot \sigma_{23} \cdot \sigma_{43} \cdot \sigma_{63}}, \\[2ex] \varepsilon \sqrt{o} \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{2x} + \sqrt{x - ix'}}{\sqrt{2x} - \sqrt{x + ix'}}} = \dfrac{\sigma_{11} \cdot \sigma_{31} \cdot \sigma_{51} \cdot \sigma_{71}}{\sigma_{13} \cdot \sigma_{33} \cdot \sigma_{53} \cdot \sigma_{73}}, \\[2ex] \varepsilon \cdot \dfrac{\sqrt{1 - x'}}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{2x'} - \sqrt{1 - x'}}{\sqrt{2x'} + \sqrt{1 + x'}}} = \dfrac{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12} \cdot \sigma_{14} \cdot \sigma_{16}}{\sigma_{30} \cdot \sigma_{32} \cdot \sigma_{34} \cdot \sigma_{36}}. \end{cases}$$

Der Buchstabe ε bedeutet dabei eine 32te Einheitswurzel.

II.

An die Theorie der Moduln schliesst sich naturgemäss die Lehre von den *Modulargleichungen*. Eigentliche Modulargleichungen existiren bekanntlich nur für Hauptmoduln und bei ihnen auch nur für diejenigen Transformationsgrade, welche zur Stufe des Hauptmoduls relativ prim sind*). Nun zeichnen sich unter allen Hauptmoduln die drei, die wir vorhin voranstellten: das Doppelverhältniss λ, die Tetraëderirrationalität a, die Oktaëderirrationalität o, denen dann noch die *Ikosaëderirrationalität* (die wir η nennen wollen) hinzutritt, dadurch aus, dass sie zugleich Galois'sche Moduln ihrer Stufe sind und sich daher bei beliebiger Transformation von ω selber linear substituiren. In Folge dessen haben die für sie geltenden Modulargleichungen die charakteristische Eigenschaft, durch gewisse simultane lineare Substitutionen, denen einerseits der ursprüngliche, andererseits der transformirte Modul zu unterwerfen ist, in sich selbst überzugehen.

Ausserdem bleiben die Modulargleichungen, wie selbstverständlich, bei Vertauschung des ursprünglichen Moduls mit dem transformirten ungeändert bestehen. Handelt es sich jetzt um Aufstellung der Modulargleichungen, so wird man zweckmässigerweise in der Art beginnen, dass man vorab die allgemeine Form derjenigen Gleichungen zu bestimmen sucht, die bei den erwähnten Processen invariant bleiben: die wirkliche Berechnung der Modulargleichung im gegebenen Falle muss dann auf Auswerthung nur weniger Zahlencoëfficienten

*) Vergl. etwa Bd. 17 der Mathematischen Annalen, pag. 66 ff.

mit Hülfe der für λ, a, o, η geltenden, nach q fortschreitenden Reihenentwickelungen zurückkommen.

Der hiermit bezeichnete Ansatz, den ich schon bei früherer Gelegenheit zur Sprache gebracht hatte*), ist jetzt von Herrn Friedrich durchgeführt worden. Es handelte sich dabei einmal zur Fixirung der auf den ursprünglichen und den transformirten Modul auszuübenden simultanen Substitutionen um geschickte Wahl der zur Transformation gehörigen Repräsentanten, es handelte sich dann aber ferner um *algebraische*, der *Invariantentheorie* entnommene Processe, welche an diejenigen Theorien anknüpfen, die ich neuerdings in meinen »Vorlesungen über das Ikosaëder etc.« dargestellt habe.

Im Falle des *Doppelverhältnisses* λ (dessen Stufe die zweite ist) kommen als Transformationsgrade n beliebige ungerade Zahlen in Betracht. Nennen wir den transformirten Werth μ, so kann man, wie Herr Friedrich zeigt, μ in allen Fällen so wählen, dass es mit λ zusammen je dieselben Doppelverhältnisssubstitutionen erfährt. Wir nehmen λ gleich $\lambda_1 : \lambda_2$, μ gleich $\mu_1 : \mu_2$ und ersetzen die linearen Substitutionen von λ, bez. μ je durch die ihnen entsprechenden homogenen von der Determinante Eins. Alle homogenen ganzen Functionen von λ_1, λ_2 allein, welche bei den in Rede stehenden Substitutionen ungeändert bleiben, sind bekanntlich ganze Functionen der folgenden drei einfachsten unter ihnen:

$$(43)\quad \begin{cases} (\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)^2\,, \\ (\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2)^2\,, \\ (\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2)(2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3)\,^{**}). \end{cases}$$

Aus ihnen leitet man dann leicht alle Formen ab, welche λ und μ gleichzeitig enthalten und bei den simultanen Subtitutionen dieser Grössen ungeändert bleiben: die in Rede stehenden Formen setzen sich aus der Determinante $(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$ und den nach μ_1, μ_2 genommenen Polaren der Formeln (43) zusammen. Nunmehr beachte man noch, dass die Modulargleichung bei Vertauschung von λ und μ ungeändert bleiben soll. *Schliesslich ergibt sich, dass die linke Seite der Modulargleichung eine ganze Function der folgenden vier Ausdrücke sein muss:*

---

*) Vergl. Annalen XVII, pag. 69.

**) Vorl. pag. 68. — Man vergl. auch Gleich. (1) des Textes.

$$(45)\begin{cases} A_2 = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\ , \\ A'_2 = (2\lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 + 2\lambda_2\mu_2)^2\ , \\ A_4 = (2\lambda_1\mu_1-\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1+2\lambda_2\mu_2)(\lambda_1^2\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^2)(\mu_1^2\mu_2-\mu_1\mu_2^2), \\ A_6 = (\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2)^2(\mu_1^2\mu_2 - \mu_1\mu_2^2)^2\ . \end{cases}$$

Beispielsweise kommt für $n = 3,\ 5,\ 7$ der Reihe nach:

$$(46)\begin{cases} n = 3:\ A_2^2 - 128A_4 = 0\ , \\ n = 5:\ A_2^3 - 512(16A'_2A_4 - 9A_2A_4 - 32\,.\,27A_6) = 0\ , \\ n = 7:\ A_2^4 - 256(2^{11}A'^2_2A_4 - 19\,.\,2^7A_2A'_2A_4 + \\ \quad + 13\,.\,3^2\,.\,5A_2^2A_4 + 125\,.\,2^6\,.\,3^3A'_2A_6 - 125\,.\,2^7\,.\,3^3A_2A_6). \end{cases}$$

Die Gleichungen für $n = 3,\ 5$ finden sich bereits in Jacobi's Fundamenta (Bd. I, p. 122, 123 der gesammelten Werke), worauf hier um so mehr verwiesen sei, als der Fortschritt der Methode, welcher hier vorliegt, beim Vergleiche unverkennbar hervortritt.

Bei der *Tetraëderirrationalität* a müssen wir unterscheiden, ob der Transformationsgrad n zu 1 oder 2 modulo 3 congruent ist. Beidemal schreiben wir $a_1 : a_2$ für a und $b_1 : b_2$ für den transformirten Werth. Wir haben ferner von folgenden, die a_1, a_2 allein enthaltenden Formen auszugehen*):

$$(47)\qquad\begin{cases} a_1^6 - 20a_1^3a_2^3 - 8a_2^6\ , \\ (a_1^3a_2 - a_2^4)(a_1^4 + 8a_1a_2^3)\ , \\ (a_1^3a_2 - a_2^4)^3\ . \end{cases}$$

Ist jetzt $n \equiv 1$ (mod. 3), so kann man $b_1 : b_2$ so wählen, dass es je dieselben Substitutionen erleidet wie $a_1 : a_2$. Im anderen Falle gilt der analoge Satz, sofern man für $b_1 : b_2$ setzt $-2b_2 : b_1$. Schliesslich bekommen wir in beiden Fällen vier Functionen, aus denen sich die linke Seite der Modulargleichung zusammensetzen muss. *Es sind dies bei $n \equiv 1$ (mod. 3):*

$$(48)\begin{cases} D_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2\ , \\ D_3 = -a_1^3b_1^3 + a_1^3b_2^3 + 9a_1^2a_2b_1b_2^2 + 9a_1a_2^2b_1^2b_2 + \\ \qquad\qquad + a_2^3b_1^3 + 8a_2^3b_2^3\ , \\ D_4 = (a_1^3a_2-a_2^4)(b_1^4+8b_1b_2^3)+(b_1^3b_2-b_2^4)(a_1^4+8a_1a_2^3)\ , \\ D_6 = (a_1^3a_2-a_2^4)(b_1^3b_2-b_2^4)(a_1^2b_1b_2+a_1a_2b_1^2-2a_2^2b_2^2)\ , \end{cases}$$

---

*) Siehe oben Gleich. (2); Vorl. pag. 63.

dagegen im anderen Falle:

$$(49)\begin{cases} E_1 = a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 \;, \\ E_3 = a_1^3 b_1^3 - 18 a_1^2 a_2 b_1^2 b_2 + 36 a_1 a_2^2 b_1 b_2^2 - 8 a_2^3 b_2^3 + \\ \qquad\qquad + 8 a_1^3 b_2^3 + 8 a_2^3 b_1^3 \,. \\ E_4 = (a_1^4 + 8 a_1 a_2^3)(b_1^4 + 8 b_1 b_2^3) \;, \\ E_6 = (a_1^3 a_2 - a_2^4)(b_1^4 + 8 b_1 b_2^3)(a_1^2 b_1 b_2 - 2 a_1 a_2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \\ \quad + (a_1^4 + 8 a_1 a_2^3)(b_1^3 b_2 - b_2^4)(a_1^2 b_2^2 + a_1 a_2 b_1^2 - 2 a_2^2 b_1 b_2 \,. \end{cases}$$

Beispiele von Modulargleichungen der Tetraëderirrationalität sind folgende:

$$(50)\begin{cases} n = 2:\; E_1^3 + E_3 = 0 \;, \\ n = 4:\; D_6 + 2^5 D_3^2 + 5 \,.\, 2^6 \,.\, 3^6 D_2 D_4 \\ \qquad\qquad + 5^2 \,.\, 2^5 \,.\, 3^9 \,.\, 11 D_2^3 = 0 \,, \\ n = 5:\; (E_1^3 - E_3)^2 - 18 E_1^2 E_4 = 0 \;, \\ n = 7:\; (27 D_4 + 140 D_2^2)^2 + 27 D_2 (D_3^2 + 896 D_6) \\ \qquad\qquad - 12800 D_2^3 = 0 \,. \end{cases}$$

Auch bei *Oktaëder* und *Ikosaëder* sind die Verhältnisse ganz ähnlich; es wird genügen, wenn ich die in den einzelnen Fällen geltenden Resultate tabellarisch angebe. Dabei ist wieder $o_1 : o_2$ für o, $\eta_1 : \eta_2$ für η gesetzt, während die transformirten Werthe beziehungsweise mit $p_1 : p_2$ und $\zeta_1 : \zeta_2$ benannt wurden.

Modulargleichungen des Oktaëders.

1) $n \equiv 1$ (mod. 4). Die Irrationalitäten o und p erfahren simultan je dieselben Substitutionen. Grundformen, aus denen sich die linke Seite der Modulargleichung zusammensetzen muss:

$$(51)\begin{cases} D_2 = (o_1 p_2 - o_2 p_1)^2 \;, \\ D_4 = 5 o_1^4 p_1^4 + o_2^4 p_1^4 + 16 o_1 o_2^3 p_1^3 p_2 + 36 o_1^2 o_2^2 p_1^2 p_2^2 \\ \qquad\qquad + 16 o_1^3 o_2 p_1 p_2^3 + o_1^4 p_2^4 + 5 o_2^4 p_2^4 \,, \\ D_6 = [o_1^3 p_1^2 p_2 + o_1^2 o_2 p_1^3 - o_1 o_2^2 p_2^3 - o_2^3 p_1 p_2^2]^2 \;, \\ D_{12} = [(o_1^6 p_1^6 + o_2^6 p_2^6) - (o_1^2 p_1^2 + o_2^2 p_2^2) \,. \\ \quad . (o_1^4 p_2^4 + 8 o_1^3 o_2 p_1 p_2^3 + 15 o_1^2 o_2^2 p_1^2 p_2^2 + 8 o_1 o_2^3 p_1^3 p_2 + o_2^4 p_1^4)]^2 . \end{cases}$$

2) $n \equiv 3$ (mod. 4). Die Substitutionen für o und p unterscheiden wir durch das Vorzeichen von $i\,(= \sqrt{-1})$. Volles Formensystem:

$$(52)\quad\begin{cases} E_1 = o_1 p_1 + o_2 p_2 , \\ E_4 = o_1^4 p_1^4 - 16 o_1^3 o_2 p_1^3 p_2 + 36 o_1^2 o_2^2 p_1^2 p_2^2 - 16 o_1 o_2^3 p_1 p_2^3 \\ \qquad + o_2^4 p_2^4 + 5 o_1^4 p_2^4 + 5 o_2^4 p_1^4 , \\ E_6 = [o_1^3 p_1 p_2^2 - o_1^2 o_2 p_2^3 - o_1 o_2^2 p_1^3 + o_2^3 p_1 p_2^2]^2 , \\ E_{12} = [(o_1^6 p_2^6 + o_2^6 p_1^6) - (o_1^2 p_2^2 + o_2^2 p_1^2) \cdot \\ \cdot (o_1^4 p_1^4 - 8 o_1^3 o_2 p_1^3 p_2 + 15 o_1^2 o_2^2 p_1^2 p_2^2 - 8 o_1 o_2^3 p_1 p_2^3 + o_2^4 p_2^4)]^2 . \end{cases}$$

3) Beispiele. Man findet:

$$(53)\quad\begin{cases} n = 3: \; E_1^4 - E_4 = 0 , \\ n = 5: \; 20 D_6 - 4 D_2 D_4 - D_2^3 = 0 , \\ n = 7: \; 79 E_1^8 - 78 E_1^4 E_4 - E_4^2 + 400 E_1^2 E_6 = 0 . \end{cases}$$

Die ersten dieser beiden Gleichungen sind übrigens in anderer Form wohlbekannt. Da nämlich $o(\omega)$, wie oben erwähnt, bei geeigneter Fixirung des in Betracht zu nehmenden Functionszweiges mit $\sqrt[4]{\lambda(2\omega)} = \sqrt{\varkappa(2\omega)}$ gleichbedeutend ist, so sind die Modulargleichungen der Oktaëderirrationalität mit den für $\sqrt{\varkappa}$ geltenden identisch; letztere aber finden sich für $n = 3, 5$ beispielsweise bei Cayley im 164ten Bande der Philosophical Transactions (p. 451, 452) aufgestellt.

Modulargleichungen des Ikosaëders.

1) $n \equiv 1$ (mod. 5). Die Substitutionen von η und ζ sind dieselben. Es giebt vier Grundformen:

$$(54)\quad\begin{cases} D_2 = (\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1)^2 , \\ D_6 , \quad D_{10} , \quad D_{15} , \end{cases}$$

wo D_6, D_{10}, D_{15} aus den wohlbekannten Ikosaëderformen:

$$(55)\quad\begin{cases} f = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^{10} + 11 \eta_1^5 \eta_2^5 - \eta_2^{10}) , \\ H = -(\eta_1^{20} + \eta_2^{20}) + 228 (\eta_1^{15} \eta_2^5 - \eta_1^5 \eta_2^{15}) - 494 \eta_1^{10} \eta_2^{10} , \\ T = (\eta_1^{30} + \eta_2^{30}) + 522 (\eta_1^{25} \eta_2^5 - \eta_1^5 \eta_2^{25}) \\ \qquad - 10005 (\eta_1^{20} \eta_2^{10} + \eta_1^{10} \eta_2^{20}) \end{cases}$$

beziehungsweise durch sechs-, zehn-, fünfzehnmalige Polarisation nach ζ_1, ζ_2 erwachsen.

2) $n \equiv 4$ (mod. 5). Vier Grundformen:

$$(56)\quad E_1 , \quad E_6 , \quad E_{10} , \quad E_{15} ,$$

wo

$$E_1 = \eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2 ,$$

während E_6, E_{10}, E_{15} aus den gerade genannten D_6, D_{10}, D_{15} hervorgehen, indem man ζ_1, ζ_2 durch $-\zeta_2$, ζ_1 ersetzt.

3) $n \equiv 2 \pmod{5}$. Die Substitutionen von ζ_1, ζ_2 ergeben sich aus denjenigen von η_1, η_2 durch Verwandlung der fünften Einheitswurzel ε in ε^2. Es gibt drei Grundformen, dieselben, welche Herr Gordan im 13ten Bande der Mathematischen Annalen (p. 379, 381 daselbst) unter der Benennung f, φ, ψ aufgestellt hat. Wir schreiben:

$$(57)\begin{cases} \varphi = \eta_1^3\zeta_1^2\zeta_2 + \eta_1^2\eta_2\zeta_2^3 + \eta_1\eta_2^2\zeta_1^3 - \eta_2^3\zeta_1\zeta_2^2 , \\ \psi = -\eta_1^4\zeta_1\zeta_2^3 + \eta_1^3\eta_2\zeta_1^4 + 3\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2 - \eta_1\eta_2^3\zeta_2^4 \\ \qquad + \eta_2^4\zeta_1^3\zeta_2 , \\ \chi = \eta_1^5\zeta_1^5 + \eta_1^5\zeta_2^5 - \eta_2^5\zeta_1^5 + \eta_2^5\zeta_2^5 \\ +10\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2[-\eta_1^3\zeta_1^2\zeta_2 + \eta_1^2\eta_2\zeta_2^3 + \eta_1\eta_2^2\zeta_1^3 + \eta_2^3\zeta_1\zeta_2^2]. \end{cases}$$

4) $n \equiv 3 \pmod{5}$. Drei Grundformen:

$$(58)\qquad \varphi' , \quad \psi' , \quad \chi' ,$$

die sich aus den gerade genannten ergeben, wenn wir ζ_1, ζ_2 durch $-\zeta_2$, ζ_1 ersetzen.

5) Beispiele von Ikosaëdermodulargleichungen:

$$(59)\begin{cases} n = 2: & \varphi = 0 , \\ n = 3: & \psi' = 0 , \\ n = 4: & E_1^6 - E_6 = 0 , \\ n = 6: & 11 . 17 D_6^2 - 18 . 49 D_2 D_{10} + 121 . 16 D_2^3 D_6 \\ & \qquad - 17 . 73 D_2^6 = 0 , \\ n = 7: & \psi^2 - \varphi\chi = 0 , \\ n = 8: & \varphi'^4 - \varphi'\psi'\chi' + \psi'^3 = 0 , \\ n = 9: & 11 . 17 E_6^2 + 6 . 49 E_1^2 E_{10} + 11 . 16 . 53 E_1^6 E_6 \\ & \qquad - 17 . 577 E_1^{12} = 0 , \\ n = 11: & 11 . 17 D_6^2 - 18 . 49 D_2 D_{10} - 11 . 8 . 335 D_2^3 D_6 \\ & \qquad - 17 . 75841 D_2^6 = 0 , \\ n = 13: & \varphi'^3\chi' - \varphi'^2\psi'^2 - \psi'\chi'^2 = 0 . \end{cases}$$

(Man vergl. hierzu die Entwickelungen in meinen »Vorlesungen über das Ikosaëder«, sowie insbesondere Bd. XIV der Mathematischen Annalen, p. 163, wo die Resultate für $n = 2, 3, 4$ bereits angegeben sind.)

III.

Die Theorie der Modulargleichungen findet in derjenigen der *Modularcorrespondenzen* ihre natürliche Fortsetzung. Sind allgemein M_1, M_2, ... die Moduln eines zur ϱ^{ten} Stufe gehörigen vollen Systems, so findet zwischen M_1, M_2, ... einerseits und den transformirten Werthen $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, ... andererseits für jeden zu ϱ relativ primen Transformationsgrad n ein Entsprechen statt, welches nach Grad, Galois'scher Gruppe und Vertauschbarkeit der Argumente mit den eigentlichen Modulargleichungen übereinstimmt *). Hiermit ist aber noch keineswegs gesagt, wie sich im gegebenen Falle dieses Entsprechen analytisch darstellt. Zwischen M_1, M_2, ... nämlich und ebenso zwischen M'_1, M'_2, ... bestehen, allgemein zu reden, höhere algebraische Relationen, und es ist die Beziehung der in Aussicht genommenen Correspondenz zu diesen Relationen von vorne herein durchaus unbekannt. Die hierin liegende principielle Schwierigkeit ist nur erst neuerdings von Herrn Hurwitz durch Heranziehen der zugehörigen überall endlichen Abel'schen Integrale überwunden worden. Herr Hurwitz hat in diesem Sinne in einer im Jahre 1883 publicirten Note **) die Modularcorrespondenzen behandelt, zu denen

$$M_1 = \sqrt{x}\,, \qquad M_2 = \sqrt{x'} \tag{60}$$

Anlass geben, neuerdings, im 25ten Bande der Mathematischen Annalen, die anderen, die sich auf

$$M_1 = \frac{z_1}{z_3}\,, \qquad M_2 = \frac{z_2}{z_3} \tag{61}$$

beziehen, wo z_1, z_2, z_3 speciell für $n = 7$ diejenigen Grössen sind, die ich in meiner vorigen Note für beliebige ungerade Stufe einführte. Auch die zahlentheoretischen auf die elfte Stufe bezüglichen Resultate, welche ich der Gesellschaft der Wissenschaften im vergangenen December vorlegte, sind von Herrn Hurwitz durch das Studium höherer Modularcorrespondenzen gewonnen worden.

---

*) Vergl. wieder Mathem. Annalen XVII, p. 66 ff.
**) Göttinger Nachrichten (p. 350 ff.).

Inzwischen handelt es sich bei den in Rede stehenden Untersuchungen nur um die allgemeine *Form* der die Modularcorrespondenzen definirenden Gleichungen, nicht eigentlich um *wirkliche Aufstellung* derselben. Letztere aber muss um so mehr Interesse haben, als einzelne besonders einfache Resultate in dieser Richtung bereits seit lange bekannt sind*). Ich glaubte also Herrn Fiedler ein richtiges Thema zu stellen, indem ich ihm eine eingehende Bearbeitung der für $\sqrt{x}$, $\sqrt{x'}$ geltenden Modularcorrespondenzen, sowie der weiteren, denen $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[4]{x'}$ genügen, in Vorschlag brachte. Ich werde hier nur von den Resultaten für den letzteren Fall berichten. Die Ueberlegungen, welche Herr Fiedler bei Ableitung derselben anzustellen hatte, bewegen sich übrigens, wenn man von der durch die Abel'schen Integrale veranlassten Complication absieht, in einer ganz ähnlichen Richtung, wie diejenigen von Herrn Friedrich, nur dass statt der simultanen *binären* Substitutionen zweier Reihen von Variabelen simultane *ternäre* Substitutionen in Betracht zu ziehen sind.

Setzen wir zunächst mit Herrn Fiedler:

$$(62) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt[4]{x} : \sqrt[4]{x'} : e^{\frac{i\pi}{8}} .$$

Wir haben dann:

$$(63) \qquad x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 0$$

und damit die Gleichung einer ebenen Curve achter Ordnung vom Geschlechte $p = 21$. Dieselbe geht, wie leicht ersichtlich, bei 384 Collineationen in sich über. Wir wollen die letzteren in homogener Form schreiben, indem wir die absoluten Werthe der Substitutionscoëfficienten in geeigneter Weise fixiren. Beispielsweise sollen drei der Collineationen durch folgende Formeln vorgestellt sein:

$$(64)\begin{cases} \text{a)}\ x'_1 = \varepsilon x_1 , & x'_2 = x_2 , \quad x'_3 = x_3 ; \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{4}}\right); \\ \text{b)}\ x'_1 = x_2 , & x'_2 = x_1 , \quad x'_3 = x_3 ; \\ \text{c)}\ x'_1 = x_2 , & x'_2 = x_3 , \quad x'_3 = x_1 . \end{cases}$$

*) Vergl. Mathem. Annalen Bd. 17, pag. 68—70

Die anderen ergeben sich aus ihnen durch Wiederholung und Combination.

Wir gehen einen Augenblick auf die Abhängigkeit der $x_1 : x_2 : x_3$ von ω zurück. Zuvörderst constatiren wir, dass $x_1 : x_2 : x_3$ bei allen denjenigen und nur denjenigen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

ungeändert bleiben, deren Coëfficienten α, β, γ, δ modulo 16 einer der folgenden Congruenzen genügen:

$$(65)\quad \left.\begin{array}{ll} \alpha \equiv \delta \equiv \left\{\begin{array}{c} \pm 1 \\ \pm 9 \end{array}\right\} & \beta \equiv \gamma \equiv 0\,, \\ \alpha \equiv \delta \equiv \left\{\begin{array}{c} \pm 3 \\ \pm 11 \end{array}\right\} & \beta \equiv \gamma \equiv 8\,, \end{array}\right\} \text{mod. } 16^{*}).$$

Andererseits bemerken wir, dass die Substitutionen a), b), c) (64) beispielsweise bei denjenigen linearen Transformationen von ω entstehen, die in bekannter Weise durch

$$S^2\,,\quad T \quad \text{und} \quad S^{-1}TS^{-2}$$

zu bezeichnen sind.

Es seien jetzt $z_1 : z_2 : z_3$ diejenigen Werthe, welche aus $x_1 : x_2 : x_3$ hervorgehen, wenn wir ω durch $\frac{\omega}{n}$ ersetzen (unter n eine ungerade Zahl verstanden). Wir schreiben ferner:

$$(66)\qquad y_1 : y_2 : y_3 = z_1 : \left(\frac{2}{n}\right) z_2 : e^{(n-1)\frac{i\pi}{8}} \cdot z_3\,,$$

wo $\left(\frac{2}{n}\right)$ das Legendre'sche Zeichen bedeuten soll.

Dann ergibt sich als erstes Resultat folgendes: *dass die zwischen dem Punkte x und dem ebenfalls der Curve achter Ordnung angehörigen Punkte y bestehende Modularcorrespondenz ungeändert bleibt, wenn man die x den Substitutionen* a), b), c) (64), *die y aber simultan den folgenden unterwirft:*

---

*) Hiermit ist genauer präcisirt, was oben über $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[4]{x'}$ als Moduln sechszehnter Stufe gesagt wurde.

$$(67)\begin{cases} a')\ y'_1 = \epsilon^n \cdot y_1\,, & y'_2 = y_2\,, & y'_3 = y_3\,;\\ b')\ y'_1 = y_2\,, & y'_2 = y_1\,, & y'_3 = y_3\,;\\ c')\ y'_1 = y_2\,, & y'_2 = y_3\,, & y'_3 = y_1\,. \end{cases}$$

Des Weiteren hat man in die Betrachtung der überall endlichen zur Curve achter Ordnung gehörigen Integrale einzutreten. Ich will von den bez. Resultaten, die noch nicht vollständig abgeschlossen dastehen, nur dieses einfachste erwähnen: *dass nämlich für $n \equiv 7$ (mod. 8) die Modularcorrespondenz durch eine einzige zwischen x und y bestehende Gleichung ausgedrückt wird:*

$$(68)\qquad f(x_1, x_2, x_3\,;\ y_1, y_2, y_3) = 0\,,$$

indem die Punkte y, welche demselben Punkte x correspondiren, (und umgekehrt die Punkte x, welche demselben y entsprechen) das volle Schnittpunktsystem der Curve achter Ordnung mit einer zutretenden Curve bilden.

Der Grad von $f = 0$ in den x, oder den y, ist natürlich $= \frac{N}{8}$, unter N den Grad der Modulargleichung verstanden. Vertauscht man die x mit den y, so muss die *Gleichung* $f = 0$ ungeändert bleiben; eine nähere Ueberlegung, die auf der Irreducibilität der Modularcorrespondenz basirt, die wir aber hier nicht ausführen können, beweist, dass das Gleiche bereits für die linke Seite der Gleichung, d. h. für die *Form* f selbst gilt. Ausserdem muss f völlig ungeändert bleiben, wenn man die Substitutionen (64), (67) simultan zur Anwendung bringt.

Versucht man nun vorab, alle Formen f zu bilden, welche gegenüber den genannten Processen invariant sind, so kommt man zu einem äusserst einfachen Resultate. *Alle diese Formen nämlich setzen sich aus folgenden drei niedrigsten zusammen:*

$$(69)\qquad \begin{cases} S_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\,,\\ S_2 = x_2x_3y_2y_3 + x_3x_1y_3y_1 + x_1x_2y_1y_2\,,\\ S_3 = x_1x_2x_3y_1y_2y_3\,. \end{cases}$$

Wir werden dieses Resultat am besten verstehen, wenn wir für $x_1 : x_2 : x_3$ die ihnen proportionalen Werthe (62) und entsprechend für $y_1 : y_2 : y_3$ in Uebereinstimmung mit (66) die folgenden Ausdrücke eintragen:

$$(70) \qquad \sqrt[4]{\lambda} : \sqrt[4]{\lambda'} : \mp e^{-\frac{i\pi}{8}} ,$$

wo λ, λ' die transformirten Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$ bezeichnen und das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem $n \equiv 7$ oder $n \equiv 15$ (mod. 16). Wir finden so:

Ist $n \equiv 7$ (mod. 16), so ist die linke Seite der zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa'}$ und $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda'}$ bestehenden Modularcorrespondenz eine ganze Function der drei Ausdrücke:

$$(71) \qquad \begin{cases} S_1 = \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - 1 , \\ S_2 = \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} - \sqrt[4]{\varkappa\lambda} - \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} , \\ S_3 = -\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} ; \end{cases}$$

ist aber $n \equiv 15$ (mod. 16), so gilt das entsprechende Theorem unter Zugrundelegung folgender drei Terme:

$$(72) \qquad \begin{cases} S_1 = \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} + 1 , \\ S_2 = \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} + \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} , \\ S_3 = \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} . \end{cases}$$

Sei noch:

$$(73) \qquad S'_2 = S_1^2 - 4 S_2 .$$

Dann bekommt man beispielsweise im ersten Falle:

$$(74) \qquad \begin{cases} \text{für } n = 7 : S_1 = 0 , \\ \text{-} \quad n = 23 : S_1^3 - 4 S_3 = 0 , \\ \text{-} \quad n = 30 : S_1^5 S'_2 - 4 S_3 (S'^2_2 + 5 S_1^2 S'_2 - 2 S_1^4) \\ \qquad\qquad\qquad - 144 S_1 S_3^2 = 0 , \\ \text{-} \quad n = 55 : S_1^7 S'_2 - 4 S_3 (S'^3_2 + 7 S_1^2 S'^2_2 + 10 S_1^4 S'_2 - 2 S_1^6) \\ \qquad\qquad\qquad - 16 S_1 S_3^2 (6 S'_2 + 19 S_1^2) - 128 S_3^3 = 0 , \\ \text{-} \quad n = 71 : S_1^9 - 4 S_3 (S'^3_2 + 9 S_1^2 S'^2_2 + 21 S_1^4 S'_2 + 12 S_1^6) \\ \qquad\qquad\qquad - 16 S_1 S_3^2 (6 S'_2 + 7 S_1^2) + 1920 S_3^3 = 0 \end{cases}$$

und im zweiten Falle:

$$(75) \qquad \begin{cases} \text{für } n = 15 : S_1 S'_2 + 4 S_3 = 0 , \\ \text{-} \quad n = 31 : S'^2_2 - S_1 S_3 = 0 , \\ \text{-} \quad n = 47 : S'^3_2 - 4 S_1 S_3 (6 S'_2 + S_1^2) + 32 S_3^2 = 0 , \\ \text{-} \quad n = 79 : S'^5_2 - 4 S_1 S_3 (21 S'^3_2 + 28 S_1^2 S'^2_2 + 10 S_1^4 S'_2 + S_1^6) \\ \qquad\qquad\qquad - 16 S_3^2 (24 S'^2_2 + 26 S_1^2 S'_2 + 7 S_1^4) + 512 S_1 S_3^3 = 0 . \end{cases}$$

Bekannt waren von diesen Gleichungen bisher nur diejenigen für $n = 7$ (Gützlaff, Crelle's Journal Bd. XII) und $n = 23$ (Hurwitz, Mathematische Annalen Bd. XVII, p. 69, siehe auch Schröter, Acta Mathematica Bd. V, p. 208), aber auch die anderen Gleichungen sind, wie man sieht, keineswegs complicirt und enthalten nur eine relativ geringe Zahl solcher Coëfficienten, die auf empirischem Wege haben bestimmt werden müssen. Dass in diesen Gleichungen gewisse Terme, $S_1^{\alpha} S_2'^{\beta} S_3^{\gamma}$ nicht vorkommen, die ihrer Dimension nach vorkommen könnten, ist allemal schon aus den Anfangstermen der für S_1, S'_2, S_3 geltenden Reihenentwickelungen zu erkennen.

Herr Fiedler hat auch einige derjenigen Fälle untersucht, in denen n, ohne selbst von der Form $8h + 7$ zu sein, doch einen Primfactor dieser Gestalt in nicht gerader Potenz enthält. Die Analogie mit den für $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ geltenden Modularcorrespondenzen lässt vermuthen und die Untersuchung der Abel'schen Integrale bestätigt es jedenfalls für kleine Transformationszahlen, dass auch in diesem Falle die Modularcorrespondenz zwischen x und y sich durch nur eine Gleichung rein darstellt. Die fundamentalen Invarianten, aus denen sich die linke Seite der betreffenden Gleichung zusammensetzt, gestalten sich dann freilich wesentlich anders. Sei beispielsweise $n = 21$. Wir setzen:

$$(76)\quad \begin{aligned} Z &= 1 - \varkappa\lambda - \varkappa'\lambda' \,, \\ V &= (\sqrt{\varkappa\lambda'} + \sqrt{\varkappa'\lambda})\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} + (\sqrt{\varkappa'} - \sqrt{\lambda'})\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - (\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda})\sqrt[4]{\varkappa\lambda} \end{aligned}$$

und finden zur Darstellung der Modularcorrespondenz:

$$(77)\qquad Z - 2V = 0.$$

Analog kommt für $n = 35$ die Gleichung:

$$(78)\qquad Z_1^3 - 8Z_1Z_2 + 8Z_3 + 4W = 0 \,,$$

wo Z_1, Z_2, Z_3, W folgende Invarianten bedeuten:

$$(79)\quad \begin{cases} Z_1 = 1 - \sqrt{\varkappa\lambda} - \sqrt{\varkappa'\lambda'} \,, \\ Z_2 = \sqrt{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} - \sqrt{\varkappa\lambda} - \sqrt{\varkappa'\lambda'} \,, \quad Z_3 = \sqrt{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} \,, \\ W = (\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda)\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} + (\varkappa' - \lambda')\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - (\varkappa - \lambda)\sqrt[4]{\varkappa\lambda} \end{cases}$$ *).

---

*) Ich benutze die sich darbietende Gelegenheit, um betreffs meiner vorigen Note einige Bemerkungen zuzufügen.

1) Zu p. 88 daselbst. Das Vorzeichen von C bestimmt sich vermöge

der Theorie der Gaussischen Summen, sobald man hinzunimmt, dass $(ST)^3 = T^2$ ist.

2) Zu p. 94. Die Kiepert'sche Reihe lässt sich aus der Reihe für ϑ_1 ableiten, indem man Formel (50) für $n = 3$ betrachtet. Hierdurch folgt dann auch das Verhalten der Y_γ aus dem der X_α. Uebrigens muss die Potenz von i, welche in Formel (84) linker Hand auftritt, durch $\left(\frac{3}{n}\right) \cdot i^{\frac{n-1}{2}}$ ersetzt werden.

3) Formel (89) soll heissen:

$$z_1 z_2 \ldots . z_{\frac{n-1}{2}} = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n} \cdot \Delta_0^{\frac{n-3}{2}} : \Delta^{\frac{n^2-1}{24}},$$

wodurch auch die folgenden auf $n = 5$ bezüglichen Formeln in etwa modificirt werden.

L. Scheeffer *in München, Ueber die Bedeutung der Begriffe »Maximum und Minimum« in der Variationsrechnung.* Vorgelegt von *A. Mayer.*

Zur Lösung der Aufgabe, zwischen zwei festen Puncten mit den Coordinaten $\overset{0}{x}\overset{0}{y}$ und $\overset{1}{x}\overset{1}{y}$ diejenige Curve zu finden, für welche das Integral:

$$J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\,dx$$

ein Minimum (resp. Maximum) wird, entwickelt man die Differenz:

$$F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F(x, y, y')$$

nach Potenzen von Δy und $\Delta y'$. Bezeichnet man dann mit G_r das von $\overset{0}{x}$ bis $\overset{1}{x}$ genommene Integral der Glieder r^{ter} Dimension in jener Entwickelung, sodass

$$\Delta J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y')\,dx - \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\,dx$$
$$= G_1 + G_2 + G_3 + \cdots$$

wird, so wird die Function y durch die Forderung bestimmt, dass die »erste Variation« G_1 für jede beliebige Function Δy, welche an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindet, gleich Null werde.

Man pflegt hierauf die Frage, ob das Integral J für diese bestimmte Curve y wirklich einen Minimalwerth annehme, dahin zu beantworten, dass dieses der Fall sei oder nicht, jenachdem die »zweite Variation« G_2 für alle an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindenden Functionen Δy positiv ist oder auch negativ werden kann. Die Begründung dieses Kriteriums geschieht gewöhnlich folgendermassen. Man setzt $\Delta y = \varkappa\eta$, wo $\varkappa$ eine Constante ist. Dann geht die Entwicklung ΔJ über in die Entwicklung $\varkappa^2\gamma_2 + \varkappa^3\gamma_3 + \cdots$, wo γ_r sich von G_r nur dadurch unterscheidet, dass η und η' an Stelle von Δy und $\Delta y'$ stehen. Bei einer bestimmten Annahme der Function η und fortgesetzter Verkleinerung der Constante $\varkappa$ erhält dann ΔJ schliesslich immer das Vorzeichen von γ_2; ist also γ_2 negativ, so wird auch ΔJ schliesslich negativ, d. h. das Integral

$$\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \varkappa\eta, y' + \varkappa\eta')\,dx\,,$$

betrachtet als Function von $\varkappa$ allein, hat für $\varkappa = 0$ ein Maximum; und ist γ_2 positiv, so wird auch ΔJ schliesslich positiv, d. h. jenes Integral hat für $\varkappa = 0$ ein Minimum. Nennt man die einfach unendliche Mannigfaltigkeit aller derjenigen Curven $y + \Delta y$, welche sich von einander nur durch die Werthe der Constanten $\varkappa$ unterscheiden, eine »η-Schaar«, so kann man sagen, die Curve y macht das Integral J zu einem Minimum oder Maximum »innerhalb der einzelnen η-Schaar«, jenachdem der zu einer solchen Schaar gehörige Werth von γ_2 positiv oder negativ ist. Nun pflegt man weiter so zu überlegen: Ist γ_2 für irgend eine Function η negativ, so tritt schon innerhalb dieser einzelnen η-Schaar für die Curve y kein Minimum, sondern im Gegentheil ein Maximum ein, es kann also um so weniger von einem Minimum unter allen überhaupt möglichen Curven die Rede sein; wird dagegen γ_2 für *alle* Functionen η positiv, so ist für die Curve y ein Minimum innerhalb *jeder* η-Schaar vorhanden, es muss daher, *weil jede beliebige Curve sich einer η-Schaar einreihen lässt*, auch ein Minimum überhaupt stattfinden.

Der letzte Theil dieser Ueberlegung, auf welche man das Kriterium des Minimums zu gründen pflegt, enthält nun einen

Fehlschluss, dessen Aufdeckung es zunächst sehr zweifelhaft macht, ob jenes Kriterium überhaupt richtig ist. Daraus nämlich, dass ein Minimum innerhalb jeder einzelnen η-Schaar stattfindet, folgt noch nicht, dass auch ein Minimum überhaupt eintritt, obschon es unbestreitbar ist, dass jede willkürlich gegebene Curve sich einer gewissen η-Schaar einreihen lässt. Und dieser Schluss ist nicht etwa ein Fehlschluss von der Art, dass man seine Anfechtung als eine Spitzfindigkeit ansehen könnte, die für alle in der Anwendung vorkommenden Fälle ohne Bedeutung wäre; vielmehr führt derselbe bei ganz concreten Problemen direct zu falschen Resultaten. So zum Beispiel könnten wir — um nur eine der verschiedenen Richtungen anzugeben, nach welchen sich der Fehler weiter verfolgen lässt — vermittelst jenes Schlusses auf dem vorher eingeschlagenen Wege offenbar auch folgenden Satz beweisen: »Ein Minimum des Integrales J findet statt, wenn erstens die zweite Variation G_2 niemals negativ wird und zweitens für diejenigen Functionen Δy, für welche jene etwa verschwinden sollte, die nächsthöhere von Null verschiedene Variation von gerader Ordnung und positiv ist«; denn wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so tritt wiederum sicherlich ein Minimum innerhalb jeder einzelnen η-Schaar ein. Nun existiren Beispiele von verhältnissmässig einfacher Beschaffenheit, welche mit dem letzten Satze entschieden im Widerspruche stehen. In einem solchen Beispiele, welches ich gefunden habe, hat das Integral, durch welches die Länge einer Curve auf einer gewissen Fläche zwischen zwei gegebenen Endpunkten ausgedrückt wird, für eine bestimmte Curve y die erste Variation gleich Null, die zweite im Allgemeinen positiv, ausgenommen eine einzige Schaar $\Delta y = x\eta$, für welche gleichzeitig die zweite bis fünfte Variation verschwindet, während die sechste positiv wird. Trotzdem tritt *kein* Minimum ein, vielmehr gibt es auf der Fläche kürzere Verbindungslinien derselben Endpunkte noch in jeder Nähe der betrachteten Curve. Es war ursprünglich meine Absicht, dieses Beispiel hier ausführlich mitzutheilen, zumal dasselbe vermöge seines geometrischen Inhalts wohl geeignet ist, den inneren Grund für die Unzulässigkeit der angestellten Ueberlegung zn Tage treten zu lassen. Inzwischen habe ich gefunden, dass analoge Verhältnisse in der weitaus einfacheren und durchsichtigeren Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima bestehen. Ich möchte aus diesem Grunde

auf die Discussion jenes Fehlschlusses und auch auf die ausführliche Mittheilung meines Beispiels verzichten und in dieser Hinsicht lieber auf eine demnächst zu publicirende Untersuchung über die gewöhnlichen Maxima und Minima verweisen*).

In der vorliegenden Note soll nun aber der Nachweis geführt werden, dass, solange es sich nur um die zweite Variation handelt, das gewöhnliche Kriterium des Minimums unter bestimmten Voraussetzungen doch noch in gewissem Sinne hinreicht. Dieser Nachweis wird freilich auf einem ganz anderen Wege, als dem vorher angedeuteten, erreicht werden. Wir werden nämlich zeigen, dass, wenn die zweite Variation des Integrales

$$\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\,dx$$

für alle Functionen Δy positiv ist, sich im Allgemeinen zwei Grössen g und g' so angeben lassen, dass auch die Differenz

$$\Delta J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y')\,dx - \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\,dx$$

*) Die erste Anregung zu derartigen Ueberlegungen verdanke ich Herrn A. MAYER, der mich gelegentlich auf ein von ERDMANN behandeltes Problem (Zeitschrift f. Mathem. Bd. 22, p. 324) aufmerksam machte. ERDMANN untersucht das Integral, durch welches die Länge einer zwischen zwei Gegenpolen auf einer Kugelfläche sich erstreckenden Curve gegeben ist, und findet, dass bei gewisser Wahl des Coordinatensystems für einen Halbkreis die zweite Variation jenes Integrals zwar verschwinden kann, aber nur, indem gleichzeitig die dritte Variation verschwindet und die vierte positiv wird. Es tritt also hier innerhalb jeder η-Schaar ein wirkliches Minimum ein, während doch in jeder Nähe der betrachteten Curve andere Curven (Halbkreise) zwischen denselben Endpunkten existiren, für welche der Werth des Längenintegrales wenigstens *nicht grösser* ist. Auf ERDMANN's Beispiel construirte ich mir dann das meinige, in welchem bei ganz analogem Verhalten der verschiedenen Variationen sogar Curven mit *geringerem* Werthe des Längenintegrales in jeder Nähe der betrachteten Curve existiren. — Uebrigens zeigt das in der Note auf Seite 97 angegebene, höchst einfache Beispiel, dass unter speciellen Umständen sogar schon die zweite Variation *beständig positiv* sein kann, ohne dass ein Minimum stattfindet. Wir haben hier nur deshalb jene in analytischer Hinsicht weit complicirteren Beispiele in den Vordergrund gestellt, weil dieselben eine geometrische Bedeutung besitzen.

positiv wird für jede Function Δy, welche im Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$ selbst durchweg absolut kleiner als g ist, während ihre Ableitung $\Delta y'$ durchweg absolut kleiner als g' bleibt. Auf diesen Satz ist alsdann die präcise Definition des Begriffes Minimum für die Variationsrechnung zu gründen: »*Ein Minimum ist vorhanden, wenn zwei Grössen g und g' so bestimmbar sind, dass das Integral J durch die Function y einen kleineren Werth erhält als durch alle Functionen $y + \Delta y$, welche den Beschränkungen $|\Delta y| < g$, $|\Delta y'| < g'$ unterliegen; oder wenn — geometrisch zu reden — das Integral J für die Curve y kleiner wird als für alle anderen, welche ganz in einem jene Curve enthaltenden (durch die Grösse g bestimmten) Flächenstreifen liegen und zugleich überall höchstens einen gewissen (durch g' bestimmten) Winkel mit jener Curve bilden.*«

Dieser Begriff des Minimums ist zwar enger als der gewöhnlich angenommene, welcher nur die Beschränkung der Variation Δy durch die Bedingung $|\Delta y| < g$, nicht aber die Beschränkung ihrer Ableitung durch die Bedingung $|\Delta y'| < g'$ verlangt; man darf indessen, wenn man *allein mit den Hülfsmitteln der Variationsrechnung* zu hinreichenden Kriterien des Minimums gelangen will, die zweite (auf $\Delta y'$ bezügliche) Beschränkung nicht fortlassen und überhaupt über die aufgestellte Definition des Minimums nicht hinausgehen. In der That zeigt das von Herrn Weierstrass angegebene Beispiel, welches ich in der meinem Aufsatze »Über die Kriterien des Maximums und Minimums einfacher Integrale« beigefügten Note (Mathem. Annalen Bd. 25) mitgetheilt habe, dass die zweite Variation durchaus positiv sein und doch das Integral für gewisse Nachbarcurven $y + \Delta y$, welche nur der Bedingung $|\Delta y| < g$, nicht aber der Bedingung $|\Delta y'| < g'$ unterliegen, noch kleiner als für die Curve y werden kann.

Auch den Beweis des Satzes, dass ein Minimum *in dem angegebenen Sinne* stattfindet, falls die erste Variation gleich Null und die zweite beständig positiv ist, vermögen wir nur unter gewissen Voraussetzungen zu führen. Es sind genau dieselben Voraussetzungen, an welche man von den Untersuchungen über die Transformation der zweiten Variation in eine zur Discussion ihres Vorzeichens geeignete Form seit Jacobi gewöhnt ist. Diese Voraussetzungen sind für unseren *Beweis* deshalb unentbehrlich, weil derselbe sich von Anfang an auf jene Transformation

stützt; sie zeigen sich aber bei genauerer Prüfung zum Theil auch als wesentlich für den Bestand *des Satzes selbst**). Jedenfalls ist, was wir nachweisen werden, nicht eigentlich, dass ein Minimum stattfindet, sobald die zweite Variation positiv ist, sondern vielmehr, dass ein Minimum stattfindet, sobald gewisse Bedingungen erfüllt sind, die man als *hinreichende Bedingungen für das Positivsein der zweiten Variation* längst kennt.

Die Voraussetzungen, welche wir machen, sind folgende:

---

*) Dies gilt wenigstens von der Voraussetzung $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$. Für den Schluss auf das positive Vorzeichen der zweiten Variation genügt nämlich unter sonst gleichen Umständen die Sicherheit, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ im Allgemeinen positiv und höchstens an einzelnen Stellen gleich Null wird; für den Schluss auf das Minimum im angegebenen Sinne hingegen ist es nothwendig, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ im Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$ auch einen positiven *Minimalwerth* besitzt, da man sonst in manchen Fällen noch bei beliebig kleinen Variationen Δy und $\Delta y'$ bewirken kann, dass das Vorzeichen der *dritten* Variation ausschlaggebend wird. Es sei zum Beispiel $F(x, y, y') = (x-a)^2 y'^2 + (x-a)\, y'^3$, $\left(\overset{0}{x} < a < \overset{1}{x}\right)$, ferner seien die für $x = \overset{0}{x}$ und $x = \overset{1}{x}$ vorgeschriebenen Werthe von y beide gleich c. Durch Nullsetzen der ersten Variation und Anwendung der Grenzbedingungen erhält man dann die Lösung $y = c$, und für diese Lösung wird die zweite Variation gleich $\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} (x-a)^2 \Delta y'^2 dx$, also beständig positiv. Trotzdem findet kein Minimum im angegebenen Sinne statt. Setzt man nämlich Δy von $\overset{0}{x}$ bis $a - \varepsilon$, sowie von $a + \varepsilon$ bis $\overset{1}{x}$, gleich Null, von $a - \varepsilon$ bis a aber gleich $\varkappa(x - a + \varepsilon)$ und von a bis $a + \varepsilon$ gleich $\varkappa(a + \varepsilon - x)$, so wird die zweite Variation gleich $\frac{2}{3}\varkappa^2\varepsilon^3$, die vollständige Differenz $\Delta J =$
$\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y')\, dx - \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\, dx$ hingegen gleich $\frac{2}{3}\varkappa^2\varepsilon^3 - \varkappa^3\varepsilon^2$. Der grösste absolute Werth von Δy ist dann $\varkappa\varepsilon$, derjenige von $\Delta y'$ ist $\varkappa$. Mag man nun die Grenzen g und g' für $|\Delta y|$ und $|\Delta y'|$ noch so klein annehmen, immer sinkt, wenn man zuvörderst den Werth von $\varkappa$ (und damit von $|\Delta y'|$) kleiner als g' macht und sodann festhält, $\varkappa\varepsilon$ (und damit $|\Delta y|$) bei fortgesetzter Verkleinerung von ε schliesslich unter die Grenze g, während die Differenz ΔJ gerade für *kleine* Werthe von ε schliesslich negativ wird.

I. Alle partiellen Ableitungen der Function $F(x, y, y')$ nach y und y' bis zur dritten Ordnung sind im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ einschliesslich der Grenzen endlich und stetig, $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ *ausserdem durchaus positiv*. II. Eine gewisse Determinante $\Delta(x, \overset{0}{x})$ ist für alle Werthe von x zwischen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ und auch noch für $x = \overset{1}{x}$ *von Null verschieden* und nebst ihrer ersten Ableitung endlich und stetig.

Die Determinante $\Delta(x, \overset{0}{x})$ ist folgendermassen zu bilden. Durch Nullsetzen der ersten Variation ergiebt sich für y zunächst eine Function mit zwei willkürlichen Constanten, welche nachher vermittelst der Grenzwerthe, die y für $x = \overset{0}{x}$ und $x = \overset{1}{x}$ annehmen soll, bestimmt werden. Sind u_1 und u_2 die beiden partiellen Ableitungen von y nach jenen Constanten, $\overset{0}{u}_1$ und $\overset{0}{u}_2$ die Werthe von u_1 und u_2 für $x = \overset{0}{x}$, so ist $\Delta(x, \overset{0}{x}) = \overset{0}{u}_1 u_2 - \overset{0}{u}_2 u_1$.

Sind von den gemachten Voraussetzungen die nur auf Endlichkeit und Stetigkeit bezüglichen erfüllt, während irgendwo im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ entweder $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ negativ oder $\Delta(x, \overset{0}{x})$ gleich Null wird, oder beides, so ist die zweite Variation auch des negativen Vorzeichens fähig*) und es findet daher nach den früheren Auseinandersetzungen sicher *kein* Minimum statt, da innerhalb gewisser η-Schaaren sogar ein Maximum vorhanden ist. Wir zeigen jetzt, dass andererseits, wenn *alle* aufgezählten Voraussetzungen erfüllt sind, *sicher* ein Minimum eintritt.

Der Gang des Beweises ist in den Grundzügen folgender. Nach Lagrange ist

$$F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') = F(x, y, y') = g_1 + g_2 + r_3,$$

wo $$g_1 = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \Delta y',$$

$$2 g_2 = \frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y^2} \Delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} \Delta y\, \Delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \Delta y'^2,$$

---

*) Der Beweis ist in § 2 meiner bereits genannten Arbeit (Math. Ann. Bd. 25) gegeben.

$$6r_3 = \frac{\partial^3 F(x, y+\vartheta\Delta y, y'+\vartheta\Delta y')}{\partial y^3}\Delta y^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial y'}\Delta y^2\Delta y'$$
$$+ 3\frac{\partial^3 F}{\partial y\partial y'^2}\Delta y\Delta y'^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y'^3}\Delta y'^3,$$
$$(0 < \vartheta < 1).$$

Es wird daher, weil das Integral $\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} g_1\, dx$ für die in Betracht gezogene Function y identisch verschwindet (vorausgesetzt natürlich, dass Δy an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindet),

$$1)\quad \Delta J = \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y+\Delta y, y'+\Delta y')dx - \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x,y,y')dx = G_2 + R_3,$$

wo zur Abkürzung

$$G_2 = \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} g_2\, dx\,,\qquad R_3 = \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} r_3\, dx$$

gesetzt ist. Wir zeigen nun, dass unter den aufgezählten Voraussetzungen R_3 immer absolut kleiner als G_2 wird, sobald nur die absoluten Werthe von Δy und $\Delta y'$ durchweg unterhalb gewisser Grenzen g und g' liegen; woraus dann unmittelbar folgt, dass bei dieser Beschränkung der Variationen Δy und $\Delta y'$ die Differenz ΔJ immer das (positive) Vorzeichen des ersten Gliedes auf der rechten Seite der Gleichung 1), d. h. der zweiten Variation, hat.

Es werde zunächst G_2 untersucht. Dieses Integral kann nach JACOBI, wenn die gemachten Voraussetzungen sämmtlich erfüllt sind, immer auf die Form

$$2)\qquad G_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, u^2 \left(\frac{d}{dx}\,\frac{\Delta y}{u}\right)^2 dx$$

gebracht werden, wo u eine von $\overset{0}{x}$ bis $\overset{1}{x}$, einschliesslich dieser Grenzen, von Null verschiedene und nebst ihrer ersten Ableitung endliche und stetige Function bedeutet, welche linear aus

den vorher definirten Functionen u_1 und u_2 zusammengesetzt ist*). Führen wir statt $\varDelta y$ eine Function ζ durch die Gleichung

$$\zeta = \frac{\varDelta y}{u} \tag{3}$$

ein, so wird also

$$G_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, u^2 \zeta'^2\, dx\,,$$

*) In § 2 meiner mehrfach genannten Abhandlung (Math. Ann. Bd. 25) habe ich diejenige Transformation der zweiten Variation abgeleitet, in welche die obenstehende Formel 2) für $u = \varDelta(x, \overset{0}{x})$ übergeht. Die Function $\varDelta(x, \overset{0}{x})$ verschwindet indessen zwar nicht zwischen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$, aber für $x = \overset{0}{x}$ selbst, während in der Formel 2) für unsere jetzigen Zwecke eine Function u gebraucht wird, die im Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$ einen von Null verschiedenen *Minimalwerth* besitzt. Zu einer solchen Function u und dem Beweise der Gültigkeit obiger Formel für dieselbe gelangt man nun auf Grund der im genannten Aufsatze gegebenen Entwickelungen leicht folgendermassen. Bedeutet $\overset{0}{\xi}$ einen Werth von x, der ausserhalb des Intervalles $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$ und so nahe bei $\overset{0}{x}$ liegt, dass auch $\varDelta(x, \overset{0}{\xi})$ noch im ganzen Intervalle $\overset{0}{\xi}\overset{1}{x}$ von Null verschieden und nebst der ersten Ableitung endlich ist, so gilt die in jenem Aufsatze ausgeführte Transformation auch dann noch, wenn *überall* $\overset{0}{x}$ durch $\overset{0}{\xi}$ ersetzt wird, es wird also auch

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\overset{0}{\xi}}^{\overset{1}{x}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\varDelta y^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\varDelta y\,\varDelta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\varDelta y'^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{0}{\xi}}^{\overset{1}{x}}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\varDelta(x, \overset{0}{\xi})^2\left(\frac{d}{dx}\,\frac{\varDelta y}{\varDelta(x, \overset{0}{\xi})}\right)^2 dx\,,$$

wo die Function $\varDelta y$ an den Grenzen $\overset{0}{\xi}$ und $\overset{1}{x}$ verschwinden muss. Hieraus ergiebt sich aber, wenn $\varDelta y$ von $\overset{0}{\xi}$ bis $\overset{0}{x}$ gleich Null und von $\overset{0}{x}$ bis $\overset{1}{x}$ ganz willkürlich angenommen und gleichzeitig $\varDelta(x, \overset{0}{\xi})$ mit u bezeichnet wird, unmittelbar die obenstehende Formel 2), in welcher nun u wirklich eine von $\overset{0}{x}$ bis $\overset{1}{x}$ *einschliesslich dieser beiden Grenzen* von Null verschiedene Function von x ist.

und wenn der kleinste Werth des Ausdruckes $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} u^2$ im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$, welcher nach Voraussetzung positiv ist, mit $2a^2$ bezeichnet wird,

$$4)\qquad G_2 > a^2 \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta'^2\, dx\,.$$

Wir untersuchen zweitens das Restglied $R_3 = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} r_3\, dx$, und zwar wollen wir auch in diesem Restgliede statt Δy und $\Delta y'$ resp. die Ausdrücke $u\zeta$ und $u\zeta' + u'\zeta$ substituiren. Es entsteht dadurch zunächst für r_3 ein homogener Ausdruck dritten Grades in ζ und ζ', dessen Coëfficienten aus den dritten Ableitungen der Function F für die Argumente x, $y + \vartheta\Delta y$, $y' + \vartheta\Delta y'$ und aus u und u' zusammengesetzt sind. Den gemachten Voraussetzungen gemäss werden sich dann jedenfalls für die Grössen $|\Delta y|$ und $|\Delta y'|$ vorweg solche obere Grenzen bestimmen lassen, dass alle jene Coëfficienten im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ endlich und, absolut genommen, kleiner als eine angebbare Constante C^2 bleiben, so lange Δy und $\Delta y'$ jene Grenzen nicht überschreiten. Für alle so beschränkten Functionen Δy wird dann offenbar

$$|r_3| < C^2\,(|\zeta| + |\zeta'|)\,(\zeta^2 + \zeta'^2)$$

und demnach

$$|R_3| < C^2\,(Z + Z') \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} (\zeta^2 + \zeta'^2)\, dx\,,$$

wo mit Z und Z' die grössten absoluten Werthe bezeichnet sind, welche die Functionen ζ und ζ' zwischen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ annehmen. Die letzte Ungleichung kann noch umgestaltet werden vermittelst des — nachher zu beweisenden — Satzes, dass das Integral $\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta^2\, dx$ niemals grösser als $\frac{(\overset{1}{x} - \overset{0}{x})^2}{\pi^2} \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta'^2\, dx$ ist, wie man

auch die an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindende Function ζ im Uebrigen annehmen mag. Es ergiebt sich auf diese Weise, wenn noch für $C^2\left(1+\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\right)$ eine neue Constante c^2 gesetzt wird, schliesslich die Relation

$$5)\qquad |R_3| < c^2(Z+Z')\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta'^2 dx\,.$$

Combinirt man die Formeln 4) und 5) mit einander, so erkennt man ohne Weiteres, dass für die Grösse $Z+Z'$ und daher auch für Z und Z', d. h. für die absoluten Werthe von ζ und ζ', obere Grenzen h und h' angebbar sind mit der Eigenschaft, dass in der Formel 1) die rechte Seite *sicher* das (positive) Vorzeichen ihres ersten Gliedes G_2 hat, sobald im ganzen Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$ zugleich $|\zeta| < h$ und $|\zeta'| < h'$ ist.

Auf Grund der Gleichungen $\zeta = \frac{\Delta y}{u}$, $\zeta' = -\frac{u'}{u^2}\Delta y + \frac{\Delta y'}{u}$ wird man nun endlich noch für $|\Delta y|$ und $|\Delta y'|$ solche obere Grenzen g und g' aufstellen können, dass unter der Bedingung $|\Delta y| < g$ und $|\Delta y'| < g'$ immer auch $|\zeta| < h$ und $|\zeta'| < h'$ wird. Ist nämlich U der (nach Voraussetzung von Null verschiedene) kleinste absolute Werth von u, U' der (nach Voraussetzung endliche) grösste absolute Werth von u' im Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$, so ist zunächst $|\zeta| \leqq \frac{|\Delta y|}{U}$, $|\zeta'| \leqq \frac{U'}{U^2}|\Delta y| + \frac{|\Delta y'|}{U}$. Man braucht daher nur, was immer möglich ist, vorerst die Constante g so zu wählen, dass sowohl $\frac{g}{U} < h$, als auch $\frac{U'}{U^2}g < h'$ wird und darauf die Constante g' so zu bestimmen, dass $\frac{g'}{U} < h' - \frac{U'}{U^2}g$ wird*).

*) Wir bemerken, dass die Constanten g und g' desto kleiner werden, je kleiner der mit U bezeichnete Minimalwerth von $|u|$ wird, d. h. wenn wir uns die obere Integralgrenze $\overset{1}{x}$ auf der Curve y verschoben denken und dabei die in einer früheren Anmerkung gegebene Bestimmung der Function u im Auge behalten, je näher $\overset{1}{x}$ an diejenige Stelle rückt, wo die Determinante $\Delta(x, \overset{0}{x})$ zum ersten Male den Werth Null annimmt. Hieraus erklärt sich die anderweitig bewiesene Thatsache, dass beim Ueberschreiten jener Stelle das Minimum des Integrals J überhaupt aufhört.

Es ist noch der Beweis des Satzes nachzuholen, dass das Integral $\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta^2 dx$, falls die Function ζ an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindet, niemals grösser als $\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta'^2 dx$ sein kann. Es gibt nämlich unter allen denjenigen Functionen ζ, für welche das Integral $\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta'^2 dx$ einen vorgeschriebenen Werth A annimmt, eine, welche das Integral $\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta^2 dx$ zu einem Maximum macht. Man findet dieselbe nach den bekannten Regeln der Variationsrechnung gleich $A\frac{\sqrt{2(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})}}{\pi}\sin\left(\frac{x-\overset{0}{x}}{\overset{1}{x}-\overset{0}{x}}\pi\right)$ und kann vermittelst der JACOBI'schen Transformation der *zweiten* Variation, auf welche sich in diesem Falle die *Gesammtvariation* des Integrales reducirt, zeigen, dass der jener Function entsprechende Werth von $\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta^2 dx$, nämlich $A\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}$, wirklich der grösstmögliche ist. Die JACOBI'sche Transformation beruht auf folgender Formel, in welcher man eine von der Theorie der Variation ganz unabhängige, für beliebige Functionen ζ und ω gültige Identität erkennen wird:

$$\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int \zeta'^2 dx - \int \zeta^2 dx = \frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\left(\zeta' - \omega'\frac{\zeta}{\omega}\right)^2 dx$$

$$-\int\left(\omega + \frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\omega''\right)\zeta\frac{\zeta}{\omega}\,dx + \frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\zeta\omega'\frac{\zeta}{\omega}\,.$$

Setzt man hier $\omega = \sin\left(\frac{x-\overset{0}{x}}{\overset{1}{x}-\overset{0}{x}}\pi\right)$ und geht gleichzeitig von den unbestimmten zu den bestimmten Integralen über (wobei

zu berücksichtigen ist, dass der Quotient $\frac{\zeta}{\omega}$ auch an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ endlich bleibt, da ζ daselbst verschwindet und ζ' endlich ist), so erhält man die Jacobi'sche Transformation

$$\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta'^2\,dx-\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta^2\,dx=\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\left(\zeta'-\omega'\frac{\zeta}{\omega}\right)^2 dx\,.$$

Die rechte Seite ist niemals negativ, folglich kann auch die linke es nicht sein, das heisst das Integral $\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta^2 dx$ ist bei jeder beliebigen Wahl der Function ζ, vorausgesetzt, dass dieselbe an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindet und eine endliche Ableitung besitzt, höchstens gleich $\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta'^2 dx$. W. z. b. w.

Wir formuliren zum Schluss das Hauptresultat unserer Untersuchung in folgendem Satze:

Es sei für eine bestimmte Function y die erste Variation des Integrales $J=\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}F(x,y,y')\,dx$ (in welchem die Grenzwerthe von y für $x=\overset{0}{x}$ und $x=\overset{1}{x}$ als gegeben anzusehen sind) identisch gleich Null; es seien ferner im Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$ die partiellen Ableitungen von $F(x,y,y')$ bis zur dritten Ordnung, sowie die Determinante $\Delta(x,\overset{0}{x})$ nebst ihrem Differentialquotienten endlich und stetig. Hat dann $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ im Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$ einen positiven Minimalwerth, und verschwindet die Determinante $\Delta(x,\overset{0}{x})$ weder zwischen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ noch an der Stelle $x=\overset{1}{x}$ selbst, so ist nicht nur die zweite Variation beständig positiv, sondern es findet auch ein Minimum des Integrales J statt, in dem Sinne, dass die Differenz

$$\Delta J = \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y')\, dx - \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\, dx$$

positiv wird für jede Function Δy, deren absoluter Betrag überall unterhalb einer gewissen Grenze g bleibt, während der absolute Betrag der Ableitung $\Delta y'$ sich durchweg unter einer zweiten Grenze g' hält. Ist dagegen entweder $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ irgendwo im Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$ negativ, oder verschwindet $\Delta\left(x, \overset{0}{x}\right)$ irgendwo im Inneren desselben Intervalles, so ist die zweite Variation auch des negativen Vorzeichens fähig, und es tritt schon aus diesem Grunde kein Minimum des Integrales J im angegebenen Sinne ein.

Der zweite Theil des vorstehenden Satzes ist in dieser Note nicht bewiesen, sondern aus meinem Aufsatze Math. Ann. Bd. 25 übernommen und nur der Vollständigkeit wegen hinzugefügt. Der erste Theil hingegen bildet eine wesentliche Ergänzung zu den in jenem Aufsatze angestellten Untersuchungen. Erst durch ihn wird der a. a. O. immer ohne Weiteres gezogene Schluss von dem Vorzeichen der zweiten Variation auf das Stattfinden eines Minimums resp. Maximums begründet und inhaltlich präcisirt.

Von einer Ausdehnung des Satzes auf den allgemeinen, in § 3 der genannten Arbeit behandelten Fall sehe ich an dieser Stelle ab.

Curt Reinhardt, *Zu Möbius' Polyedertheorie.* Vorgelegt von Prof. Dr. *Klein.*

1. Als die Pariser Akademie für die Bewerbung um den grossen Preis auf das Jahr 1861 das Thema stellte »Perfectionner en quelque point important la théorie géométrique des polyèdres«, befand sich auch Möbius unter den concurrirenden Mathematikern. Das deutsche Original seiner Preisarbeit, deren Inhalt er später auf die zwei gesonderten Abhandlungen »Theorie der elementaren Verwandtschaft« und »Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders«*) vertheilte, ist jetzt wieder unter seinen nachgelassenen Manuscripten aufgefunden worden. Während Möbius, wie sich aus den mir von Herrn Professor F. Klein gütigst zur Einsicht überlassenen Manuscripten ergiebt, anfangs geneigt schien, eine Aufzählung aller möglichen Polyeder von n Ecken zu versuchen, liess er, wohl in der Erkenntniss der ungeheuren Schwierigkeiten dieses Problems, bald davon ab und wendete sich allgemeinen Untersuchungen über den Inhalt der Polyeder und den Zusammenhang ihrer Oberfläche zu. Hierbei war es, wo er am Ende des Jahres 1858 die Existenz von Polyedern erkannte, »bei welchen man, auf der Oberfläche fortgehend, ohne auf diesem Wege irgend einmal die Fläche, auf welcher man geht, zu durchbrechen, auf die entgegengesetzte Seite der Fläche, von welcher man ausging, gelangen kann«. Zur Erläuterung der Eigenthümlichkeit der Structur solcher Polyeder, die Möbius als *einseitige Polyeder* bezeichnete, bedient er sich eines aus Dreiecken zusammengesetzten Dekaëders**);

*) Diese Berichte 15. Band 1863 und 17. Band 1865.
**) Diese Berichte 17. Band pag. 38 und 39.

er erwähnt ausserdem in § 34 der Preisschrift das zu jenem Dekaëder polare einseitige Hexaëder und giebt endlich (ebenda § 11) ein Beispiel eines gleichfalls einseitigen Trigonalpolyeders, welches ausser einseitigen auch noch eine zweiseitige Zone *) aufweist. Auch seine Theorie der *ringförmigen Polyeder* erläutert Möbius in den §§ 61 und 62 seiner Preisschrift durch einige Beispiele, und zwar ausser an dem Poinsot'schen sterneckigen Zwölfflach an zwei interessanten Polyedern der 2. Classe.

In allen diesen Fällen ist es unmöglich, die Gestaltung dieser Körper sofort anschaulich zu erfassen. Möbius drückt die betreffenden Polyeder allein durch die Angabe ihrer Flächen aus, welche ihrerseits wieder durch die Angabe der in ihnen enthaltenen Ecken bestimmt werden. Er überlässt es dem Leser selbst, sich ein Bild von der Configuration der Ecken, Flächen und Kanten eines jeden Polyeders zu machen. Dies ist aber gerade das Schwierigste, insbesondere dann, wenn die Flächen sich gegenseitig durchdringen, und unerlässlich, wenn man die Modelle solcher Polyeder construiren will. Vermuthlich ist auch die Schwierigkeit der Modellirung ganz besonders der einseitigen Polyeder der Grund gewesen, warum man bis jetzt so wenig mit diesen interessanten Gebilden sich beschäftigt hat. Auch sind die von Möbius angegebenen Beispiele nicht gerade derart einfach, dass sich an ihnen besonders leicht die Eigenthümlichkeit der Einseitigkeit erkennen liesse.

Es sei mir daher gestattet, zunächst zwei von mir gefundene, sehr einfache einseitige Polyeder zu beschreiben, aus denen sich das von Möbius construirte Dekaëder bez. das hierzu polare Hexaëder unschwer durch eine Deformation herstellen lässt. Ferner werde ich des sonst wenig Interesse bietenden einseitigen Polyeders mit einer zweiseitigen Zone gedenken und dann neue Beispiele von einseitigen Polyedern höherer Art anführen, endlich die beiden ringförmigen Polyeder einer Betrachtung unterwerfen, durch welche Möbius seine Theorie dieser Classe von Körpern erläuterte.

2. Bekanntlich besitzt das reguläre Oktaëder drei Diagonalebenen, von denen jede vier ein Quadrat bildende Kanten des Körpers enthält. Fügt man nun denjenigen vier dreieckigen

*) Bezüglich des Zonenbegriffs bei Trigonalpolyedern vergl. diese Berichte 17. Band pag. 88.

Flächen des Oktaëders, durch deren Erweiterung sich die eine oder die andere hemiëdrische Form desselben ergeben würde, z. B. den Flächen

(1) ABE, BCF, CDE, DAF

jene drei Diagonalquadrate

(2) $ABCD, EBFD, AFCE$

hinzu, die den Mittelpunkt M des Oktaëders gemein haben und zu zweien in den Oktaëderdiagonalen AC, BD, EF sich schneiden, so bilden diese 7 Flächen (1) und (2) ein Polyeder Π_1.

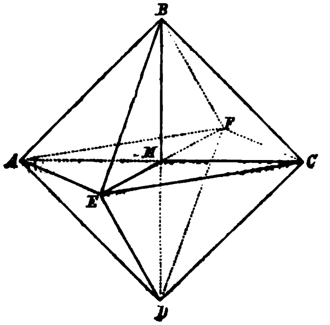


Fig. 1.

Jede der 6 congruenten, vierseitigen Ecken des Körpers wird abwechselnd von dreiseitigen und vierseitigen Flächen gebildet, z. B. die Ecke B von den Flächen ABE, $EBFD$, BCF, $ABCD$. Die drei Geraden AC, BD, EF sind als Schnittlinien nicht benachbarter, d. h. in keiner Kante aneinander grenzender Flächen nicht als Kanten zu rechnen, so dass Π_1 dieselben 12 Kanten besitzt, wie das ursprüngliche Oktaëder. An die Stelle der EULER'schen Gleichung tritt daher, wenn man, wie gewöhnlich, unter e, f, k die Zahlen der Ecken, Flächen und Kanten versteht, hier die Relation

$$e + f = k + 1 .$$

Dieses Polyeder Π_1, das man sich auch aus den vier (nicht regulären) Tetraëdern $ABEM$, $BCFM$, $CDEM$, $DAFM$ zusammengesetzt denken kann, gehört nun zu den einseitigen Polyedern: man kann, von einer beliebigen Fläche ausgehend und von einer Fläche zur benachbarten nur über die gemeinsame Kante fortschreitend, in umgekehrter Stellung zu dem Ausgangspunkte zurückkehren. Denkt man sich z. B. auf der Fläche ABE ausserhalb des Tetraëders $ABEM$ stehend, so schreite man über die Kante BE nach der Fläche $EBFD$ fort. Dann wird man sich, nachdem man die Doppelgerade EM gekreuzt hat, auf derselben Fläche, aber im Inneren des Tetraëders $CDEM$ befinden, über ED nach CDE, weiter über CD nach $ABCD$ und, auf dieser Fläche fortgehend und entweder AM

oder BM überschreitend, in das Innere des Tetraëders $ABEM$ gelangen können. Tritt man dann endlich aus dem Quadranten ABM der Fläche $ABCD$ über die Kante AB wieder auf die Fläche ABE über, so ist man zum Ausgangspunkte mit umgekehrter Stellung zurückgekommen.

Grössere Klarheit, als durch die Figur, wird durch ein Modell von Π_4 erreicht. Man kann ein solches dadurch ohne Schwierigkeit herstellen, dass man z. B. an die vier Seiten der quadratischen Fläche $ABCD$ die Netze der vier Tetraëder $ABEM$, $BCFM$, $CDEM$, $DAFM$ anheftet und diese abwechselnd auf verschiedene Seiten von $ABCD$ aufsetzt.

Von besonderem Interesse erscheint mir folgende Bemerkung, die ich Herrn Professor Klein verdanke. Denkt man sich nämlich die vier Tetraëder, aus denen Π_4 besteht, aufgebläht, ohne deren Zusammenhang in den Doppelgeraden AC, BD, EF zu lösen, so ergiebt sich hieraus eine Fläche von derselben Gestaltung, wie sie das bekannte Kummer'sche Modell der Steiner'schen Fläche besitzt, das von Herrn Klein in seinen Vorlesungen als einfaches Beispiel einer einseitigen, ganz im Endlichen enthaltenen algebraischen Fläche angeführt zu werden pflegt*). Den vier Ebenen von Π_4, welche je drei Kanten des Polyeders, aber keine seiner Flächen enthalten, nämlich den Ebenen

(3) $$ABF,\ BCE,\ CDF,\ DAE\ ,$$

entsprechen die vier Ebenen, welche die Steiner'sche Fläche in Kreisen berühren.

Betrachtet man dagegen diese vier Dreiecke (3) als Polyederflächen und fügt ihnen die drei Vierecke (2) hinzu, so entsteht ein Polyeder, welches dem Π_4 congruent ist.

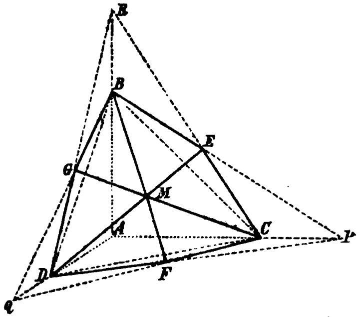


Fig. 2.

3. Das zu Π_4 polare Polyeder Π_4' kann aus dem Würfel construirt werden, wie das erstere aus der Polarfigur des Würfels, dem Oktaëder, entstanden gedacht wurde**). Es seien AB, AC, AD die drei von

*) Vergl. Klein in Bd. VII der Math. Ann., p. 549—557, sowie die weitergehenden Entwickelungen in Bd. IX ebenda, p. 476—482.

**) Zur Construction der Figur 2 ist, um gewisse Punkte nicht in die

einem Eckpunkte A des Würfels ausgehenden Kanten desselben und

(1) $ABEC, ABGD, ACFD$

die in A sich treffenden Würfelflächen, welche von dem nicht ebenen Sechseck $BECFDG$ begrenzt werden. Zieht man nun die drei die gegenüberliegenden Ecken dieses Sechsecks verbindenden Würfeldiagonalen BF, CG, DE, welche sich in einem Punkte M schneiden, so liegen je zwei derselben in einer Ebene und bilden mit den ihre Endpunkte verbindenden Seiten jenes Sechsecks drei sog. überschlagene Vierecke

(2) $BEDF, ECGD, CFBG.$

Die 6 Vierecke (1) und (2) können nun als die Flächen eines Polyeders Π_1' angesehen werden, denn jene Polygone (1) und (2) erfüllen die Bedingung, dass jede Seite eines jeden derselben eine Seite eines und nur eines der anderen ist. Von den 7 Ecken von Π_1' sind A, B, C, D dreiseitig, G, E, F vierseitig, welche abwechselnd die Eckpunkte einer jeden Fläche bilden. Der gemeinsame Punkt M der drei Kanten BF, CG, DE ist ebenso wenig als Eckpunkt von Π_1' zu rechnen, wie man ihn als Eckpunkt irgend eines der drei Vierecke (2) betrachten kann. Es gilt daher, da Π_1' 12 Kanten besitzt, wie für Π_1, so auch für das polare Polyeder Π_1' die Relation

$$e + f = k + 1 .$$

Nimmt man zu dem Punkte M noch die drei Punkte hinzu, in welchen sich je drei der übrigen Kanten schneiden, nämlich die Punkte

$$P = BE \cdot AC \cdot DF$$
$$Q = CF \cdot AD \cdot BG$$
$$R = AB \cdot DG \cdot CE$$

so sind dieselben polar zugeordnet den vier Ebenen von Π_1, welche, ohne Flächen dieses Polyeders zu sein, doch je drei ein Dreieck bildende Kanten desselben enthalten. In Verbin-

Unendlichkeit fallen zu lassen, nicht das reguläre Hexaëder, sondern ein ihm collinear verwandter Sechsflächner verwendet worden, während im Text der Einfachheit des Ausdrucks wegen die Entstehung aus dem Würfel beibehalten ist. Ebenso gut hätte im Vorigen Π_1 aus jeder collinearen Abbildung des regulären Oktaëders construirt werden können.

dung mit den Punkten B, C, D bilden die Punkte M, P, Q, R ein Polyeder, dessen 12 Kanten und 6 Flächen

$$MDRC,\ MBPD,\ MCQR$$
$$BQDR,\ BRCP,\ CPDQ$$

mit den Kanten und Flächen von Π_1' in denselben Geraden bez. in denselben Ebenen liegen und dessen Oberfläche denselben Zusammenhang besitzt, wie die von Π_1'.

Die Behauptung, dass das Polyeder Π_1' ebenso wie Π_1 *einseitig* sei, bedarf einer etwas ausführlicheren Begründung. Würde man M als Spitze einer sechsseitigen Ecke auffassen, welche von den 6 Dreiecken MBE, MEC, MCF, MFD, MDG, MGB begrenzt wird, so würde der auf diese Weise aus Π_1' entstandene Neunflächner den Raum alsdann in zwei gesonderte Theile zerlegen, in den vollständig begrenzten inneren Raum J und den unbegrenzten äusseren Raum O. Befindet man sich nun auf der Fläche $BEDF$ von Π_1' und zwar in O auf der dreieckigen Zelle MBE, so muss es möglich sein, von dieser Stelle aus nur in $BEDF$ fortgehend über die Kante DF auf die benachbarte Fläche $DFCA$ zu gelangen. Hierbei ist man jedoch genöthigt, den Knotenpunkt M zu durchschreiten, in welchem es scheinbar unbestimmt wird, ob man sich weiterhin auf die äussere (d. h. dem Raumtheil O zugewendete) oder innere Seite der Zelle MDF zu begeben hat. Die beiden Zellen MBE und MDF haben nun entgegengesetzt gleiche Coëfficienten*); giebt man einer Seite der ersteren, etwa der äusseren, den Coëfficienten $+1$, so kommt der zu derselben Seite der Viereckseben gehörigen Seite der Zelle DFM, also der äusseren Seite derselben, der Coëfficient -1, der inneren dagegen der Coëfficient $+1$ zu. Das heisst nichts anderes, als dass mit der äusseren (inneren) Seite der Zelle MBE die innere (äussere) Seite der Zelle MDF in Zusammenhang steht**). Befindet man sich also auf irgend

---

*) Möbius, Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders § 11.

**) Deutlicher und anschaulicher tritt dies hervor, wenn man sich eine vierseitige Pyramide vorstellt, deren Grundfläche ein überschlagenes Viereck bildet. Hält man an der für Polyeder mit gewöhnlichen Flächen immer erfüllten Forderung fest, dass man stets auf dieselbe Seite einer Polyederfläche gelangen muss, an welcher Stelle der Kante man auch von der angrenzenden Fläche in die erstere übertritt, so muss man die äussere Seite der einen Zelle der Grundfläche jener Pyramide als zur

einer Seite einer der beiden Zellen, so hat man, sobald man durch den Knotenpunkt M in die andere Zelle übertritt, zugleich die Seite der Vierecksebene zu wechseln *).

Man gelangt deshalb, auf der äusseren Seite von $ACFD$ in dem Raumtheil O stehend, über die Kante AC auf die äussere Seite von $ABEC$, von da über die Kante BE auf die äussere Seite der Zelle MBE, durch den Knotenpunkt M auf die innere Seite der Zelle MDF in den Raumtheil J und über die Kante DF auf die Ausgangsfläche $ACFD$ zurück, jedoch auf die *innere* Seite derselben.

Für diese Richtungsänderung beim Übertritt aus einer Zelle einer Polyederfläche in eine andere lässt sich folgende allgemeine Regel aufstellen:

Wandert man von irgend einer Stelle der Oberfläche eines Polyeders aus, dessen Flächen alle oder zum Theil aussergewöhnliche Polygone sind, mit der in irgend welcher Richtung genommenen Flächennormale weiter, so hat man, um auf derselben Oberflächenseite zu bleiben, dann und nur dann die Richtung der Flächennormale in die entgegengesetzte umzukehren, wenn man in eine Zelle übertritt, deren Coëfficient das entgegengesetzte Vorzeichen von demjenigen der Zelle besitzt, aus welcher man kommt.

4. Gehen wir jetzt zu den von Möbius selbst angegebenen einseitigen Polyedern über, deren Construction sich, wie schon erwähnt, aus derjenigen der Polyeder Π_1 und Π_1' ohne Schwierigkeit ableiten lässt. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Möbius'schen Dekaëder, das mit Π_2 bezeichnet werden mag. Dasselbe entsteht aus Π_1, wenn man (Fig. 4) die Doppelgeraden AC, BD, EF des letzteren als Kanten betrachtet, und zwar

inneren Seite der andern Zelle gehörig betrachten. Denn man kann bei jener vierseitigen Pyramide von einer und derselben Seite jeder der Dreiecksflächen aus auf *die* Seiten der Zellen der Grundfläche gelangen, welche verschiedenen Seiten der Ebene derselben angehören.

*) Man kann sich dies auch in der Art veranschaulichen, dass man sich zuerst ein gewöhnliches Viereck durch Ausspannen einer elastischen Membran zwischen den vorgegebenen starr zu denkenden Kanten realisirt, dann aber eine der Kanten (die unter Beibehaltung ihrer Länge sämmtlich frei um ihre Endpunkte beweglich sein sollen) *umklappt*, während die gegenüberstehende Kante unveränderlich bleibt: man wird dann ein überschlagenes Viereck erhalten, welches einen Theil der oberen Seite der ursprünglichen Membran, daneben aber auch einen Theil der unteren Seite dem Auge des Beschauers zukehrt. (F. Klein.)

z. B. so, dass in

$$\left.\begin{array}{llll} AC & \text{die Dreiecke} & ACE & \text{und } ACF, \\ BD & - \quad - & BDA & - \ BDC, \\ EF & - \quad - & EFB & - \ EFD \end{array}\right\} \quad (1)$$

aneinander grenzen. Fügt man hierzu die vier dreieckigen Flächen von Π_1

$$ABE, BCF, CDE, DAF, \quad (2)$$

so sind (1) und (2) die 10 Flächen von Π_2, während jede der 6 Ecken von Π_1 nunmehr fünfseitig geworden ist. Zu den 12 Kanten von Π_1 sind jetzt jene drei Doppelgeraden desselben als Kanten hinzugetreten, so dass Π_2 15 Kanten besitzt. Es gilt daher auch für Π_2 die Relation

$$e + f = k + 1 .$$

Aus den Dreiecken von Π_2 kann man nun nach einem gewissen Gesetz diejenigen periodischen Reihen ableiten, aus welchen Möbius ursprünglich dieses Polyeder construirte*). Bildet man nämlich nach seiner Vorschrift aus den die Ecken dieses Trigonalpolyeders bezeichnenden Buchstaben eine Reihe dergestalt, dass je drei nächstfolgende Buchstaben der Reihe ein Dreieck des Polyeders ausdrücken, und dass von diesen Dreiecken je zwei nächstfolgende absolut von einander verschieden sind, so erhält man 6 periodische Reihen von je 5 Gliedern, deren Periodicität, wie es in der Substitutionentheorie gebräuchlich, durch Klammern angedeutet werden soll. Zum Unterschied von gewissen andern in der Polyedertheorie auftretenden periodischen Reihen, deren Glieder nicht die Ecken von Polyedern sind, sollen diese hier anzugebenden Reihen *Eckenperioden* genannt und mit E bezeichnet werden. Nach obiger Regel ergeben sich aus den Flächen (1) und (2) für Π_2 die Eckenperioden:

$$\begin{array}{ll} E_1 = (ABEFD), & E_4 = (AFDEC), \\ E_2 = (BCFAD), & E_5 = (AEBFC), \\ E_3 = (ECDBA), & E_6 = (EFBCD). \end{array}$$

Die 5 Dreiecke einer jeden Eckenperiode bilden eine einseitige Zone*). In jeder derselben ist nur die halbe Anzahl aller Flächen des Polyeders Π_2 enthalten, und zwar fehlen in jeder

*) Möbius, Inhalt eines Polyeders etc. § 8.

alle die Dreiecke, welche die in der entsprechenden Eckenperiode fehlende Ecke gemeinschaftlich haben.

Nimmt man daran Anstoss, dass in dem bis jetzt betrachteten Polyeder Π_2 drei der Flächenwinkel 180^0 sind, so braucht man nur eine solche Deformation von Π_1 vorzunehmen, dass keine vier Eckpunkte in einer Ebene liegen, z. B. auf folgende Art: Man verbinde die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Oktaëderflächen und drehe, indem man sich die Kanten und Flächen von Π_1 dehnbar denkt und diese Verbindungsgerade zur Axe nimmt, die eine von beiden Flächen gegen die andere um einen Winkel, der kleiner als 60^0 ist. Dann werden sich die drei Diagonalflächen von Π_1 in den jetzt als Kanten geltenden Doppelgeraden AC, BD, EF brechen, die daraus entstehenden 6 Dreiecke (1) werden sich durchdringen und es wird so das eigentliche einseitige Dekaëder Π_2 entstehen.

Die 15 Kanten von Π_2 bilden ausser den Flächen dieses Polyeders noch die 10 Dreiecke

$$(3) \qquad ABF,\ BCE,\ CDF,\ DAE,$$

$$(4) \qquad \begin{cases} ACB,\ BDE,\ EFA, \\ ACD,\ BDF,\ EFC, \end{cases}$$

welche für sich genommen selbst wieder ein einseitiges Dekaëder P_2 von demselben Zusammenhang, wie Π_2, bestimmen. Die 6 fünfgliedrigen Zonen von P_2 sind ausgedrückt durch die Eckenperioden

$$\begin{aligned} E_1' &= (AEDBF), & E_4' &= (ABFDC), \\ E_2' &= (FCDAE), & E_5' &= (AFECB), \\ E_3' &= (EBCAD), & E_6' &= (BDFCE). \end{aligned}$$

Diese beiden Polyeder Π_2 und P_2 sind aber nicht die einzigen, welche sich aus dem System der 20 Dreiecke (1), (2), (3), (4) construiren lassen. Von jedem Eckpunkt des Polyeders Π_2 gehen nämlich 5 Kanten aus. Da nun 5 Gerade eines Strahlenbündels, von denen nicht drei in einer Ebene liegen, 12 fünfseitige Ecken bestimmen, so kann man aus jenen 15 Kanten und 20 Dreiecken 6.12 fünfseitige Ecken construiren, die sich zu 12 einseitigen Polyedern von gleichem Zusammenhang verbinden lassen. Diese 12 Polyeder sind paarweise einander in derselben Weise zugeordnet, wie die im Vorhergehenden beschriebenen Polyeder Π_2 und P_2.

5. Das Hexaeder Π_2', welches die Polarfigur des im Vor-

hergehenden beschriebenen Dekaëders Π_2 ist, lässt sich ebenso aus dem Hexaëder Π_1' ableiten, wie Π_2 aus Π_1 hervorging. Zu dem Zwecke ist es nur nöthig, die drei vierseitigen Ecken B, C, D von Π_1' in je zwei dreiseitige zu zerlegen. Jene entstehen aber dadurch, dass man den drei in M sich schneidenden Ebenen von Π_1' auf den Geraden AB, AC, AD, in denen sich die drei andern Ebenen desselben Polyeders schneiden und die kurz als Axen bezeichnet werden mögen, die Abschnitte a, b, c bez. a, d, e und f, b, e beilegt. [In Fig. 2 ist ausserdem, aber nicht nothwendigerweise $a = b = e$ und $c = d = f$ gemacht worden.] Es können also vierseitige Ecken nicht mehr auftreten dann, wenn man die durch M gehenden Ebenen eine solche Lage einnehmen lässt, dass keine zwei derselben einen Punkt der Axen gemein haben, beispielsweise, wenn man, wie in Fig. 3, um die Symmetrie des Körpers möglichst zu erhalten, diese drei Ebenen durch die Axenabschnitte a, b, c bez. b, c, a und c, a, b bestimmt. Es ergeben sich dann $\binom{6}{3} = 20$ Punkte, in denen je drei der 6 Ebenen des Polyeders sich schneiden, und $\binom{6}{2} = 15$ Gerade, von denen eine jede zweien der 6 Ebenen gemeinsam ist. In jeder derselben liegen 10 der 20 Punkte, die sich zu je 4 auf 5 Geraden gruppiren, den Schnittlinien dieser Ebene mit den 5 anderen Polyederflächen. Da nun irgend 5 Gerade einer Ebene, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen, 12 Fünfecke bestimmen, so kann man aus jenen 20 Punkten 6.12 Fünfecke construiren, die sich zu 12 gleichartigen Polyedern mit je 6 fünfeckigen Flächen und 10 dreiseitigen Ecken verbinden lassen. Die Kanten eines jeden dieser 12 Hexaëder werden von den 15 Geraden gebildet, in welchen die

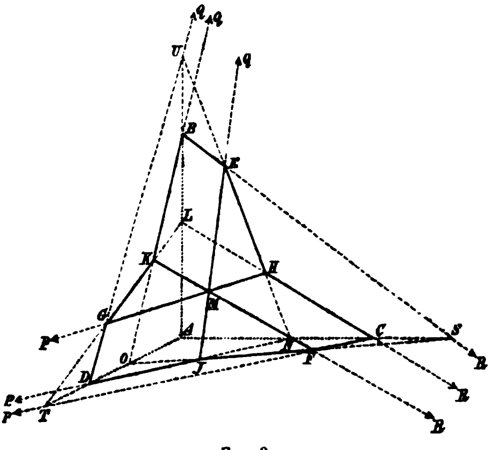


Fig. 3.

6 Ebenen sich schneiden. Fig. 3 zeigt eines dieser Hexaëder mit den 6 Flächen

$$\alpha = ADGKB,\ \beta = ABEHC,\ \gamma = ACFJD,$$
$$\delta = JEBKF,\ \varepsilon = GKFCH,\ \zeta = EHGDJ.$$

Die Einseitigkeit seiner Oberfläche nachzuweisen, glaube ich nach den in Art. 3 bezüglich des Polyeders Π_2 angestellten Erörterungen unterlassen zu dürfen.

Wie nun Möbius aus den die Ecken eines Trigonalpolyeders bezeichnenden Buchstaben periodische Reihen bildete, so kann man auch aus den Bezeichnungen der Flächen eines Polyeders mit nur dreiseitigen Ecken periodische Reihen, die den Namen *Flächenperioden* führen sollen, herstellen, in der Art, dass je drei nächstfolgende Glieder der Reihe eine dreiseitige Ecke ausdrücken und dass von diesen Ecken je zwei nächstfolgende absolut von einander verschieden sind. Das eben beschriebene Hexaëder Π_2' besitzt ebenso 6 fünfgliedrige Flächenperioden, wie dem zu ihm polaren Dekaëder Π_2 6 fünfgliedrige Eckenperioden zukommen, nämlich:

$$F_1 = (\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta),\quad F_4 = (\gamma\varepsilon\beta\zeta\delta),$$
$$F_2 = (\alpha\beta\delta\zeta\gamma),\quad F_5 = (\alpha\varepsilon\zeta\beta\delta),$$
$$F_3 = (\beta\gamma\alpha\zeta\varepsilon),\quad F_6 = (\alpha\varepsilon\delta\gamma\zeta).$$

6. Obgleich die sämmtlichen Eckenperioden des einseitigen Dekaëders Π_2 ungeradzahlig und daher die ihnen entsprechenden Flächenzonen insgesammt einseitig sind*), so müssen doch nicht nothwendig *alle* Zonen eines einseitigen Trigonalpolyeders (denn nur auf solche beziehen sich in diesem Punkte Möbius' Untersuchungen) einseitig sein. Um dies an einem Beispiel nachzuweisen, wähle man, wie Möbius in seiner Preisschrift angiebt, ein räumliches Siebeneck $ABCDEFG$, von welchem keine vier Eckpunkte in einer Ebene liegen. Man ziehe in demselben die Diagonalen AD, AE, BD, BE, BG, CE, CF, DF, DG, EG, sodass die dadurch entstandenen 9 Dreiecke

$$(1)\qquad \begin{cases} ADB,\ DBG,\ BGE,\ GEA,\ EAD, \\ BEC,\ ECF,\ CFD,\ FDG \end{cases}$$

eine zusammenhängende Fläche bilden, welche von dem Siebeneck $AB\ldots G$ begrenzt wird. Verbindet man dann einen achten Punkt H mit den Seiten AB, BC, $\ldots GA$ desselben durch die 7 Dreiecke

*) Möbius, Inhalt eine Polyeders, § 8. Vergl. auch die Ausführungen auf Seite 117 und 118.

$$(2)\qquad \begin{cases} HAB,\ HBC,\ HCD,\ HDE, \\ HEF,\ HFG,\ HGA, \end{cases}$$

so ist ein geschlossenes Polyeder entstanden, welches 16 dreieckige Flächen, 8 Ecken und $\frac{16 \cdot 3}{2} = 24$ Kanten besitzt, also der Relation

$$e + f = k$$

genügt. Die Eckenperioden desselben sind:

$$E_1 = (ADBGE),$$
$$E_2 = (CFEHD),$$
$$E_3 = (BGDFCE),$$
$$E_4 = (ABDGFHEDABHCDFGH),$$
$$E_5 = (AGEBCHDEAGHFECBH).$$

Davon stellen nun E_1 und E_2 einseitige, E_3 dagegen eine zweiseitige, E_4 und E_5 wieder einseitige Zonen Z dar. Zum Nachweis dieser Behauptung bedarf es umsomehr einer etwas längeren Auseinandersetzung, als Möbius da, wo er einseitige Zonen von Trigonalpolyedern mit Hülfe der Eckenperioden construirt, nur solche betrachtet, in denen jedes Dreieck nur einmal enthalten ist, während doch in E_4 und E_5 mehrere Dreiecke zweimal vorkommen.

Befindet man sich auf einem Dreieck mit den Eckpunkten P, Q, R, so soll die Seite der Dreiecksfläche, auf welcher man steht, dadurch ausgedrückt werden, dass man die Ecken des Dreiecks immer in einem bestimmten Sinne aufeinander folgen lässt, also etwa so, dass man, den Perimeter in derselben Stellung durchlaufend, die Dreiecksfläche immer zur Rechten hat. Nach dieser Festsetzung drücken die cyclischen Ternionen PQR, QRP, RPQ, die man, wie es in der Substitutionentheorie gebräuchlich, in die Bezeichnung (PQR) zusammenfassen kann, die eine, dagegen die cyclischen Ternionen PRQ, RQP, QPR oder kurz der Cyclus (PRQ) die andere Seite der Dreiecksfläche aus. Besitzt nun eine Eckenperiode eines Trigonalpolyeders die Folge $\ldots PQRSTU \ldots$, so werden durch die Ternionen PQR, QRS, RST, STU, ... aufeinander folgende Dreiecke der entsprechenden Zone und durch die Cyclen (PQR), (RQS), (RST), (TSU) ... die zusammenhängenden Seiten dieser Dreiecksflächen dargestellt. Demnach sind die zusammenhängenden Seiten der Dreiecke, welche die durch E_1 ausgedrückte Zone bilden:

(ADB), (BDG), (BGE), (EGA), (EAD), (DAB), (DBG)...
d. h. nichts anderes, als dass mit der Seite (ADB) des Dreiecks ADB die entgegengesetzte Seite (DAB) desselben Dreiecks in directem Zusammenhang steht. Die Zone Z_1 muss also als eine einseitige bezeichnet werden. Ganz das Gleiche gilt für Z_2. Da ferner in E_4 die Differenz der Stellenzahlen der Ternionen ABD $[DGF]$ und DAB $[DFG]$ eine ungerade [gerade] ist, so kann man auf der entsprechenden Zone Z_4 von der Seite (ABD) $[(DGF)]$ des Dreiecks ABD $[(DGF)]$ auf die entgegengesetzte Seite (ADB) $[(DFG)]$ desselben Dreiecks gelangen, indem man immer nur von einem Dreieck der Zone auf das benachbarte über die gemeinsame Kante übertritt. Damit ist aber die Einseitigkeit der Zone Z_4 und ebenso der Zone Z_5 erwiesen. In derselben Weise erhellt endlich die Zweiseitigkeit der Zone Z_3, die man übrigens auch schon daraus erkennen kann, dass das reguläre Oktaëder, welches ja eine zweiseitiges Polyeder ist, 4 solcher sechsgliedriger Zonen besitzt.

Aus dem Vorangehenden ergiebt sich nun folgender allgemeine Satz über Trigonalpolyeder, nach dem man zu beurtheilen hat, in welche der beiden Classen seine Zonen gehören, welcher also auch entscheidet, ob das betreffende Polyeder zu den einseitigen oder zweiseitigen Flächen gehört:

Ist bei einem Trigonalpolyeder die Differenz der Stellenzahlen zweier Ternionen einer Eckenperiode, welche dasselbe Dreieck des Polyeders bezeichnen, gerade oder ungerade, und sind jene Ternionen selbst cyclisch bez. nichtcyclisch, so drückt diese Eckenperiode eine zweiseitige Zone aus. — Ist dagegen die Differenz der Stellenzahlen zweier Ternionen einer Eckenperiode, welche dasselbe Dreieck des Polyeders bezeichnen, gerade oder ungerade, und sind dabei jene Ternionen selbst nichtcyclisch bez. cyclisch, so stellt diese Eckenperiode eine einseitige Zone dar.

Dieser Satz lässt sich durch das Princip der Dualität auf die Flächenperioden der den Trigonalpolyedern polar entsprechenden Polyeder mit nur dreiseitigen Ecken sofort übertragen*).

---

*) Es will mir fast unglaublich erscheinen, dass Möbius bei der Erkenntniss der Thatsache, dass sich aus den Eckenbezeichnungen der Trigonalpolyeder nach einem gewissen Gesetz periodische Reihen bilden lassen, stehen geblieben sei und nicht vielmehr diese Eckenperioden für die Polyedertheorie verwerthet habe, ausser zum Nachweis der

7. Um die einseitigen Polyeder aus ihrer Ausnahmestellung, die sie bisher inne hatten, noch mehr herauszuheben, sei es mir gestattet, noch einige Beispiele solcher Polyeder anzuführen, die der Anschauung deshalb sehr leicht zugänglich sind, weil man sie aus den regulären Körpern ableiten kann, und die eben aus diesem Grunde ein besonderes Interesse zu erregen geeignet erscheinen. Zwei derselben, die einander polar zugeordnet sind, nämlich das im Folgenden mit Π_3 bezeichnete Polyeder und dessen Polarfigur Π_3', hat schon Herr Professor E. Hess construirt*), freilich auf ganz anderer Basis; und zwar Π_3 durch

Existenz von einseitigen Flächen. Allein ich habe in seinen Manuscripten nichts gefunden, was darauf schliessen liesse, dass er diese überaus glückliche und werthvolle Entdeckung weiter verfolgt hätte. Möbius hat für kein Polyeder das vollständige System seiner Eckenperioden angegeben. Er kam, wie ich fand, auf diese periodischen Reihen bei dem Bestreben, ein Trigonalpolyeder durch möglichst wenig Symbole vollständig, gleichsam analytisch zu bestimmen. Drückt man nämlich ein solches durch die Zusammenstellung seiner Ecken oder seiner Flächen aus, so sind in jedem Falle $2k = 3f = 6e - 12$ Symbole erforderlich, falls dasselbe der Euler'schen Relation genügt. Dasselbe ist aber auch der Fall, wenn man das vollständige System seiner Eckenperioden angiebt. Es besteht nämlich der allgemeine Satz:

Die Summe der Gliederzahlen sämmtlicher Eckenperioden eines Polyeders ist gerade und zwar gleich der doppelten Kantenzahl. Eckenperioden mit einer ungeraden Anzahl von Gliedern können daher nur in gerader Anzahl vorkommen.

Durch *eine* seiner Eckenperioden, auch wenn dieselbe sämmtliche Flächen des Polyeders enthält, ist aber ein solches noch nicht völlig bestimmt, wie Möbius anzunehmen geneigt schien. Es bedarf immer der Angabe des vollständigen Systems der Eckenperioden, also nach dem vorigen Satze bei einem Euler'schen Trigonalpolyeder der Angabe von $2k = 6e - 12$ Symbolen. — Während nun Möbius bei der Bildung dieser periodischen Reihen nur Trigonalpolyeder in Betracht zieht, ist es mir gelungen, auf seinen Ideen fussend für jedes beliebige Polyeder mit einfach zusammenhängenden Flächen und Ecken solche periodische Gebilde verschiedener Art abzuleiten und mit ihrer Hülfe die Polyedertheorie in einen einfachen Zusammenhang mit der Substitutionentheorie zu bringen, in der Art, dass jedem Polyeder eine Gruppe von Substitutionen entspricht, die für dasselbe charakteristisch ist. Es erscheint höchst wahrscheinlich, dass in dieser Weise die Polyedertheorie und die Substitutionentheorie wechselseitig aufeinander befruchtend wirken werden. Die Veröffentlichung meiner Resultate behalte ich mir für einen späteren Zeitpunkt vor.

*) Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg Nr. 1. Jan. 1879. Artikel: »Ueber einige einfache Polyeder mit einseitiger Oberfläche«.

Erweiterung der Ebenen eines Trigondodekaëders, Π_3' durch Erweiterung der Flächen eines Polyeders, welches entsteht, wenn man die Kanten eines regulären Tetraëders gleichmässig und gerade durch die Flächen eines regulären Hexaëders abstumpft.

Doch nun zu unserer Construction der neuen Polyeder! Will man sich kurz ausdrücken, so kann man sagen, dass *diejenigen Kugeltheilungen, welche durch das reguläre Tetraëder, Oktaëder und Ikosaëder in Verbindung mit ihren Symmetrieebenen entstehen, wenn man diese Körper auf die ihnen umschriebenen Kugelflächen vom Mittelpunkte aus geradlinig projicirt, als einseitige Polyeder betrachtet werden können.* (Dabei ist jedoch der Begriff eines Polyeders allgemeiner gefasst, als eine in Facetten eingetheilte geschlossene krumme Fläche.) Durch die Symmetrieebenen der regulären Körper wird nämlich jede ihrer dreieckigen Flächen in 6 abwechselnd congruente und symmetrische Dreiecke zerlegt. Je zwei derselben, welche durch die nämlichen beiden Höhen der zertheilten Fläche eingeschlossen werden, können aber zusammen als *ein* Viereck zweiter Art bildend betrachtet werden, dessen Knotenpunkt der Mittelpunkt der Fläche ist. So zerfällt jedes der Dreiecke des regulären Körpers in 3 überschlagene Vierecke mit gemeinsamem Knotenpunkt, die genau dieselbe Lage zu einander haben, wie die 3 in M sich schneidenden Vierecke des Polyeders Π_4' (Fig. 2); und es bedarf somit auch keines Beweises dafür, dass die drei neuen aus dem Tetraëder P_3, dem Oktaëder P_4 und dem Ikosaëder P_5 construirten Körper Π_3 bez. Π_4 und Π_5 einseitige und zwar gleichflächige Polyeder sind. Zu den Ecken eines jeden Körpers P kommen als neue und zwar vierseitige Ecken des entsprechenden Polyeders Π die Kantenhalbirungspunkte von P hinzu, während die Ecken des letzteren sechsseitige bez. achtseitige und zehnseitige Ecken von Π geworden sind. Endlich sind die Höhen der Dreiecksflächen eines jeden P als neue Kanten des zugehörigen Π zu rechnen. Bezeichnet man also, wie gewöhnlich, mit e, f, k die Ecken-, Flächen- und Kantenzahlen der Stammform P, mit ε, ζ, $\varkappa$ dieselben Zahlen des entsprechenden einseitigen Polyeders Π, so ergeben sich die Beziehungen:

$$\varepsilon = e + k\,,$$
$$\zeta = 3f\,,$$
$$\varkappa = 2\varkappa + 3f.$$

Man hat demnach, da für das Tetraëder P_3: $e = 4$, $f = 4$, $k = 6$, für Π_3: $\varepsilon = 10$, $\zeta = 12$, $\varkappa = 24$ und die Relation

$$\varepsilon + \zeta = \varkappa - 2;$$

ferner, weil für P_4: $e = 6$, $f = 8$, $k = 12$, für Π_4: $\varepsilon = 18$, $\zeta = 24$, $\varkappa = 48$ und die Beziehung

$$\varepsilon + \zeta = \varkappa - 6;$$

endlich, weil für P_5: $e = 12$, $f = 20$, $k = 30$, für Π_5: $\varepsilon = 42$, $\zeta = 60$, $\varkappa = 120$ und die Gleichung

$$\varepsilon + \zeta = \varkappa - 18.$$

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass diese Körper Π_3, Π_4, Π_5 auch als ebenflächige Polyeder construirt werden können, bei welchen keine zwei Flächen Winkel von 180^0 einschliessen, wie es der Fall ist, wenn man die durch die Symmetrieebenen zerlegten regulären Polyeder P selbst als einseitige Flächen betrachtet. Beispielsweise könnte man jedes dieser Polyeder Π aus lauter Hexaëdern von der Form von Π_1' (Fig. 2) zusammensetzen, wenn man nur die Flächenwinkel der letzteren in geeigneter Grösse wählt; so Π_3 aus 4, Π_4 aus 8, Π_5 aus 20 Polyedern Π_1'. Dem entsprechend wiederholt auch das von Hess a. a. O. beschriebene, zu Π_3 polare und gleicheckige Vieleck Π_3' viermal die Grundfigur des von mir in Art. 2 angegebenen Siebenflächners Π_1, und zwar liegen diese vier Polyeder Π_1 wie die Ecken eines Tetraëders. Ebenso besteht das zu Π_4 polare Π_4' aus 8 Polyedern Π_1, die wie die Ecken eines Hexaëders gegeneinander gelegen sind. Und endlich zeigt Π_5', welches zu Π_5 polar ist, die Grundform Π_1 in 20facher Wiederholung, wobei diese 20 Π_1 auf die Ecken eines regulären Dodekaëders aufgesetzt erscheinen. Am zweckmässigsten erscheint es jedoch, diese neuen Körper Π so aus den entsprechenden Stammformen P zu construiren, dass man diejenigen Punkte der den letzteren umgeschriebenen Kugeln als neue Ecken wählt, welche den Kantenhalbirungspunkten der Polyeder P entsprechen.

8. Zum Schluss soll noch derjenigen Polyeder gedacht werden, welche Möbius in seiner Preisarbeit als Beispiele von Polyedern zweiter Classe anführt.

Im § 11 seiner »Theorie der Elementarverwandtschaft« de-

finirt er als eine Grundform n^{ter} Classe jeden Theil einer geschlossenen Fläche, welcher von n sich nicht schneidenden, geschlossenen Linien begrenzt ist, und weist nach (§ 11), »dass jede geschlossene Fläche sich durch eine gewisse Anzahl auf ihr gezogener Linien in zwei Grundformen zerlegen lässt, deren jede von allen diesen Linien begrenzt ist«. Darnach wird eine geschlossene Fläche n^{ter} Classe als eine solche erklärt, welche in zwei Grundformen der n^{ten} Classe zerlegbar ist*). Da nun die Oberfläche eines jeden doppelseitigen Polyeders unter den Begriff der geschlossenen Flächen fällt, so versteht MÖBIUS unter Polyedern erster Classe die gewöhnlichen EULER'schen, weil jedes derselben in zwei Grundformen der ersten Classe (Unionen) zerlegt werden kann, unter Polyedern zweiter Classe solche, deren Oberfläche sich von zwei geschlossenen Kantenzügen in zwei Grundformen der zweiten Classe (Binionen) zerschneiden lässt.

Das einfachste derartige Trigonalpolyeder entsteht nun nach MÖBIUS dadurch, dass man durch je vier cyclisch nächstfolgende aus einer Reihe von sieben Punkten A, B, C, D, E, F, G sieben Tetraëder

$$ABCD,\ BCDE,\ CDEF,\ DEFG,$$
$$EFGA,\ FGAB,\ GABC$$

construirt, deren jedes mit einem jeden benachbarten eine Fläche gemein hat. Die 14 Grenzflächen, welche nicht zweien der sieben Tetraëder gemeinsam sind, nämlich

$$ABD,\ DCA,\ BCE,\ EDB,\ CDF,\ FEC,\ DEG,$$
$$GFD,\ EFA,\ AGE,\ FGB,\ BAF,\ GAC,\ CBG,$$

ergeben dann ein geschlossenes Polyeder Π_6; denn jede Seite eines jeden dieser 14 Dreiecke ist zugleich eine Seite eines und nur eines der übrigen. Den Nachweis, dass dieses Polyeder zur zweiten Classe gehört, führt MÖBIUS in der Weise, dass er zeigt, wie sich dasselbe in zwei Binionen mit den gemeinschaftlichen Grenzen BEF und DCG zerlegen lässt. Dazu hätte sich aber MÖBIUS auch der durch die Eckenperioden ausgedrückten Zonen bedienen können. Π_6 hat nämlich drei Eckenperioden von je 14 Gliedern:

*) Der RIEMANN'schen Terminologie zufolge würde man eine solche Fläche $(2n-1)$-fach zusammenhängend nennen. (F. KLEIN.)

$$E_1 = (ABDEGACDFGBCEF),$$
$$E_2 = (BADCFEAGCBEDGF),$$
$$E_3 = (BDACGBFAEGDFCE).$$

Die hierdurch ausgedrückten drei Zonen Z_1, Z_2, Z_3 von Π_6 sind nach dem allgemeinen Satz des Art. 6 sämmtlich zweiseitig. Jede solche Zone eines Trigonalpolyeders hat nun als Grenzlinien zwei räumliche Polygone, von denen das eine durch die Reihe der geradstelligen, das andere durch die Reihe der ungeradstelligen Glieder der entsprechenden Eckenperiode dargestellt wird*). *Die durch E_1, E_2, E_3 bestimmten Zonen des Polyeders Π_6 haben aber die Eigenthümlichkeit, dass die beiden Grenzlinien einer jeden derselben zwei zusammenfallende Polygone sind.* Es wird nämlich die Zone

Z_1 begrenzt von dem geschlossenen Polygon $ADGCFBE$,
Z_2 - - - - - $ACEGBDF$,
Z_3 - - - - - $AGFEDCB$,

von denen ein jedes das Trigonalpolyeder Π_6 ungetheilt lässt. Es gehört eben deshalb Π_6 zur zweiten Classe. Um sich das Modell von Π_6 zu veranschaulichen, kann man am einfachsten zu möglichster Wahrung der Symmetrie sieben der Eckpunkte eines Würfels als Eckpunkte von Π_6 benutzen; allerdings fallen dann Theile gewisser Kanten in Flächen des Polyeders hinein, was jedoch dem Begriff eines Polyeders nicht zuwiderläuft.

9. Ebenso, wie durch Zusammensetzung von Tetraëdern, lassen sich durch Aneinanderreihung von mindestens drei (wenn auch nicht regulären) Oktaëdern, von denen jedes in zweien seiner Gegenflächen an die benachbarten Oktaëder grenzt, ringförmige Trigonalpolyeder zweiter Classe herstellen. Auf diese Weise hat Möbius aus vier Oktaëdern ein Polyeder Π_7 construirt, das er in eine eigenthümliche Beziehung zur Musik gebracht und daher auch in seiner Preisschrift »*Polyèdre des accords musicaux*« genannt hat. Man kann seine 12 Ecken den 12 Tönen der chromatischen Tonleiter, seine 24 dreieckigen Flächen den 12 Dur- und 12 Mollaccorden, seine 36 Kanten den in diesen Accorden liegenden Intervallen einer grossen Terz, einer kleinen Terz und einer reinen Quinte entsprechend setzen.

Es mögen C, D, E, F, G, A, H die Töne der Durtonleiter

*) Möbius, Inhalt eines Polyëders, § 10.

von C, und $C^{\#}$, $D^{\#}$, $F^{\#}$, $G^{\#}$, B die zwischen C und D, zwischen D und E, zwischen F und G, zwischen G und A, zwischen A und H liegenden halben Töne und zugleich die 12 Ecken des Polyeders Π_7 bezeichnen. Ordnet man dann jene Bezeichnungen in folgendem Schema an:

$$\begin{array}{cccccccc} & C & & E & & G^{\#} & & C \\ D^{\#} & & G & & H & & D^{\#} & \\ & B & & D & & F^{\#} & & B \\ C^{\#} & & F & & A & & C^{\#} & \\ & G^{\#} & & C & & E & & G^{\#}, \end{array}$$

so drücken je drei in einem Dreieck einander zunächst stehende Symbole ein Dreieck von Π_7 aus. Die vier Töne jeder der fünf Horizontalreihen dieses Schemas, wie $CEG^{\#}C$ (oder vielmehr die nächst höhere Octave des letzteren C) schreiten in grossen Terzen fort; die Töne der schrägen Reihe $EGBC^{\#}$ und der ihr parallelen Reihen in kleinen Terzen; die Töne der schrägen Reihe $CGDAE$ und der ihr parallelen Reihen in Quinten. Je drei in einem Dreieck einander zunächst stehende Töne bilden daher einen Accord, und zwar einen Duraccord, wenn die Spitze des Dreiecks nach unten liegt, wie CEG, $EG^{\#}H$, GHD etc.: einen Mollaccord aber, wenn die Spitze nach oben gerichtet ist, wie $CD^{\#}G$, EGH, GBD etc.*).

Dass das Polyeder Π_7 zur zweiten Classe gehört, beweist Möbius, wie bei Π_6, durch Zerlegung seiner Oberfläche in Binionen. Aber auch hier kann dieser Nachweis mit Hülfe der Eckenperioden geführt werden. Π_7 hat 4 sechsgliedrige, 3 achtgliedrige und eine vierundzwanziggliedrige Periode, welche alle Dreiecke des Polyeders umfasst:

$$\begin{aligned} E_1 &= (D^{\#}CGEHG^{\#}), \\ E_2 &= (BGDHF^{\#}D^{\#}), \\ E_3 &= (C^{\#}BFDAF^{\#}), \\ E_4 &= (C^{\#}G^{\#}FCAE), \\ E_5 &= (G^{\#}C^{\#}FBDGHE), \\ E_6 &= (CFADF^{\#}HD^{\#}G^{\#}), \\ E_7 &= (EAC^{\#}F^{\#}BD^{\#}GC), \\ E_8 &= (D^{\#}GBDFACEGHDF^{\#}AC^{\#}EG^{\#}HD^{\#}F^{\#}BC^{\#}FG^{\#}C). \end{aligned}$$

---

*) Wie wohl erklärlich sein dürfte, hat der Verfasser bei dieser Beschreibung fast wörtlich den Möbius'schen Text wiedergegeben.

Daraus ergiebt sich für die den E_i entsprechenden Zonen Z_i folgendes Resultat:

1. Die vier sechsgliedrigen Zonen Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 haben resp. die Grenzpolygone

$$\begin{array}{lcl} G^{\#}CE & \text{und} & D^{\#}GH, \\ D^{\#}GH & - & F^{\#}BD, \\ F^{\#}BD & - & C^{\#}FA, \\ C^{\#}FA & - & G^{\#}CE. \end{array}$$

2. Die drei Zonen Z_5, Z_6, Z_7, welche je acht Dreiecke des Polyeders Π_7 umfassen, haben die Grenzen:

$$\begin{array}{lcl} C^{\#}BGE & \text{und} & G^{\#}FDH, \\ G^{\#}FDH & - & D^{\#}CAF^{\#}, \\ D^{\#}CAF^{\#} & - & C^{\#}BGE. \end{array}$$

3. Die Grenzen der Zone Z_8, welche alle 24 Dreiecke von Π_7 enthält, werden gebildet durch das doppelt zu rechnende geschlossene Zwölfeck

$$D^{\#}BFCGDAEHF^{\#}C^{\#}G^{\#},$$

welches das Polyeder Π_7 ungetheilt lässt. Daraus aber ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung, dass das Polyeder Π_7 zur zweiten Classe gehöre. Dasselbe kann man übrigens auch, wie es Möbius, allerdings ohne Berücksichtigung der Zonen gethan, aus der unter Nr. 1 und 2 angegebenen Zerlegung in vier bez. drei Binionen schliessen; denn in jedem der beiden Fälle lassen sich dieselben zu zwei Grundformen der 2. Classe vereinigen, deren jede von denselben zwei Linien begrenzt wird*).

---

*) Nicht unerwähnt darf bleiben, dass Herr Reinhardt von den hauptsächlichen im Texte genannten Polyedern Cartonmodelle angefertigt und eine Collection derselben dem mathematischen Institute der Universität Leipzig geschenkt hat. (F. Klein.)

Professor **His**

legt der Gesellschaft die Tafeln IX bis XIV seines embryologischen Atlas, sowie einige Zeichnungen vor, die durch den ihm von der Gesellschaft bewilligten Zeichner Herrn Pausch ausgeführt worden sind.

Derselbe knüpft daran einige Bemerkungen über die Entwickelungsgeschichte des Halses und zeigt, dass die Inframaxillargegend und die vordere Halsgegend ursprünglich mit einander verbunden gewesen sind und erst durch die Hebung des Kopfes sich von einander emancipirt haben. Ebenso weist derselbe nach, dass die primäre Thymusanlage ein epidermoidales Abschnürungsproduct ist, das dadurch entsteht, dass auf der Grenze vom Kopf und vom Hals die hinteren Schlundbogen in die Tiefe gedrängt und theils durch den zweiten Bogenwulst, theils durch den Rand des Halses überlagert werden.

Prof. **Schenk**, *Ueber Sigillariostrobus.*

Obwohl die Structurverhältnisse der Stämme der Sigillarien gut untersucht und seit geraumer Zeit die Sporangienähren, wenn auch nicht im Zusammenhange mit den Stämmen, so doch so weit bekannt sind, dass eine richtige Auffassung der letzteren keine besonderen Schwierigkeiten bietet, so gehen doch die Ansichten über die Stellung der Sigillarien sehr weit auseinander. Während sie die einen nach dem Vorgange von Brongniart den Gymnospermen anreihen und den Cycadeen verwandt glauben, betrachten sie andere als Gefässcryptogamen, als Verwandte der Selaginelleen oder Isoëteen und stellen sie neben die Lepidodendreen. Beide Ansichten stützen sich auf die Structur der Stämme, nur Goldenberg und ihm folgend Schimper berücksichtigen auch die Sporangienähren zur Begründung ihrer Ansicht, dass die Sigillarien den Isoëteen zunächst verwandt sind.

Da ich an dieser Stelle auf Grund des mir vorliegenden Materials nur die Sporangienstände besprechen will, so unterlasse ich es auf die Structurverhältnisse der Stämme näher einzugehen, sowie auf die aus ihnen gezogenen Folgerungen.

Goldenberg hat das Verdienst, zuerst (Flora foss. sarep. Heft I, Taf. 4, Fig. 3. Taf. B, Fig. 10—24. Heft II, Taf. X, Fig. 1, 2) die Sporangienähren und die an ihnen vorkommenden Sporen beobachtet und mit seinen Hilfsmitteln richtig dargestellt zu haben. Dass seiner Beobachtung ein so geringes Gewicht beigelegt wurde, hatte seinen Grund wesentlich darin, dass die Sporangienähren nicht im Zusammenhange mit den Stämmen beobachtet wurden, noch auch ihr Erhaltungszustand zweifellos ihre Herkunft von Sigillarien bewies. Schimper (traité II, p. 105)

ist der Einzige, welcher der Goldenberg'schen Beobachtung volle Rücksicht hat zu Theil werden lassen und wie auch später im Handbuche der Paläontologie, für die Sigillarien nicht allein die Verwandtschaft mit *Isoëtes*, sondern auch Micro- und Macrosporen in Anspruch nimmt. Die Sporangienähren bezeichnet er als *Sigillariostrobus*. In jüngster Zeit ist durch Zeiller (Annal. des scienc. nat. Bot. Sér. VI. tom. XIX) die Goldenberg'sche Beobachtung bestätigt und erweitert, insbesondere aber die Zugehörigkeit der als *Sigillariostrobus* bezeichneten Sporangienähren zu *Sigillaria* sicher gestellt worden, indem er an zwei von ihm unterschiedenen Arten von *Sigillariostrobus (S. Tieghemi, S. nobilis)* die Blattnarben von *Sigillaria*, an der ersteren, sodann bei *S. Souichi* Zeill., *S. strictus* Zeill. und *S. Goldenbergi* Feistm. die Sporen und Anheftung derselben an der Basis der Sporangialblätter nachwies. Im Besitze der Goldenberg'schen Originale und einiger ohne Zweifel in späterer Zeit von Goldenberg gesammelten Exemplare bin ich in der Lage, die Angaben Zeiller's, dessen Zuvorkommenheit ich die Sporen seines *S. Goldenbergi* verdanke, so wie jene Goldenberg's zu bestätigen. Aus diesen Beobachtungen geht nun unzweifelhaft hervor, dass die Sporangialblätter ährenförmig in einer Spirale terminal an besonderen Verzweigungen des Stammes stehen, dass unterhalb der Aehre schmale, lang zugespitzte Blätter, welche kürzer als jene des Stammes sind, stehen, die Sporangialblätter an der Basis dreiseitig verbreitert, gegen die Spitze verschmälert sind und auf der Innenfläche des verbreiterten Basaltheiles die Sporen tragen. Alle diese Verhältnisse lassen sich an den von Goldenberg bei Altenwald und Dudweiler gesammelten Exemplaren mit voller Sicherheit nachweisen, es fehlen aber Exemplare mit den für *Sigillaria* charakteristischen Blattnarben, wie sie Zeiller vorgelegen haben. Es würde dies nur dann Grund sein, die Zugehörigkeit der Sporangienähren zu *Sigillaria* zu bezweifeln, wenn die übrigen Theile der Aehren ein Verschiedenheit von jenen Zeiller's zeigten.

Die Sporen selbst liegen mir in reichlicher Menge vor und zwar entweder an der Basis der Sporangialblätter noch ansitzend oder zwischen den Sporangialblättern oder losgetrennt in grosser Menge zwischen Blättern und Sporangienähren von *Sigillaria*, oder ohne diese auf den Gesteinsplatten. Auf den ersten Blick unterscheidet man zweierlei Sporenformen, grössere und klei-

nere*). Dass beide Formen aus den Sporangienähren herrühren, zeigt die microscopische Untersuchung, bei welcher sich durchaus keine Differenz ergiebt, mag man die Sporen der Basis der Sporangialblätter oder irgend einer Stelle des Gesteins entnommen haben. Alle Sporen sind radiär entwickelt, als Tetraëder mit gewölbter Grundfläche und zeigen selbst bei schwächerer Vergrösserung mit der Loupe drei Leisten, die grösseren auch kleine warzenförmige Erhöhungen der Aussenfläche, während bei den kleineren die Oberfläche glatt ist. Der Durchmesser der kleineren Sporen beträgt (gemessen mit Zeiss, System A. Ocular II) 750—900 μ (0,75 mm — 0,9 mm), der Durchmesser der grösseren 1600—2200 μ (1,6 mm — 2,2 mm). Auch die von Zeiller beobachteten Sporen zeigen solche Grössenunterschiede und Verschiedenheit der Aussenfläche. Glatt ist die Aussenfläche der Sporen bei *S. Tieghemi* und *S. strictus*, mit kleinen Erhöhungen versehen bei *S. Souichi* und *S. Goldenbergi*. Der Durchmesser der Sporen von *S. strictus* beträgt 1 bis $1^1/_5$ mm, von *S. Goldenbergi* $1^1/_2$ mm, von *S. Souichi* $2^1/_4$ mm, von *S. Tieghemi* 2 mm. An allen Sporangienähren, deren Sporangialblätter die Untersuchung der Anheftung und Stellung der Sporen gestatten, ist von einer Hülle, welche die Sporen bedeckt, nichts zu sehen, die Sporen liegen frei auf der Basis des Sporangialblattes. Dass wirklich Sporen vorliegen, lehrt die microscopische Untersuchung; es ist das sehr dickwandige Exospor, welches erhalten ist.

Schimper betrachtet die von Saarbrücken stammenden Sporen, welche er selbst gesehen haben muss, da Goldenberg über die verschiedene Grösse der von ihm beobachteten Sporen schweigt und die von Schimper copirten Figuren Goldenberg's, diese so wenig wie die Originalzeichnungen zeigen, als Micro- und Macrosporen. Dass die Sporangialblätter unter einem spitzen Winkel an der Axe ansitzen, hat bereits Schimper hervorgehoben.

Ob nun die bei Saarbrücken vorkommenden Sporangienähren, wie dies von Feistmantel geschehen ist, als einer Art an-

*) Ich bemerke, dass das Verfahren oxydirende Mittel zur Aufhellung verkohlter Pflanzenreste anzuwenden von mir seit mehr als zwanzig Jahren angewendet wird, wie z. B. in der Flora der Grenzschichten zu finden.

gehörig bezeichnet werden können, ist mir zweifelhaft. Mein Material von Sporangienähren ist indess weder ausreichend genug noch auch so vollständig erhalten, dass für die Unterscheidung genügende Merkmale sich ergäben und noch weniger eignet es sich zur Identificirung mit einer der bei Saarbrücken vorkommenden *Sigillaria*-Arten. Dagegen weist die Beschaffenheit der Aussenfläche der Sporen auf das Vorhandensein von zwei, verschiedenen Sigillaria-Arten angehörigen Sporangienähren hin. Im Gegensatze zu Schimper, übereinstimmend mit Zeiller, scheinen mir die Sporen sämmtlich Macrosporen zu sein wegen des sehr dicken Exospors und ihrer verhältnissmässig bedeutenden Grösse, welche wenigstens bei den fossilen und lebenden Gefässcryptogamen von den Microsporen nicht erreicht wird. Die Differenzen in der Grösse der Macrosporen sind nicht allzusehr zu betonen, da dergleichen Grössenunterschiede auch bei den Macrosporen lebender Gefässcryptogamen vorkommen, wie dies z. B. aus A. Braun's Messungen der Macrosporen der australischen Isoëtes-Arten hervorgeht. In derselben Sporangienähre habe ich immer nur eine Sporenform gefunden, in der Mehrzahl der mir vorliegenden die grösseren, nur in einer die kleineren. Dagegen lege ich der Beschaffenheit der Aussenfläche der Sporen eine grössere Bedeutung bei, nach welcher also unter *S. Goldenbergi* Feistm. die Sporangienähren wenigstens zweier verschiedenen Sigillarien zusammengefasst sind, deren eine glatte kleinere, die andere grössere höckerige Sporen besitzt. Mit den von Zeiller gegebenen Abbildungen der Sporen verglichen, würden die glatten kleinen Sporen jenen von *S. strictus* Zeill. (a. a. O. tab. 12, Fig. 4a) nahe stehen, die grösseren mit warziger Aussenfläche dagegen jenen von *S. Goldenbergi* Zeill. (a. a. O. tab. 12, Fig. 6a) und *S. Souichi* Zeill. (a. a. O. tab. 11, Fig. 5b). Auch Goldenberg's Abbildungen der Sporangienähren können auf die Vermuthung führen, dass die Bezeichnung Feistmantel's sich nicht blos auf eine Art bezieht, so Heft II, Taf. X, Fig. 1, wie ja auch das Vorkommen einer grösseren Anzahl von Sigillarien bei Saarbrücken mehr als eine Form von Sporangienähren erwarten lässt.

Was nun die Stellung von *Sigillaria* gegenüber den lebenden und fossilen Gefässcryptogamen betrifft, so scheinen mir die von Zeiller geäusserten Ansichten nicht ungegründet. Zu den Lepidodendreen, sowie zu den Lycopodiaceen und Isoëteen

hat die Gattung eine Beziehung zur ersteren Gruppe durch ihren baumartigen Habitus, wobei ich von den Structurverhältnissen des Stammes, da es mir zur Prüfung dieses Verhältnisses an *sicher* bestimmbarem, brauchbarem Material fehlt, ganz absehe. Ferner theilen sie mit den Lepidodendreen, Lycopodiaceen und Selaginelleen die terminalen Sporangienähren. Die Sporangien entwickeln sich wie bei den zwei zuerst genannten Gruppen an der Basis des Sporangialblattes, was jedoch die Sigillarien von diesen Gruppen trennt, ist das Fehlen eines Sporangiums, welches die Sporen durch einen Riss entlässt. In dieser Hinsicht verhalten sich die Sigillarien wie die *Isoëtes*-Arten der Jetztwelt. Wie bei diesen die Sporen durch Zerstörung der Wände der Sporangien frei werden, so scheint dies auch bei den Sigillarien der Fall zu sein, da Goldenberg, ich und Zeiller die Sporen stets frei auf der Basis des Sporangialblattes beobachteten. Ebenso wenig ist eine der sogenannten Ligula entsprechende Bildung oder etwa ein Schleier, welcher bei den Isoëtes-Arten entweder überhaupt fehlt oder vollständig oder unvollständig entwickelt ist, nachzuweisen. In dieser Hinsicht würden die untersuchten Sigillariostrobus-Arten sich den schleierlosen *Isoëtes*-Arten anschliessen. Dass ich wie Zeiller die Sporen sämmtlich als Macrosporen auffasse, habe ich bereits bemerkt. Vorerst kennen wir also nur eine Sporenform, deren Grössenverhältnisse jedenfalls mehr dafür sprechen, dass uns die Microsporen noch unbekannt sind, als dass überhaupt bei *Sigillaria* nur eine Form von Sporen vorhanden war. Zudem haben weder Zeiller noch mir vollständige Exemplare von Sporangienähren vorgelegen, so dass wie bei *Lepidodendron* es näher liegt daran zu denken, dass unsere Unkenntniss durch die Unvollständigkeit der Sporangienähren bedingt ist. Man wird aber die Sigillarien als eine Gruppe betrachten können, welche den Lepidodendreen sich durch ihren baumartigen Wuchs anschliesst, durch ihre Sporenbildung der lebenden Gattung *Isoëtes* nahe steht, bei welcher jedoch das Dicken- und Längenwachsthum des Stammes zwar noch im geringen Grade sich erhalten, die Verzweigung und Ausbildung besonderer, Sporangialblätter tragender Zweige vollständig verloren gegangen ist.

Dr. **Ambronn**, *Zur Mechanik des Windens.*

II. Theil.

§ 1.

Wirkung des Geotropismus auf bogenförmig gekrümmte Organe.

Obwohl die Einwirkung der Schwerkraft auf gerade Stengelorgane schon vielfach Gegenstand der Untersuchung gewesen und die dabei eintretenden Bewegungen im Wesentlichen genau bekannt sind, so war doch die Frage, in welcher Weise die Schwerkraft an bereits gekrümmten Organen Veränderungen hervorrufe, bisher nicht näher erörtert worden.

Es ist selbstverständlich, dass diese Krümmungsveränderung je nach der Lage, welche das gekrümmte Organ zum Horizont hat, verschieden ausfallen wird. Es ist ferner klar, dass die Art der vorhandenen Krümmung auf die neu eintretende einen bestimmten Einfluss haben wird, denn es ist nicht gleichgültig, ob die Curve jener Krümmung einen Kreis, eine Spirale oder eine andere ebene Curve, oder vielleicht eine Schraubenlinie bezw. allgemeiner eine Curve doppelter Krümmung darstellt.

Zwei Factoren sind demnach zu berücksichtigen, wenn es sich darum handelt, die unter dem Einflusse des Geotropismus stattfindenden Bewegungen eines bereits gekrümmten Organes darzulegen: die Lage desselben zum Horizont und die vorhandene Krümmung. Dabei ist vorausgesetzt, dass das betreffende Organ einen radiären, nicht aber einen symmetrischen Bau habe; denn in dem letzteren Falle, wie z. B. bei vielen Blattstielen, treten weitere Complicationen hinzu, die im Folgenden keine Beachtung finden können. Die obige Voraussetzung ist deshalb gerechtfertigt, weil die vorliegende Frage nicht ganz im Allgemeinen behandelt werden soll, und weil bei den win-

denden Pflanzen, um welche es sich hier ausschliesslich handelt, an den jungen Internodien stets ein radiärer Bau zu finden ist Ich habe bereits in einer kurzen Mittheilung in den Ber. d. deutsch. Bot. Ges. darauf hingewiesen, wie gerade beim Winden häufig ein bereits durch Nutation oder andere Einflüsse gekrümmtes Sprossende eine weitere geotropische Krümmung erfahren kann. Den einfachsten Fall habe ich an jener Stelle ebenfalls schon kurz erörtert. Es ist dies derjenige, in welchem die vorhandene Curve einen Kreisbogen darstellt, dessen Ebene horizontal liegt. Da ich jedoch die dabei auftretenden Veränderungen in der Lage der einzelnen Querschnittscheiben zum Horizont nur angedeutet habe, so möge hier zunächst eine exacte Behandlung dieses Falles folgen.

Die vorliegende Aufgabe lässt sich folgendermassen ausdrücken: Ein ungedrehtes cylindrisches Organ hat eine kreisförmige Krümmung erfahren, deren Ebene horizontal liegt. Durch den Geotropismus wird nunmehr in der nach unten gekehrten Längszone ein stärkeres Wachsthum bedingt, als in der nach oben gekehrten. Es wird in Folge dessen zu der bereits vorhandenen Krümmung eine neue hinzutreten; diese letztere findet in der Weise statt, dass jede Querschnittscheibe des Organs gegen die benachbarte um einen constanten Winkel und um den Radius als Achse gedreht wird. Es soll nun untersucht werden: 1) Was für eine Curve stellt nach eingetretener zweiter Krümmung die Achse des Organs dar. 2) In welcher Weise ist die Lage der einzelnen Querschnittscheiben zum Horizont verändert worden.

Die erste Frage lässt sich dahin beantworten, dass die Axe des Organs wiederum einen Kreis bildet; denn bedenkt man, dass jeder Kreisbogen, bei einer Krümmung wie sie im Obigen charakterisirt ist, die Basis eines Kegels oder einen Theil derselben bildet, so ist klar, dass ein Kreisbogen entstehen muss, dessen Radius jedoch kleiner ist als der des zuerst vorhandenen Bogens. Es handelt sich also, nachdem die Art der Curve selbst nachgewiesen ist, nur noch um die Bestimmung der Länge des Radius. Diese lässt sich auf folgende Weise ausführen: Aus dem Verhältniss des Wachsthums von Ober- und Unterseite und dem Durchmesser des Organs kann man den Radius der geotropischen Krümmung bestimmen. Es sei dieses Verhältniss gleich $\frac{n}{m}$ und es sei ferner der Durchmesser gleich d,

so gilt, wenn wir den Radius der concaven Seite x nennen, folgende Proportion:

$$n : m = x : x + d$$

$$x = \frac{nd}{m - n} .$$

Nennen wir weiterhin den Radius des Kreises, dessen Peripherie die Längsachse bei der geotropischen Krümmung bilden würde, $\varrho_{,}$, so ist:

$$\varrho_{,} = \frac{nd}{m - n} + \frac{d}{2} = \frac{d}{2}\left(\frac{m + n}{m - n}\right) . \qquad (1)$$

Bedenkt man nun, dass die schliesslich zustandekommende Curve die Basis zweier Kegel bildet, deren Seiten senkrecht aufeinander stehen, und von denen die eine gleich $\varrho_{,}$, die andere aber gleich dem Radius der zuerst vorhandenen Krümmung, den wir gleich $\varrho_{,,}$ setzen, ist, so ergeben sich, wie aus beistehender Figur erhellt folgende Gleichung zur Berechnung des gesuchten Radius ϱ:

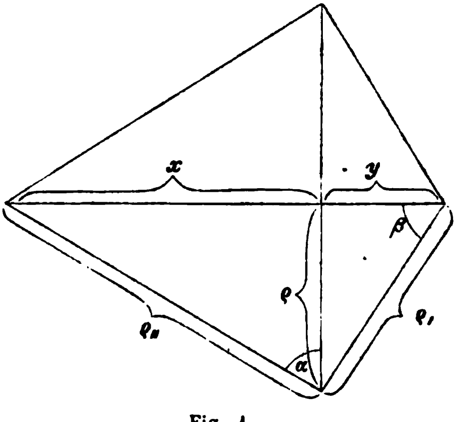


Fig. 1.

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{,}^2 &= (x + y)y \\ \varrho_{,,}^2 &= (x + y)x \\ \varrho^2 &= xy \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \varrho_{,}^2\varrho_{,,}^2 &= (x + y)^2 xy \\ \varrho_{,}^2 + \varrho_{,,}^2 &= (x + y)^2 \\ \hline \frac{\varrho_{,}^2\varrho_{,,}^2}{\varrho_{,}^2 + \varrho_{,,}^2} &= xy = \varrho^2 . \end{aligned} \qquad (2)$$

In diesen Werth lässt sich leicht der oben aus den Grössen

m, n, d berechnete von $\varrho_{\prime}$ einsetzen. Aus (2) erkennt man sofort, dass ϱ sowohl kleiner als $\varrho_{\prime}$ als auch $\varrho_{\prime\prime}$ sein muss. Die Grösse d lässt sich durch directe Messung ermitteln, dagegen hängt das Verhältniss $\left(\frac{n}{m}\right)$ von der Zeitdauer der geotropischen Wirkung und der Empfindlichkeit des derselben ausgesetzten Organs ab. Die Bestimmung dieses Werthes kann nur auf empirischem Wege geschehen.

Der Neigungswinkel, welchen die Ebene der resultirenden Krümmung gegen die Horizontale besitzt, ist gleich dem Winkel, welcher von ϱ und $\varrho_{\prime\prime}$ eingeschlossen wird und lässt sich demnach auf folgende Weise berechnen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{\varrho_{\prime\prime}}{\varrho_{\prime}}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{\varrho_{\prime\prime}}{\varrho_{\prime}}\right) \tag{3}$$

d. h. der Winkel α wird um so grösser, je kleiner der Werth für $\varrho_{\prime}$ ist.

Es bleibt nun noch übrig, die Lagenveränderung der früher nach unten gekehrten Längslinie, welche dieselbe nach Eintritt der geotropischen Krümmung erfahren hat, näher zu betrachten.

Wie ich schon in jener oben erwähnten kleinen Mittheilung nachgewiesen habe, tritt beim Stattfinden der geotropischen Krümmung in dem gegebenen Falle eine scheinbare antidrome Torsion auf, d. h. die früher nach unten gekehrte Längszone wandert dabei allmälig nach aussen. Es ist nun von Wichtigkeit, die Quantität dieser scheinbaren Torsion genauer zu bestimmen. Dies kann auf folgende Weise geschehen.

In Fig. 2 ist $ab = g$, die Seite eines der beiden Kegel, deren Basis die resultirende Krümmung bildet. Die Richtung von ab gibt demnach an, dass im Punkte b die frühere Unterseite noch nach unten gekehrt ist; im Punkte d dagegen kann die frühere Unterseite nicht mehr nach unten gerichtet sein, sondern sie hat eine scheinbare Drehung nach aussen erfahren. Der Winkel, welchen die beiden Seiten ab und ad des Kegels mit einander einschliessen, bildet eine Seite eines sphärischen Dreiecks, in welchem die beiden anderen Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt sind. In der körperlichen Ecke $abcd$ ist nämlich:

$$bac = cad = \alpha ,$$

wie aus der Gleichung (3) hervorgeht. Ferner wird die Lage des Punktes d durch den Winkel β bestimmt und dieser ist zugleich der Winkel, welchen die Ebenen jener beiden Seiten der Ecke mit einander einschliessen. Nennen wir den unbekannten Winkel x, so gilt nach einer bekannten Formel:

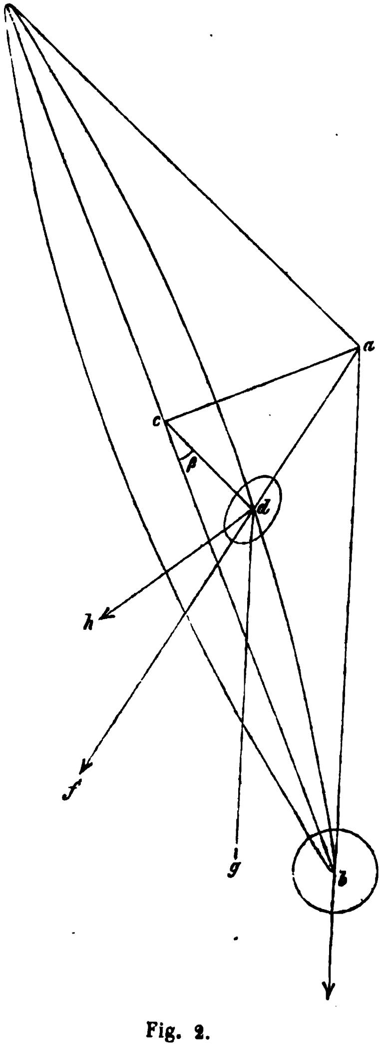


Fig. 2.

$$\cos x = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos\beta \quad (4)$$

oder anders ausgedrückt:

$$\sin\frac{x}{2} = \sin\alpha \sin\frac{\beta}{2} .$$

Der Winkel x ist aber nun streng genommen nicht derjenige, welcher die scheinbare Drehung der Unterseite für den Punkt d angibt, denn er liegt in einer Verticalebene; derjenige Winkel aber, welcher in der betreffenden Querschnittscheibe des Organes die Richtung der früheren mit der der jetzigen Unterseite bildet, lässt sich leicht auf Grund jenes Werthes von x berechnen.

In der körperlichen Ecke $dgfh$ (s. Fig. 2) stellt die Seite hdf den gesuchten Winkel dar; der Winkel, welchen die Seiten

hdf und *hdg* mit einander bilden, ist gleich einem Rechten, *fdg* ist gleich x und der Winkel zwischen *hdf* und *fdg* lässt sich aus dem oben betrachteten sphärischen Dreieck finden. Bezeichnen wir denselben mit A, so gilt

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cot\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha}.$$

Hiermit sind zwei Stücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks gegeben, nämlich die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite und einer der anliegenden Winkel:

$$c = \operatorname{arc}(\cos = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\beta)$$

$$A = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{\cot\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha}\right)$$

$$C = R.$$

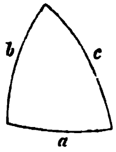


Fig. 3.

Aus diesen Werthen berechnet sich die Seite b, welche den gesuchten Winkel *hdf* darstellt, folgendermassen:

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin 2\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2} + \cos 2\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin 2\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}}{1 - 2\sin^2\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}} \quad . . (5)$$

Wird $\beta = 90^0$, d. h. ist der zustandekommende Bogen ein Quadrant, so ist

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$
$$b = \alpha.$$

Wird $\beta = 180^0$, so ist

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$$
$$b = 2\alpha.$$

Ist $\alpha = 45^0$, so ist überhaupt 90^0 das Maximum der scheinbaren Torsion, denn b wird in diesem Falle gleich 90^0. Ist α kleiner als 45^0, d. h. ist $\varrho_{\prime\prime} < \varrho_\prime$ [vergl. (3)], so kann die frühere Unterseite niemals vollständig nach aussen gerichtet sein; ist dagegen α grösser als 45^0 bezw. $\varrho_{\prime\prime} > \varrho_\prime$, so wird der

Werth von b kleiner als 180° und grösser als 90° sein, denn der erstere Werth könnte nur dann erreicht werden, wenn $\alpha = 90°$ würde, dies wäre aber nur möglich, wenn $\varrho_{\prime\prime} = \infty$ würde, was nach den obigen Voraussetzungen nicht eintreten kann.

Das Resultat der vorstehenden theoretischen Auseinandersetzungen lässt sich unter Berücksichtigung der pflanzenphysiologischen Vorgänge, die dabei in Betracht kommen, folgendermassen zusammenfassen: Wird ein bogenförmig gekrümmtes, negativ geotropisches Organ in horizontale Lage gebracht, so wird die nunmehr hinzukommende geotropische Krümmung sich in der Weise gestalten, dass aus der zuerst vorhandenen wiederum eine kreisförmige Krümmung entsteht, deren Ebene aber gegen die frühere Krümmungsebene unter einem gewissen Winkel geneigt ist. Dieser Neigungswinkel ist aber stets kleiner als 90°.

Der Radius der neuen Krümmung lässt sich berechnen, wenn man den Radius der zuerst vorhandenen Krümmung und den der geotropischen Krümmung kennt; der letztere kann nicht direct ermittelt werden, sondern muss durch besondere Versuche bestimmt werden. Aus dem Verhältniss der beiden Radien ergiebt sich der Neigungswinkel der Krümmungsebene. Die scheinbaren Torsionen, welche dabei auftreten, lassen sich aus Gleichung [5] berechnen.

Ein Beispiel möge das Gesagte erklären. Da uns bei der Frage nach der Mechanik des Windens heliotropische Krümmungen, die in ähnlicher Weise wirken würden, nicht weiter interessiren, so mögen dieselben hier ganz ausser Acht gelassen werden, und da bei windenden Pflanzen ausser den oben besprochenen Bewegungen noch andere hinzutreten, so will ich als Beispiel zunächst eine Keimpflanze von Helianthus annus wählen, deren hypocotyles Glied sich zu derartigen Versuchen sehr gut eignet.

Lässt man einen solchen Keimling eine Zeit lang horizontal liegen, bis er eine schwache Krümmung zeigt und dreht ihn dann um 90° so, dass nunmehr die Krümmungsebene horizontal liegt, so kommt nach derselben Zeitdauer des Versuches eine geotropische Krümmung zu Stande, deren Radius dem der zuerst vorhandenen gleich sein muss.

Hat man nun durch andere Versuche bestimmt, wie stark die Krümmung an geraden Pflanzen in derselben Zeit wird, so

kann man nunmehr sämmtliche Veränderungen nach obigen Formeln berechnen und zwar unter folgenden Voraussetzungen: Nehmen wir an, dass in einer Strecke von etwa 20 mm das Längenwachsthum sich unter ziemlich gleichen Verhältnissen während der Dauer des Versuches abspielt, und dass zur Vollendung der inducirten Krümmung die Pflanzen direct auf den Rotationsapparat gebracht werden, so haben wir es auf der betreffenden am lebhaftesten wachsenden Strecke von 20 mm Länge mit Krümmungen zu thun, die man ohne grossen Fehler als kreisförmige bezeichnen kann. Ist das Verhältniss zwischen der Länge der Ober- und Unterseite bei der einfachen Krümmung nach einer bestimmten Zeit etwa wie 5 : 6 und der Durchmesser des Organs 2 mm, so wäre der gesuchte Radius [vergl. (1)] gleich 11 mm, daraus berechnet sich der Radius der resultirenden Krümmung — aus (2) — auf fast 8 mm. Der Neigungswinkel der neuen Krümmung gegen die Horizontale würde, da hierbei die Radien $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,}$ gleich sind, 45° betragen. Die scheinbare Drehung würde für einen Quadranten gleich 45° sein, d. h. es würde die frühere Unterseite an dem um 90° von dem Anfang entfernt liegenden Punkte der Krümmung nach aussen und unten gerichtet sein.

Wären jedoch die beiden Radien $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,}$ nicht gleich, wäre also etwa die zweite Krümmung eine stärkere als die zuerst vorhandene, so würde sich die Sache folgendermassen gestalten: Nehmen wir an, $\varrho_{,}$ sei gleich 11 mm, $\varrho_{,,}$ gleich 9 mm, so würde der Werth für den Radius der resultirenden Krümmung gleich $\frac{(9)^2 \cdot (11)^2}{(9)^2 + (11)^2} = 7{,}3$ sein.

Der Neigungswinkel α wäre gleich ungefähr 51° und die scheinbare Drehung für folgende Werthe von β: 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80° ungefähr: 0° 30′, 1° 45′, 4°, 7° 30′, 12° 30′, 19°, 28°, 39°; für $\beta = 90°$ wäre dieselbe gleich 51°. Wenn auch die ganze Berechnung für den Versuch nur ein theoretisches Interesse gewährt, so giebt sie doch immerhin ein Bild davon, in welcher Weise die geotropischen Krümmungen unter gewissen Umständen die Nutationsbewegungen eines windenden Sprossendes modificiren können und es mögen aus diesem Grunde die rein mathematischen Darlegungen im Vorhergehenden, sowie die noch folgenden, die ebenfalls zur exac-

ten Behandlung der uns hier beschäftigenden Probleme unumgänglich sind, ihre Entschuldigung finden.

Wir haben bisher nur den speciellen Fall betrachtet, in welchem die Krümmungsebene des Organs senkrecht zur Richtung der wirkenden Kraft lag, es erübrigt nun noch auch diejenigen Fälle zu behandeln, wo die Krümmungsebene schief zur Verticalen oder zur Richtung der einfallenden Lichtstrahlen orientirt ist. Es werden sich dabei die Verhältnisse wesentlich anders gestalten und es wird aus bestimmten, gleich näher zu erörternden Gründen eine solche Vereinfachung des Problems, wie wir sie in ersterem Falle vornehmen konnten, nicht möglich sein und deshalb auch eine exacte Behandlung der Frage unterbleiben müssen. Gehen wir von der resultirenden Krümmung aus, die durch die Einwirkung des negativen Geotropismus auf ein in horizontaler Ebene bogenförmig gekrümmtes Organ eintritt, so sehen wir sofort, dass die jetzt nach unten gekehrte Partie eine Curve bildet, welche ähnlich wie eine homodrome Schraubenlinie um das betreffende Organ herumgeht. Dasselbe ist natürlich auch der Fall, wenn die Krümmung gleich von Anfang an so liegt, dass ihre Ebene schief zur Verticalen steht. Je nach dem Neigungswinkel dieser Ebene gegen die Horizontale wird die nach unten gekehrte Partie eine mehr oder weniger steile um das Organ aufsteigende Curve bilden; ist z. B. der Neigungswinkel gleich 45°, so wird, wenn die Krümmung einen Halbkreis darstellt, jene homodrom verlaufende Curve gerade den vierten Theil eines Schraubenganges beschreiben, denn diejenige Längszone des Organs, welche an dem unteren Ende des Halbkreises nach unten gekehrt ist, hat am oberen Ende desselben genau die Richtung nach aussen. Allgemein lässt sich der Verlauf dieser Curve aus dem oben berechneten Werthe für b [siehe Gleichung (5)] ermitteln. Von weiterem Interesse ist für uns nur der Winkel, welchen die Tangente an den einzelnen Punkten der Curve mit der Horizontalen bildet, denn je nach der Neigung der einzelnen Partieen gegen den Horizont wird auch die Stärke der geotropischen Krümmung eine verschiedene sein. Dieser Winkel schwankt, wie eine einfache Betrachtung zeigt, zwischen α (Neigungswinkel der Krümmungsebene) und 90°. Denn an dem obersten und untersten Punkte der Curve liegt die Tangente horizontal, und in der Mitte ist dieselbe um α gegen die Horizontale geneigt. Für jeden Punkt des Kreises lässt

sich dieser Winkel auf folgende Weise berechnen. Der gesuchte Winkel bildet eine Seite eines sphärischen Dreiecks, von welchem folgende Stücke gegeben sind, bezw. leicht berechnet werden können:

$$a,\ b,\ C \text{ (s. Fig. 4)}.$$

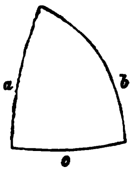


Fig. 4.

In einer körperlichen Ecke, deren eine Kante von dem nach dem betreffenden Punkte gehenden Radius, deren zweite von der in diesem Punkte an den Kreis gezogenen Tangente und deren dritte von der Verticalen gebildet wird, ist diejenige Seite, welche von Radius und Tangente eingeschlossen wird (b in Fig. 4), gleich 90°, für die andere Seite, die vom Radius und der Verticalen begrenzt wird (a in Fig. 4), gilt die Gleichung:

$$\cos a = -\sin \alpha \cos \beta.\ ^{*})$$

Der Winkel (C), welchen diese Seiten mit einander einschliessen, lässt sich auf folgende Weise berechnen:

$$\operatorname{tg} C = -\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sin \beta}.\ ^{*})$$

Hieraus ergiebt sich für die Seite c die Gleichung

$$\cos c = \sin \alpha \sin \beta.$$

Nun ist aber c der Winkel, welchen die Tangente mit der Verticalen bildet. Nennen wir den Winkel, welchen dieselbe mit der Horizontalen bildet, γ, so gilt natürlich:

$$\sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta.$$

Hieraus ergibt sich für $\beta = 0°$

$$\sin \gamma = 0$$
$$\gamma = 0°;$$

für $\beta = 90°$

$$\sin \gamma = \sin \alpha$$
$$\gamma = \alpha;$$

für $\beta = 180°$

$$\sin \gamma = 0$$
$$\gamma = 0°.$$

---

*) Genauere Ausführung dieser Berechnungen siehe im Anhange.

Hiermit ist nun zwar eine exacte Bestimmung des Winkels gegeben, welchen die jeweilige Tangente mit der Horizontalen bildet, aber eine genaue Angabe darüber, wie bei der verschiedenen Neigung der einzelnen Partieen gegen den Horizont die Wirkung der Schwerkraft sich gestaltet, ist vorerst nicht möglich. Es ist jedoch so viel von vornherein klar und auch durch frühere Angaben bestätigt, dass bei einem orthotropen Organ die Schwerkraft dann am stärksten wirken wird, wenn dessen Längsachse horizontal liegt, dass ferner bei schiefer Lage derselben zum Horizonte eine schwächere, bei verticaler Stellung überhaupt keine oder nur eine sehr geringe hier zu vernachlässigende Wirkung stattfindet*). Daraus geht hervor, dass in dem vorliegenden Falle die stärkste Krümmung an denjenigen Stellen eintreten wird, an welchen die Tangente horizontal liegt, die schwächste dagegen an dem Punkte, an welchem der Neigungswinkel der Tangente mit dem der Krümmungsebene zusammenfällt; es wird also der Radius der geotropischen Krümmung im ersten Quadranten zu-, im zweiten abnehmen. Da wir jedoch den Verlauf dieser Zu- und Abnahme rein mathematisch nicht bestimmen können, so ist auch eine *exacte* Betrachtung der dabei eintretenden Veränderungen ausgeschlossen.

Man wird dem wahren Sachverhalt ziemlich nahe kommen, wenn man annimmt, dass diese Zu- bezw. Abnahme der geotropischen Wirkung in einer gewissen Zeiteinheit proportional dem Cosinus des Neigungswinkels erfolge; aber ich stimme Sachs**) vollkommen bei, wenn er betreffs dieser Frage sich folgendermassen äussert: »Damit ist jedoch nicht gesagt, dass die krümmende Wirkung an einem gegebenen geotropischen Organe einfach proportional sei dem Werth G sin γ;***) vielmehr könnte die krümmende Wirkung rascher oder langsamer abnehmen als dieser Werth.«

Es wird überhaupt schwer sein, derartige Veränderungen,

*) Vergl. Elfving, Beiträge zur Kenntniss der physiol. Einwirkung der Schwerkraft auf die Pflanzen, Acta Soc. Scient. Fenn. T. XII und Schwarz, Einfluss der Schwerkraft auf das Längenwachsthum der Pflanzen, Untersuehungen des Bot. Inst. zu Tübingen I. Bd. Heft 1.

**) Arbeiten d. Bot. Instituts in Würzburg II. Bd. S. 240.

***) γ bedeutet hier den Winkel, welchen das betreffende Organ mit der Verticalen macht.

die mit der Lage zum Horizont bezw. zu der Richtung der einfallenden Lichtstrahlen verbunden sind, durch eine mathematische Formel auszudrücken, denn die individuellen Schwankungen, die dabei jedenfalls in Betracht zu ziehen wären, müssten jede allgemeine Formel unsicher machen.

Uebrigens lässt sich für unseren Fall immerhin das mit Sicherheit behaupten, dass sich bei kurzer Einwirkung der Schwerkraft folgende Veränderungen an dem vorhandenen Kreisbogen vollziehen werden. Nehmen wir an, die Krümmung stelle einen Halbkeis dar, dessen begrenzende Radien in der zur Krümmungsebene senkrechten Verticalebene liegen, so werden in diesem Falle an den oberen und unteren Partieen schwache Krümmungen eintreten, während die mittleren Partieen fast unverändert bleiben. Es entsteht in Folge dessen eine complicirte Raumcurve, deren mathematische Discussion aus den oben angegebenen Gründen unterbleiben muss. Man kann sich jedoch leicht eine räumliche Vorstellung dieser Curve verschaffen, wenn man an einem bogenförmigen Bleiröhrchen die geschilderten Krümmungen ausführt. Es gelangt dabei der mittlere Theil in eine fast verticale Stellung und die obere Partie wird in der Weise verändert, dass die Concavität der Krümmung annähernd nach oben zu liegen kommt. Zugleich wird aber die Entfernung der beiden Endpunkte des früheren Halbkreises in der Horizontalprojection eine geringere, so dass also, wenn zwischen denselben eine Stütze sich befände, die obere Partie an jene angedrückt werden würde, vorausgesetzt, dass der untere Endpunkt der Krümmung an derselben Stelle wie früher verbleibt.

In der schon mehrfach erwähnten vorläufigen Mittheilung in den Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. habe ich darauf hingewiesen, dass mit dem eben angedeuteten Verlauf der Krümmung auch zugleich eine wirkliche Torsion und zwar eine *homodrome* verbunden sein *könne*, und zwar deshalb, weil die am stärksten wachsende Zone ähnlich wie eine homodrom verlaufende Schraubenlinie um das betreffende Organ herumgehe. Ich habe damals der Einfachheit halber den Ausdruck »homodrome Schraubenlinie« gewählt, doch ist natürlich, wie aus den obigen Erörterungen sofort hervorgeht, jener Ausdruck nicht ganz richtig, denn es bildet diese Partie in der That eine andere Curve, deren genaue Discussion zwar möglich ist, aber keine weitere

Bedeutung hat, da exacte Folgerungen daraus doch nicht gewonnen werden können.

Der Betrag dieser homodromen Torsion, wenn eine solche überhaupt eintritt, muss jedoch naturgemäss ein so geringer sein, dass er für unsere Betrachtungen von gar keiner Bedeutung ist; denn die wesentlichen Veränderungen, die durch den Geotropismus hierbei hervorgerufen werden, sind Krümmungen in verschiedenen Ebenen. Auch habe ich schon im I. Theil näher dargelegt, dass jene *möglichen* Torsionen durchaus nichts zu thun haben mit den starken homodromen Torsionen, die stets an frei nutirenden Enden windender Pflanzen auftreten. (Vergl. oben S. 181 d. Jahrgangs 1884, Sitzung vom Nov.)

Es dürfte nicht überflüssig erscheinen, die im Vorstehenden ausführlich wiedergegebenen theoretischen Betrachtungen kurz zu recapituliren.

Zunächst wurden diejenigen Veränderungen eines kreisförmig gekrümmten Organs erörtert, welche eintreten, wenn die Krümmungsebene horizontal liegt; es wurde dabei gezeigt, dass in Folge des negativen Geotropismus wiederum eine kreisförmige Krümmung entstehen müsse, deren Radius kleiner und deren Ebene unter einem spitzen Winkel zur Horizontalen geneigt ist. Es wurden ferner die dabei auftretenden Verschiebungen der einzelnen Querschnittscheiben, bezw. die scheinbare antidrome Torsion gegen den Horizont genau berechnet. Hiermit war jedoch nur eine Klarlegung derjenigen Veränderungen gegeben, welche nach einer gewissen Zeit in der Lage des Organs eintraten. Sobald jene Veränderungen vollzogen waren, wurde das nun vorliegende Problem — die weitere Einwirkung der Schwerkraft in demselben Sinne vorausgesetzt — ein wesentlich anderes. Es handelte sich jetzt nicht mehr um ein in horizontaler Ebene gekrümmtes Organ, sondern um eines, dessen Krümmung zwar gleichfalls eine kreisförmige, dessen Krümmungsebene aber gegen den Horizont geneigt war. Die Betrachtung der nunmehr eintretenden Veränderungen konnte allerdings aus bestimmten Gründen nicht mit derselben mathematischen Genauigkeit wie die vorigen ausgeführt werden, immerhin aber wurde gezeigt, dass unter diesen Verhältnissen die Längsachse des Organs eine complicirte Raumcurve bilde,

bei welcher in der Horizontalprojection die Entfernung der Endpunkte des ursprünglich vorhandenen Halbkreises eine geringere werde.

Es erübrigt nun noch, ähnliche Untersuchungen anzustellen für die beiden Fälle, wo die ursprünglich vorhandene Krümmung eine beliebige ebene Curve oder eine Schraubenlinie darstellt. Dies möge im folgenden Paragraphen geschehen.

§ 2.

Wirkung des Geotropismus an gekrümmten Organen, deren Längsachsen eine beliebige ebene Curve oder eine Schraubenlinie bilden.

Nach den im § 1 gegebenen theoretischen Erörterungen lässt sich ungefähr eine Vorstellung gewinnen, in welcher Weise die Lage eines in horizontaler Ebene kreisförmig gekrümmten wachsthumsfähigen Internodiums in Folge der hinzukommenden geotropischen Krümmungen verändert wird. Es ist nun selbstverständlich und im Vorhergehenden auch schon mehrfach angedeutet, dass solche rein theoretische Erwägungen nicht sofort auf die Vorgänge, die sich beim Umwinden einer Stütze abspielen, anwenden lassen; denn die gewonnenen Resultate beruhen auf ganz bestimmten Voraussetzungen, welche in dieser mathematischen Form niemals genau den thatsächlichen Verhältnissen in der Pflanze entsprechen. Dieser Umstand, welcher immer eintritt, wenn man physiologische Probleme soweit vereinfacht, dass man einer Lösung derselben auf mathematischem Wege näher zu kommen vermag, darf zwar *niemals* Veranlassung sein, die auf jenem Wege gewonnenen Resultate von vornherein als werthlos zu betrachten, wohl aber muss er *stets* die Veranlassung geben, weitere Untersuchungen anzustellen über *die* Frage. Sind die in der Pflanze gegebenen, von jenen Voraussetzungen abweichenden, Verhältnisse derart, dass sie eine *wesentliche* Aenderung der durch exacte Betrachtungen erreichten Resultate herbeiführen können? Müsste man diese Frage in unserem speciellen Falle bejahen, dann wären allerdings die im § 1 gegebenen Berechnungen nichts als ein unnützes Spiel mit mathematischen Ausdrücken und ohne jede Bedeutung für die Erklärung der beim Winden stattfindenden Bewegungen. Es ist

also vor Allem nachzuweisen, dass die in der Pflanze gegebenen Abweichungen in der That keine wesentliche Veränderung jener theoretischen Erwägungen bedingen. Was als das *Wesentliche* der letzteren zu betrachten ist, habe ich am Schlusse des vorigen Paragraphen zusammengestellt.

Zunächst ist klar, dass die zuerst vorhandene Krümmung wohl niemals genau einen Kreisbogen, sondern eine andere ebene Curve oder auch eine Schraubenlinie von sehr geringer Neigung oder schliesslich irgend eine andere der letzteren ähnliche Raumcurve darstellen wird. In der Mehrzahl der Fälle aber wird die Abweichung vom Kreise eine so geringe sein, dass die oben gefundenen Werthe für den Radius der resultirenden Krümmung, für den Neigungswinkel der Krümmungsebene und für die scheinbare Drehung ohne grossen Fehler ihre Gültigkeit behalten werden.

Ganz allgemein betrachtet wird für jede ebene Curve, deren Krümmungsradius nicht constant ist, Folgendes gelten. In der Gleichung:

$$\frac{\varrho^2 \varrho_,^2}{\varrho^2 + \varrho_,^2} = \varrho_{,,}^2 \qquad (2)$$

gibt ϱ das Maass der hinzukommenden geotropischen Krümmung an, $\varrho_,$ dagegen das Maass der vorhandenen Krümmung. Ist nun die letztere ein Kreis, so bleibt natürlich $\varrho_,$ constant, ist dieselbe aber eine andere ebene Curve, so wird $\varrho_,$ variabel, sofern es den Werth des Krümmungsradius für die einzelnen Punkte der Curve bezeichnet. Es ist nun erlaubt, dass man jedes kleinste Bogenelement derselben als einen Kreisbogen betrachtet, dessen Radius gleich dem zugehörigen Krümmungsradius ist, also bei den successiven Bogenelementen entweder wächst oder abnimmt. Lässt man in jener Gleichung $\varrho_,$ sich verändern, so wird sich auch der Werth für $\varrho_{,,}$ verändern und zwar gleichsinnig, d. h. wenn $\varrho_,$ abnimmt, wird auch $\varrho_{,,}$ kleiner werden, und umgekehrt. Ferner geht aus der oben gefundenenen Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varrho_,}{\varrho} \qquad (3)$$

hervor, dass die Krümmungsebenen zweier successiver Bogenelemente der resultirenden Krümmung verschiedene Winkel mit der Horizontalebene bilden, denn bei constantem ϱ wird

mit wachsenden $\varrho,$ der Winkel α grösser, im umgekehrten Falle kleiner werden. Es muss demnach die entstehende Curve eine Raumcurve sein, denn je zwei successive Krümmungsebenen fallen nicht zusammen, sondern bilden einen Winkel miteinander.

Während also der Werth von $\varrho_{,,}$, welcher sich für jeden Punkt einer beliebigen ebenen Curve leicht berechnen lässt, *das Maass der ersten Krümmung* der resultirenden Raumcurve darstellt, würde jener Winkel, den die Krümmungsebenen zweier aufeinander folgender Bogenelemente mit einander einschliessen, *das Maass der zweiten Krümmung* abgeben, und aus diesen beiden Werthen könnte die Gleichung der Curve selbst erhalten werden.

Es würde nun vollkommen überflüssig sein, diese Berechnungen, deren Gang im Vorstehenden allgemein angedeutet wurde, hier wirklich auszuführen, denn wir würden dadurch nichts wesentlich Anderes erfahren, als was sich durch folgende einfache Ueberlegungen ergibt.

Aus der Gleichung (2) geht sofort hervor, dass $\varrho_{,,}$ stets kleiner als $\varrho,$ sein muss, dass also die resultirende Curve für jeden Punkt eine stärkere Krümmung besitzt als die zuerst vorhandene; aus Gleichung (3) ergibt sich, was schon oben erwähnt wurde, dass nämlich der Neigungswinkel der einzelnen Bogenelemente der resultirenden Curve gegen den Horizont mit zunehmendem $\varrho,$ wachsen, mit abnehmendem $\varrho,$ kleiner werden wird; da aber die Verschiebung je zweier successiver Bogenelemente gegen den Horizont, mit anderen Worten: die scheinbare antidrome Torsion, von der Grösse des Winkels α abhängig ist, so muss auch diese sich gleichsinnig mit dem Werthe von α bezw. von $\varrho,$ verändern.

Aus dem Gesagten ergibt sich für unsere Frage das wichtige Resultat, dass bei jeder beliebigen ebenen Curve unter den gegebenen Verhältnissen im *Wesentlichen* ganz ähnliche Veränderungen eintreten wie beim Kreise, nur entstehen dabei nicht wiederum ebene Curven, sondern solche von doppelter Krümmung. Vielleicht dürfte ein Beispiel dazu dienen, dieses Resultat etwas anschaulicher zu machen.

Die Abweichungen vom Kreise sind bei nutirenden Sprossenden, die durch irgend welche Umstände in horizontale Lage gelangen, gewöhnlich derart, dass durch Verschiedenheit der

Wachsthumsintensität eine spiralige Krümmung entsteht. Nehmen wir also an, die gegebene Krümmung sei eine beliebige Spirale und deren Gleichung:

$$r = f(\omega) \;,$$

so lässt sich daraus, in hier nicht weiter zu erörternder Weise. für jeden Punkt der Curve der Werth für ϱ_t berechnen. Es liegt nun in der Natur der Spiralen, dass der Werth des Krümmungsradius vom Anfang der Spirale an entweder stetig zu- oder abnimmt, damit ist nothwendigerweise verbunden, dass bei hinzukommender geotropischer Krümmung sowohl der Winkel α stetig zu- oder abnimmt, als auch die Quantität der scheinbaren antidromen Torsion eines Organs, dessen Längsachse jene Curve bildet, im gleichen Sinne wie α sich verändert.

Man kann sich die Bewegungen, die dabei ausgeführt werden, auf folgende Weise an einem Modell klar machen: Man zeichnet auf Papier irgend eine Spirale, etwa die sog. Archimedische Spirale, die sich leicht construiren lässt, nebst der dazu gehörenden Evolute, sodann schneidet man das von beiden Curven begrenzte Stück Papier aus und rollt dasselbe in der Weise zusammen, dass die Biegung immer um den Krümmungsradius als Achse und zwar um einen constanten Winkel erfolgt. Man erhält dadurch eine Fläche, die von zwei Curven begrenzt wird: die eine ist jene Evolute, die andere stellt diejenige Raumcurve dar, welche aus der früher vorhandenen Spirale durch die hinzugekommene mechanische Krümmung entstanden ist. Man sieht an einem solchen Modell sofort, dass die Krümmung der resultirenden Curve in allen Theilen eine stärkere ist, und dass sie allmälig immer steiler aufsteigt, d. h. dass die Neigungswinkel, die ihre successiven Krümmungsebenen mit dem Horizont bilden, immer mehr sich einem Rechten nähern.

Nachdem im Vorstehenden gezeigt worden ist, dass bei anderen ebenen Curven, die hier in Betracht kommen konnten, *wesentliche* Abweichungen von den früher unter Zugrundelegung der kreisförmigen Krümmung erhaltenen Resultaten nicht eintreten, möge noch kurz der Fall erörtert werden, wo nicht eine ebene Curve, sondern eine Schraubenlinie vorliegt. Es kann aus gleich zu erörternden Gründen hier nur der specielle

Fall Interesse gewähren, in welchem die Achse der Schraubenlinie vertical steht. Es ist nämlich nur unter dieser letzteren Voraussetzung eine exacte Betrachtung möglich, denn nur so bildet jeder Theil der Schraubenlinie mit der Horizontalen denselben Winkel und es wird deshalb die Wirkung des Geotropismus auch in allen Theilen eine gleichmässige sein; allerdings nur unter der Voraussetzung, dass die Empfindlichkeit gegen die Einwirkung der Schwerkraft auch überall die gleiche ist.

Einige einfache Ueberlegungen zeigen, welcher Art die Veränderungen sind, die unter diesen Umständen eintreten müssen. Zunächst ist klar, dass die resultirende Curve wiederum eine Schraubenlinie sein wird, denn die Constanz der beiden Krümmungsradien wird durch die Einwirkung der Schwerkraft nicht geändert. Wohl aber werden diese beiden Radien kleiner werden, denn die geotropische Krümmung bedingt zunächst, dass der Radius der zweiten Krümmung kleiner wird, damit ist aber nothwendigerweise auch ein Kleinerwerden des Radius der ersten Krümmung verbunden.

Die resultirende Schraubenlinie wird demnach engere Windungen haben als die zuerst vorhandene. Ausserdem wird die Achse derselben schief gegen den Horizont geneigt sein und der Cylinder, auf welchem sie verläuft, wird einen kleineren Radius besitzen als derjenige, auf welchem die ursprüngliche Curve verlief.

Ist die Schraubenlinie von sehr geringer Neigung, so kann man ohne grossen Fehler die oben für den Kreis und andere ebene Curven gegebenen Betrachtungen anwenden. Hat man es dagegen mit den obersten noch wachsthumsfähigen Internodien zu thun, welche bereits Schraubenwindungen um die Stütze gebildet haben, so erfordern die Verhältnisse eine besondere Betrachtung. Es würde hier zu weit führen, wollte ich in ähnlicher Weise, wie dies für den Kreis geschehen, die Berechnungen für die Schraubenlinie allgemein durchführen; es mögen deshalb obige Andeutungen über die Veränderungen der Krümmungsradien und die Lage des Cylinders genügen. Man kann sich von deren Richtigkeit sehr leicht an einem Modell aus Bleidraht oder auch an einer windenden Pflanze direct überzeugen, wenn man die obersten Windungen von der Stütze

sorgfältig ablöst. Man bemerkt dann sofort, dass jene Veränderungen eintreten.

Für die Mechanik des Windens ist dieser letztere Fall von geringerer Bedeutung, denn es handelt sich dabei um fast fertige Windungen.

Hiermit seien die theoretischen Erörterungen über den Einfluss des negativen Geotropismus auf bereits gekrümmte Organe abgeschlossen.

Allerdings konnten — wie dies bei einer exacten Behandlung der vorliegenden Frage nicht anders möglich war — nur die einfachsten Fälle Berücksichtigung finden, immerhin aber glaube ich, dass die im Vorstehenden gewonnenen Resultate es ermöglichen, auch von den complicirteren Bewegungen, wie sie ein windender Spross ausführt, eine klarere Vorstellung zu gewinnen, als dies durch die blosse Beobachtung und Beschreibung jener Vorgänge erreicht werden konnte. Denn es ist zweifellos, dass ein richtiges Verständniss der Nutationsbewegungen nur dann möglich wird, wenn die verschiedenen Torsionserscheinungen und vor Allem ihre rein geometrischen Beziehungen zu den auftretenden Krümmungen in exacter Weise betrachtet werden. Wie nothwendig eine solche Untersuchung ist, das zeigen am besten die kritischen Bemerkungen im I. Theile der vorliegenden Arbeit; denn wir sahen dort, dass gerade über diese Fragen die merkwürdigsten Anschauungen von den verschiedenen Forschern, die sich mit dem Winden der Pflanzen beschäftigten, geäussert worden sind. Nur Schwendener hat, wie in manchen anderen Dingen, auch hier zuerst eine solche exacte Betrachtungsweise angebahnt; er hat jedoch nur diejenigen Torsionserscheinungen erörtert, welche mit der schraubenlinigen Krümmung eines cylindrischen Organs im Zusammenhange stehen und diejenigen, welche durch den Widerstand, den die Stütze den Bewegungen des Sprosses entgegensetzt, bedingt werden. Die Bedeutung des Geotropismus hat Schwendener zwar im Allgemeinen richtig erkannt, aber der Versuch, welcher seiner Anschauung nach jenen Einfluss beweisen sollte, hat durch die Untersuchungen Baranetzky's seine Beweiskraft verloren. Es musste demnach auf einem anderen Wege der Nachweis geführt werden, dass der negative Geotropismus ein integrirender Factor bei dem Zustandekommen von Schrauben-

windungen sei. Dass durch den Einfluss der Schwerkraft die Nutationsbewegungen unter gewissen Umständen bedeutend modificirt werden können, das war von vornherein klar und auch Baranetzky erkannte dies bei seinen Versuchen sofort; aber er ging zu weit, wenn er nun auf Grund dieser Versuche die Annahme machte, dass bei horizontaler Lage des Sprosses nicht mehr die normale Circumnutation stattfinde, sondern an Stelle dieser die sog. »*transversale Krümmung*« eintrete. Hätte sich Baranetzky für diesen speciellen Fall das Zusammenwirken der geotropischen und Nutationskrümmungen vollständig klar gemacht, so würde er nicht genöthigt gewesen sein, jene eigenthümliche Krümmung als etwas Besonderes hinzustellen.

Das, was er »transversale Krümmung« nennt, bedeutet in der That nichts Anderes, als die aus dem Zusammenwirken von Geotropismus und Nutation resultirenden Bewegungen. Um den Beweis für diese Behauptung zu erbringen, waren zunächst die oben gegebenen mathematischen Betrachtungen unbedingt nothwendig. Es wird nun weiterhin zu erörtern sein, in welcher Weise diese resultirenden Bewegungen in der Pflanze sich darstellen und welche Rolle sie beim Umwinden einer Stütze spielen.

§ 3.

Zusammenwirken von Nutation und negativem Geotropismus.

Wenn das nutirende Sprossende aufrecht steht, so werden die Bewegungen in der allbekannten Weise ausgeführt. Die Spitze beschreibt im Verlaufe eines Nutationsumganges annähernd einen Kreis, dessen Mittelpunkt in die Verlängerung der Längsachse des verticalstehenden Stengels fällt. Hierbei bleibt also jede Längszone ungefähr gleich lange nach unten gekehrt, vorausgesetzt, dass die Nutation gleichmässig verlaufe; es kann deshalb eine Veränderung der Bewegungen durch den negativen Geotropismus nicht herbeigeführt werden; denn die Wirkungen, die auf jede Längszone durch den letzteren gleichmässig ausgeübt werden, müssen sich gegenseitig aufheben.

Ganz anders wird sich dagegen die Sache verhalten, wenn die Bewegungen der obersten Partieen nicht um eine verticale, sondern um eine horizontale oder gegen den Horizont geneigte

Achse erfolgen. Hierbei kann die Wirkung des negativen Geotropismus nicht auf allen Längszonen eine gleichmässige sein; es müssen deshalb zu den Nutationskrümmungen noch geotropische hinzukommen. Je nach der Lage jener Achse werden die letzteren jedoch verschieden sein. Nehmen wir zunächst den einfachsten Fall, nämlich denjenigen, in welchem die Längsachse des Stengels horizontal liegt.

Bringt man ein nutirendes Sprossende, das bisher aufrecht stand, also symmetrische Nutationsbewegungen ausführte, in horizontale Lage, so ist nun zunächst nicht ganz gleichgültig, welche Stellung die augenblickliche Nutationskrümmung gegen den Horizont einnimmt.

Es sind demnach mehrere Möglichkeiten zu berücksichtigen. Zunächst möge der specielle Fall betrachtet werden, in welchem die Krümmungsebene vertical steht und die Concavität der Krümmung nach oben gerichtet ist. Wird in dieser Lage das nutirende Sprossende an einem nicht zu weit von der Spitze entfernt liegenden Punkte in irgend einer Weise befestigt, so dass die Bewegungen der weiter rückwärts liegenden Partie des Stengels keinen Einfluss auf die Lagenveränderungen der freien Internodien ausüben können und das Eigengewicht der letzteren nicht gerade störend einwirken kann, so lassen sich bei lebhaft wachsenden Pflanzen während eines Nutationsumganges folgende Bewegungen beobachten.

Es möge bei der Beschreibung derselben gestattet sein, jeden $\frac{1}{4}$ Umlauf der Nutation, also die Zeit, in welcher das stärkere Ausdehnungsbestreben um 90° fortwandert, als eine *Phase* der Nutation zu bezeichnen. Baranetzky hat diese Bezeichnung ebenfalls gebraucht und es dient dieselbe jedenfalls dazu, die Darstellung zu erleichtern. Geht man von jener Stellung als Anfangspunkt aus, so wird nach Verlauf der ersten Phase eine antidrome Krümmung eintreten. Da aber während dieser Zeit von etwa $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4}$ Stunde in der dem Befestigungspunkte am nächsten liegenden Partie (*a*—*b* siehe nebenstehende Figur 5) dieselbe Längszone nach unten gekehrt bleibt, so wird bereits während dieser ersten Nutationsphase in jener Partie eine schwache geotropische Krümmung wenigstens inducirt werden. In der nun folgenden zweiten Phase wandert allmälig das stärkere Ausdehnungsbestreben auf die Oberseite und es würde dadurch eine Krümmung hervorgerufen werden, deren Con-

cavität nach unten gekehrt ist. Diese Krümmung müsste nach Ablauf der zweiten Nutationsphase auftreten. Nun ist aber bereits während der ersten Phase in der Strecke *a—b* eine geotropische Krümmung inducirt worden und diese Strecke ist auch während der zweiten Phase annähernd in derselben Lage geblieben, wenigstens insofern, als fast immer dieselbe Längszone nach unten gerichtet war; es muss deshalb nunmehr bereits eine ziemlich bedeutende negativ geotropische Krümmung sich bemerkbar machen. Dieselbe findet aber in entgegengesetztem Sinne statt wie die Nutationskrümmung, es müssen demnach die beiden Krümmungen sich entweder gegenseitig aufheben oder eine die andere überwiegen. Das bis jetzt Gesagte besieht sich jedoch nur auf die Partie *a—b*. Betrachtet man auch die Bewegungen, welche die Partieen *b—c* und *c—d* während der ersten beiden Phasen ausführen, so ergibt sich, dass die erstere (*b—c*) im Anfange des Versuchs in jedem ihrer Punkte einen geringen Winkel mit der Verticalen bildet, der in einem Punkte sogar gleich 0° ist. Es kann demnach auch die Einwirkung der Schwerkraft auf diese Partie fast gleich Null gesetzt werden. Aehnlich verhält es sich mit der Partie *c—d*; diese verändert ihre Lage während der ersten Phase in der Weise, dass am Schlusse derselben eine Längszone nach unten gekehrt ist, welche von derjenigen, die am Anfang des Versuchs jene Lage einnahm, um 90° entfernt ist. Während des Verlaufs der ersten Phase kann also in der Strecke *b—d* kaum eine geotropische Krümmung inducirt werden und dasselbe gilt auch im Wesentlichen für die zweite Phase. Allerdings ist am Schlusse der ersten Phase und auch schon in den letzten Stadien derselben fast dieselbe Längszone auf der ganzen Ausdehnung von *a—d* nach unten gekehrt und dasselbe findet auch noch am Anfange der zweiten Phase statt, so dass auf dieser Partie wohl eine

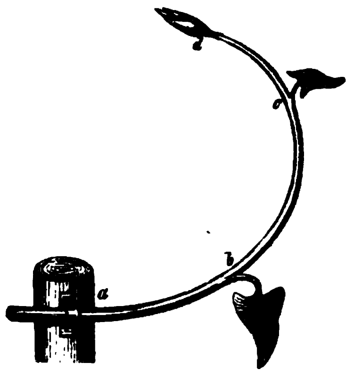


Fig. 5.

schwache Krümmung durch die Einwirkung der Schwerkraft inducirt werden kann; aber dieser Umstand kann die Form der am Schlusse der zweiten Phase vorhandenen Krümmung nur insofern modificiren, als dadurch nicht blos in der Partie *a—b* eine Aufwärtskrümmung erfolgt, sondern auch in *b—d* eine schwache geotropische Krümmung der Nutationskrümmung entgegenwirkt.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass während der zweiten Nutationsphase die Bewegungen nicht mehr als reine Nutationskrümmungen zu betrachten sind, denn während des Zeitraumes von etwa einer Stunde muss natürlich die Partie *a—b* bereits eine geotropische Aufwärtskrümmung zeigen. Es muss demnach während dieser Phase die Lage der Krümmungsebene in der Partie *b—d* schon etwas durch die scheinbare Torsion, die während dieser Zeit nach den obigen theoretischen Erörterungen als eine homodrome sich darstellt, — denn sie findet ja an einer antidromen Krümmung statt, — modificirt werden. In welcher Weise diese Aenderung erfolgt, braucht hier nicht weiter ausgeführt zu werden, da man sowohl durch eine einfache Ueberlegung als auch durch das Experiment leicht eine Vorstellung davon gewinnen kann. Im Uebrigen ist diese Veränderung für unsere Frage von nebensächlicher Bedeutung.

Eine eingehendere Betrachtung erfordert die Form der Krümmung, die am Schlusse der zweiten Phase eintreten muss. Wie schon erwähnt, kann a priori diese Krümmung in der Partie *a—b* in dreierlei Weise sich gestalten: entweder heben sich Nutations- und geotropische Krümmung gegenseitig auf, wenn die Krümmungsradien einander gleich sind, oder die eine überwiegt die andere. Der erstere Fall dürfte wohl kaum eintreten, wenigstens habe ich bei meinen Versuchen niemals eine vollständig horizontale Lage der Partie *a—b* beobachten können; auch die Versuche Baranetzky's weisen keinen derartigen Fall auf. Es muss also immer der Radius der einen Krümmung grösser sein als der der andern und zwar ist immer, wenigstens in der dem Befestigungspunkte am nächsten liegenden Partie der Strecke *a—b*, der Radius der Nutationskrümmung grösser als der der geotropischen, d. h. mit anderen Worten: es kommt eine resultirende Krümmung zu Stande, deren Concavität nach oben gekehrt ist. Dies habe ich stets durch das Experiment bestätigt gefunden und die Baranetzky'schen Ver-

suche beweisen ebenfalls, dass die geotropische Krümmung die Nutationskrümmung überwiegt. (Vergl. Fig. 2 und 3 S. 16 und 17 der cit. Abhandlung.) In den Strecken *b—d* und vielleicht auch noch in der weiter von dem Befestigungspunkte entfernten Partie der Strecke *a—b* wird aus naheliegenden Gründen der umgekehrte Fall eintreten, es muss also hier die Concavität der resultirenden Krümmung nach unten gekehrt sein, denn hier ist der Radius der geotropischen Krümmung jedenfalls grösser als der der Nutationskrümmung. Daraus geht hervor, dass jetzt das ganze frei nutirende Sprossende eine Krümmung besitzt, die annähernd die Form einer Wellenlinie zeigt. Dabei wird aber die obere Partie (*b—d*), deren Concavität nach unten gekehrt ist, nicht die volle Nutationskrümmung darstellen, sondern eine etwas flachere Krümmung, weil die, wenn auch schwache geotropische Krümmung im entgegengesetzten Sinne wirkt.

Betrachtet man nun unter Berücksichtigung des eben Gesagten die Lage der einzelnen Längszonen zum Horizont am Schlusse der zweiten Phase, so leuchtet sofort ein, dass diejenige Zone, welche bei Anfang des Versuches auf der Convexität der Krümmung lag, in ihrer ganzen Ausdehnung nunmehr nach unten gekehrt ist, wobei allerdings die einzelnen Partieen derselben verschiedene Winkel mit der Verticalen einschliessen. Durch diesen letzteren Umstand wird wieder eine verschiedene Einwirkung des negativen Geotropismus bedingt; doch kann diese Verschiedenheit ohne grosse Fehler vernachlässigt werden, da mit Ausnahme der zunächst der Spitze liegenden Partieen jener Winkel keine bedeutenden Schwankungen erfährt. Man kann also die geotropische Krümmung, welche jetzt inducirt werden muss, als eine in fast allen Partieen annähernd gleiche betrachten.

Dies ist von Wichtigkeit für die Bewegungen, welche in den beiden folgenden Phasen angeführt werden. Vergegenwärtigen wir uns vorerst die Veränderungen, die bei abermaligem Fortschreiten der Nutation um 90°, also in der dritten Phase, stattfinden, so ist zunächst so viel klar, dass die Krümmung in allen Theilen der Sprossendes allmälig wieder stärker werden muss, denn nunmehr wirken ja Nutation und negativer Geotropismus nicht mehr in diametral entgegengesetzter Richtung. Die resultirende Krümmung wird aber sehr bald schief nach

oben gerichtet sein und zwar noch vor Ablauf der dritten Phase, denn es ist jetzt in allen Theilen eine ansehnliche geotropische Krümmung vorhanden, am stärksten ist dieselbe offenbar in der Strecke *a—b*. Es tritt demnach jetzt der Fall ein, welcher in § 1 einer ausführlichen exacten Betrachtung unterworfen worden ist. Denn beim Abschluss der dritten Phase ist die früher nach unten gekehrte Längszone in der Strecke *b—c* theilweise nach aussen und in der Strecke *c—d* sogar schief nach oben gerichtet, es ist also eine erhebliche scheinbare antidrome Torsion vorhanden.

Diese antidrome Torsion, die an frei nutirenden Sprossenden unter den oben geschilderten Umständen *stets* auftritt, erfordert eine eingehendere Besprechung, weil sie in verschiedenen Theorieen, welche über die Mechanik des Windens aufgestellt worden sind, eine wichtige Rolle spielt. Ihr Zustandekommen ist in verschiedener Weise erklärt worden. De Vries glaubte, dass es das Eigengewicht der Spitze sei, welche die Erscheinung bedinge; er nahm also an, dass es eine *wirkliche* Torsion sei, also eine Verschiebung der einzelnen Querschnittsscheiben gegen einander. Er sah weiterhin in dieser Torsion einen Factor, der beim Vorgange des Windens einen hervorragenden Einfluss ausübe, denn nach seiner Ansicht bewirkt dieselbe, dass die Krümmung der oberen Internodien fortwährend ihre Concavität der Stütze zukehre. Ganz abgesehen von dem hohen Betrage der antidromen Torsion, welcher dabei auftreten müsste und der in Wirklichkeit nicht vorhanden ist, konnte diese Anschauung nicht aufrecht erhalten werden, nachdem Schwendener durch Contrebalancirung der Spitze gezeigt hatte, dass das Gewicht derselben für die Bildung von Schraubenwindungen gänzlich belanglos sei. Dieses Ergebniss der Versuche Schwendener's wurde von Baranetzky und Kohl bestätigt, der erstere wies überdies nach, dass bei ähnlicher Versuchsstellung trotzdem antidrome Torsionen auftreten. Die Thatsache ist auch vollkommen richtig, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht und wie jeder Versuch sofort bestätigt. Baranetzky versucht auch eine Erklärung für diesen Vorgang zu geben, doch ist mir dieselbe nicht ganz verständlich. Er sagt S. 49 seiner Arbeit:

»Schwendener hat in seiner citirten Abhandlung gezeigt, dass jede spiralförmige [schraubenlinige] Krümmung eines cylin-

drischen Stabes nothwendig von einer antidromen (scheinbaren) Torsion begleitet wird, und es muss somit die zu beobachtende Torsion einer sich krümmenden Stengelspitze zum grössten Theile eben diesem Umstande zugeschrieben werden. Nach der Theorie muss aber diese scheinbare Torsion mit der Steilheit der Spirale sich vergrössern.«

Dies ist zwar nicht ganz zutreffend, denn schraubenlinige und kreisförmige Krümmung lassen sich in dieser Beziehung nicht unmittelbar vergleichen; immerhin muss zugegeben werden, dass die oben im ersten Theile gegebenen Erörterungen betreffs der scheinbaren antidromen Torsion in gewisser Hinsicht Aehnlichkeit haben mit den Berechnungen, welche Schwendener für die schraubenlinige Krümmung eines cylindrischen Stabes angestellt hat. An das eben gegebene Citat schliesst sich sodann folgende Bemerkung an:

»Beachtet man nun die erste entstehende Windung, bei deren Bildung die Torsion doch am stärksten hervortritt — so findet man nicht selten bei einer flachen Spirale eine so bedeutende Drehung, wie eine solche auch bei steileren Spiralen nicht jedesmal zu beobachten ist. — Auf die Ursache dieser Erscheinung werde ich unten zurückkommen.« Hierbei vermengt er zwei ganz verschiedene Dinge; er spricht von Windungen, solche können aber doch dabei gar nicht in Frage kommen, denn es handelt sich hier um frei nutirende Sprossenden, und jene Torsionen, welche beim Winden auftreten, sind wesentlich anderer Natur und auch ganz anderen Ursprungs. Der letzte Satz des Citats lässt zwar vermuthen, dass auf den nächsten Seiten eine Erklärung folgen werde, doch habe ich eine solche nicht finden können; ich kann in Betreff der auf S. 49—51 gemachten weiteren Bemerkungen nur auf den ersten Theil dieser Schrift S. 154 und 155 verweisen.

Schwendener hat in seiner Abhandlung über das Winden jene scheinbare Torsion nicht berücksichtigt, ihre Beziehungen zu der Einwirkung des Geotropismus auf die Nutationskrümmungen waren ihm unbekannt, denn er glaubte durch die Rotationsversuche bewiesen zu haben, dass der negative Geotropismus für das Winden nothwendig und dass diese Mitwirkung vor Allem in der Verstärkung der durch die Nutation hervorgerufenen Greifbewegung zu suchen sei. Etwaige antidrome Torsio-

nen, die an den frei nutirenden Sprossenden auftraten, schrieb er dem Einflusse des Eigengewichts der Spitze zu.

Kohl, welcher über die Bedeutung des negativen Geotropismus für die Nutation und das Winden überhaupt keine bestimmte Anschauung ausgesprochen hat, liess natürlich auch jene Torsion vollkommen ausser Acht.

Kehren wir nach dieser Abschweifung wieder zu unserem Versuche zurück, so ist klar, dass die scheinbare antidrome Torsion, welche schon im Verlaufe der dritten Phase eintritt, nach Abschluss derselben und im Anfange der vierten Phase sich noch etwas verstärken muss, denn fortwährend wirken während dieser die Nutationskrümmung und die bereits vorhandene geotropische zusammen. Wenn auch nur verhältnissmässig kurze Zeit jene Bedingungen annähernd erfüllt sind, die bei der theoretischen Betrachtung in § 1 und 2 massgebend waren, so ist doch das Endresultat dieses Zusammenwirkens im Wesentlichen mit den auf deductivem Wege gewonnenen Ergebnissen in Uebereinstimmung. Von besonderer Wichtigkeit ist nun die Erörterung der Frage, wie die weitere Einwirkung des negativen Geotropismus während dieses Zeitraumes von etwa einer Stunde, in welchem jene scheinbare antidrome Torsion auftritt, sich gestalten wird. Denn es ist einleuchtend, dass nach Abschluss der vierten Phase nicht wieder diejenige Form der Krümmung erreicht werden kann, die bei Anfang des Versuchs vorhanden war.

Diese Frage lässt sich ebenfalls nur an der Hand jener theoretischen Betrachtungen mit Sicherheit entscheiden, und das Experiment bestätigt, wie dies nicht anders zu erwarten ist, die aus jenen gezogenen Schlussfolgerungen. Aus der Formel $\sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta$ (S. 141) ergibt sich, dass die Tangente an jedem Punkte der jetzt vorhandenen Krümmung einen anderen Winkel mit der Horizontalen einschliesst, und dass demnach auch die Wirkung des negativen Geotropismus auf die einzelnen Theile eine verschiedene sein muss. Ferner ist klar, dass die jetzt nach unten gekehrte Zone ähnlich wie eine homodrom verlaufende Schraubenlinie um den Stengel herumgeht. In der Partie *a*—*b* fällt dieselbe ungefähr mit derjenigen Längszone zusammen, die schon während der ersten drei Phasen fortwährend nach unten gekehrt war; je weiter man aber nach oben geht, desto weiter entfernt liegt die jetzt nach unten gekehrte Zone

von derjenigen, welche nach Abschluss der zweiten Phase diese Lage einnahm, denn durch die scheinbare antidrome Torsion wird bedingt, dass in der Partie *c—d* die Concavität der Krümmung fast nach unten gerichtet ist. Es muss also in der Partie *a—b* und ebenso *c—d*, weil in beiden die Tangente nahezu horizontal liegt, eine stärkere geotropische Krümmung hervorgerufen werden, als in der Partie *b—c*, in deren Mitte ungefähr der Winkel, welchen die Tangente mit der Horizontalen bildet, ein Minimum erreicht.

Dabei ist aber zu beachten, dass am Ende der vierten Phase diese Krümmung in der Partie *a—b* mit der Nutationskrümmung sowie mit der bereits eingetretenen geotropischen Krümmung gleichsinnig wirken muss, während in der Partie *c—d* gerade der umgekehrte Fall eintritt; und ferner, dass in der Partie *b—c* ein Übergang insofern stattfinden wird, als hier der Radius der im Verlauf der letzten 1½ Phasen bewirkten schwachen geotropischen Krümmung annähernd senkrecht zu den der Nutationskrümmung und der schon vorhandenen geotropischen steht.

Berücksichtigt man dies Alles, so ergibt sich mit Nothwendigkeit Folgendes: Nach Ablauf der vierten Phase, also nach Beendigung des ersten Nutationsumganges, wird in der Partie *a—b* eine starke Aufwärtskrümmung zu bemerken sein, die Partie *b—c* wird eine schwächere Krümmung zeigen und zugleich eine geringe Schiefstellung der Krümmungsebene, deren Richtung sich aus dem oben Gesagten sofort ergibt; die Partie *c—d* kann in verschiedener Weise gekrümmt sein: entweder ist der Radius der zuletzt eingetretenen geotropischen Krümmung grösser als derjenige der bereits vorhandenen Krümmung, oder es findet das Umgekehrte statt. Im ersteren Falle muss die Concavität der Krümmung schief nach unten, im letzteren dagegen schief oder auch ganz nach oben gekehrt sein. Der letztere Fall kommt ziemlich häufig bei lebhaft wachsenden Pflanzen vor und es lassen sich daraus jedenfalls die Krümmungen in der obersten Partie, wie sie Baranetzky in Fig. 11 II, 13 IV und noch an einigen anderen Stellen abbildet, wenigstens zum Theil erklären, dasselbe gilt von der Fig. 2 in der Kohl-schen Abhandlung. Obwohl in den citirten Figuren frei nutirende Sprossenden oder doch solche, deren Spitzen eine Zeit lang von der Stütze entfernt waren, ohne dass eine Befestigung

an der rückwärts liegenden Partie stattgefunden hatte, dargestellt sind, halte ich es doch für wahrscheinlich, dass dabei etwas Ähnliches eingetreten ist.

Wir sind mit unserer Betrachtung am Ende des ersten unter den gegebenen Bedingungen stattfindenden Nutationsumlaufes angelangt. Die Curve, welche jetzt durch die gesammte Krümmung des Sprossendes dargestellt wird, ist eine complicirte Raumcurve, deren Form sich aus dem Obigen ergibt, deren Verlauf sich aber nur schwer so genau beschreiben lässt, dass man eine klare Vorstellung davon erhalten kann. Es ist deshalb zu empfehlen, durch Modelle aus Bleiröhrchen die Bewegungen der nutirenden Sprossenden nachzuahmen, denn nur auf diese Weise lässt sich, zumal bei Berücksichtigung der Lagenveränderungen einer vorher durch Tuschmarken bezeichneten Längszone, eine übersichtliche Anschauung der beschriebenen Krümmungsvorgänge gewinnen. Die leicht anzustellenden Experimente bieten dazu genügend Gelegenheit.

Am Schlusse des ersten Nutationsumlaufes ist gewöhnlich die geotropische Aufwärtskrümmung im unteren Theile schon so stark, dass nunmehr die Nutationsbewegungen wieder um eine fast verticale Achse erfolgen können. Ist das letztere nicht der Fall, so spielt sich im nächsten Nutationsumlaufe nochmals ein ähnlicher Vorgang wie im ersten ab. Obwohl im Wesentlichen wieder dieselben Verhältnisse dabei in Betracht kommen, so ist doch eine exacte Darstellung nicht gut möglich, da die Bewegungen zu complicirt werden. Auch würde eine blosse Beschreibung wegen der schwer zu erreichenden Übersichtlichkeit kaum einen besonderen Werth haben. Ich verzichte deshalb an dieser Stelle auf eine solche und muss es dem Leser überlassen, sich jene weiter eintretenden Veränderungen zu vergegenwärtigen.

Immerhin aber lässt sich soviel mit Sicherheit behaupten, dass durch die Einwirkung des negativen Geotropismus eine bleibende Krümmung geschaffen wird, und dass diese Krümmung eine Raumcurve darstellt. Für die Mechanik des Windens ist dies insofern von grosser Wichtigkeit, als das in Folge der geotropischen Einwirkung hervorgerufene stärkere Wachsthum nicht auf einer geradlinig am ungekrümmten Organe verlaufenden Längszone stattfindet, sondern auf einer links um den Stengel verlaufenden Schraubenlinien-ähnlichen Curve. Dadurch wird,

wenn man sich die Nutationskrümmungen ganz wegdenkt, eine *bleibende Krümmung* geschaffen, die sich in ihrer Form einer links verlaufenden Schraubenlinie nähert.

Wir haben im Vorstehenden nur den speciellen Fall betrachtet, in welchem eine nutirende Spitze in der Weise horizontal gelegt wird, dass die Concavität der Nutationskrümmung nach oben gekehrt ist. Es war diese Lage der Ausgangspunkt von dem aus wir die übrigen Bewegungen verfolgten.

Der Vollständigkeit halber müssten nun auch diejenigen Fälle noch betrachtet werden, in denen eine andere anfängliche Lage jener Krümmung als Ausgangspunkt gewählt würde. Man könnte z. B. davon ausgehen, dass die Ebene der bereits vorhandenen Krümmung horizontal gelegt würde, oder dass diese Ebene zwar als vertical, die Concavität der Krümmung aber als nach unten gekehrt angenommen würde. Wollte man jedoch diese verschiedenen Fälle alle in derselben Weise besprechen, so würde das viel zu weit führen. Allerdings ist es ja durchaus nicht ganz gleichgültig, ob man bei Anfang des Versuches die Concavität der Krümmung nach oben oder nach unten, nach rechts oder nach links, oder schliesslich nach irgend einer anderen Seite gerichtet annimmt, denn es ändert sich damit, wie sofort einleuchtet, auch in gewisser Hinsicht das Zusammenwirken von Nutation und Geotropismus, aber trotzdem hat man es im Wesentlichen immer mit denselben Vorgängen wieder zu thun. Jene scheinbaren antidromen Torsionen müssen stets dabei auftreten und in Verbindung damit auch die schon genugsam angedeuteten weiteren Einwirkungen des Geotropismus. Das Endresultat wird mithin stets dasselbe sein: die bleibende Krümmung, welche durch den negativen Geotropismus bedingt wird, findet auf einer am Stengel links verlaufenden Zone statt. Dies kann eine geringfügige und hier nicht weiter zu beachtende homodrome Torsion zur Folge haben, muss aber stets auch eine Krümmung in verschiedenen Ebenen hervorrufen.

Es bleibt nun weiter noch die Frage zu erörtern, in welcher Beziehung die von Baranetzky angenommene »transversale Krüm-

mung« zu dem im Vorhergehenden geschilderten Zusammenwirken von Geotropismus und Nutation steht, bezw. wie sich dieselbe erklären lässt.

Was Baranetzky unter der transversalen Krümmung versteht, ist im I. Theile ausführlich dargelegt worden. Auch sind dort eine Anzahl Versuche besprochen worden, welche der genannte Forscher anstellte, um den Nachweis zu führen, dass bei jener Krümmung nicht die normale Nutation, also nicht das successive Fortwandern des stärkeren Ausdehnungsbestrebens von einer Längszone zur anderen, stattfinde. Es möge deshalb hier nur noch ein Versuch näher betrachtet werden, dem Baranetzky wie mir scheint eine besondere Bedeutung beimisst: er stellt ihn wenigstens in dem Capitel »Krümmungsfähigkeit in horizontaler Ebene« allen übrigen voran. Nachdem er ausgeführt hat, dass eine in horizontaler Lage befestigte Sprossspitze sehr bald eine homodrome Krümmung erhält — was nach dem oben Gesagten sehr leicht erklärlich ist — und dass dann eine Schiefstellung der Krümmungsebene erfolgt, sagt er weiter: S. 33 »Wird nun der fixirte Stengel von Zeit zu Zeit so um seine Achse umgedreht, dass die schief aufsteigende Krümmungsebene wieder horizontal gestellt wird, so wird die Krümmung in dieser Ebene allmälig so stark, dass die Stengelspitze in eine enge (in einer Ebene liegende) Spirale zusammengerollt erscheint.« Dies soll als Beweis für den Satz dienen, der auf S. 38 aufgestellt wird: Bei horizontaler Lage einer nutationsfähigen Stengelspitze werden unter der Einwirkung der Gravitation Verhältnisse in den Geweben geschaffen, in deren Folge das bevorzugte Wachsthumsbestreben nothwendig in eine Seitenkante der Spitze versetzt wird. Erwägt man genau, was bei jenem Versuche durch das Zurückbringen der Krümmungsebene in die horizontale Lage erzielt wird, so leuchtet sofort ein, dass durch jene Drehung zunächst die regelmässige Nutationskrümmung immer wieder in horizontale Lage gebracht wird, also das stärkere Ausdehnungsbestreben in ganz normaler Weise fortschreitet, und zweitens, dass zugleich damit auch fortwährend diejenige Längszone auf die Aussenseite der Krümmung zu liegen kommt, die während eines gewissen Zeitraumes nach unten gekehrt war. Daraus geht hervor, dass jetzt Nutation und Geotropismus fast stets bei Herstellung der Krümmung in horizontaler oder wenig geneigter Ebene in gleichem

Sinne wirken müssen und demnach ein Kleinerwerden des Krümmungsradius eintreten wird.

Dies Alles kann aber nur stattfinden, wenn die Nutation regelmässig fortschreitet und deshalb ist gerade das Gegentheil von dem nothwendig, was Baranetzky in dem eben citirten Satze annimmt. Wäre dieser Satz richtig, so müsste das Resultat der fortgesetzten Drehungen, durch welche die Krümmungsebene stets wieder in horizontale Lage gebracht wird, ein ganz anderes sein, oder vielmehr diese Drehungen wären gar nicht nöthig, da ja die Krümmung ohne weiteres Zuthun in horizontaler Lage sich verstärken müsste. Dass dieses letztere nicht eintritt, kann man bei jedem vorwurfsfrei angestellten Experimente sofort bestätigt finden.

Es beweist demnach jener Versuch gerade das Gegentheil von dem, was damit bewiesen werden sollte, denn *die andauernde homodrome Krümmung wird nicht durch das Längenwachsthum einer einzigen Längszone hervorgerufen, sondern sämmtliche Längszonen kommen successive auf die Convexität der Krümmung zu liegen.*

Die damit verbundene Verstärkung der Krümmung durch den negativen Geotropismus kann nur auf Grund der im § 1 gegebenen theoretischen Betrachtungen ihre Erklärung finden. Es dürfte nicht angebracht sein, an dieser Stelle nochmals ausführlich auf die Lagenveränderungen der einzelnen Längszonen in Bezug auf den Horizont einzugehen, denn unter genügender Berücksichtigung jener scheinbaren antidromen Torsion ist es nicht schwierig, eine klare Vorstellung von den bei der Verstärkung der Krümmung sich abspielenden Vorgängen zu gewinnen.

Obwohl die »transversale Krümmung« als eine unberechtigte Annahme nachgewiesen worden ist, so bleibt doch die Thatsache bestehen, dass die gemeinsame Wirkung von Nutation und Geotropismus an windenden Pflanzen von grosser Bedeutung ist. Baranetzky hat auch an manchen Stellen seiner Abhandlung auf diesen Umstand ganz richtig hingewiesen, nur widerspricht er sich in dieser Hinsicht häufig und über den eigentlichen Zusammenhang beider Bewegungserscheinungen konnte er sich nicht völlig klar werden, da er es nicht versuchte, auf exactem Wege diese Frage zu lösen.

Dass jenes Zusammenwirken nicht blos die eigenthümlichen Bewegungen an frei nutirenden Spitzen, welche künstlich in

horizontale Lage gebracht werden, erklärt, sondern auch für den Mechanismus des Windens unbedingt nothwendig ist, soll im folgenden Paragraphen dargelegt werden. Den Beweis zu liefern, dass der negative Geotropismus ein unerlässlicher Factor beim Zustandekommen der Schraubenwindungen sei, ist nur dann möglich, wenn die Wirkungen des Geotropismus an der normal nutirenden Pflanze selbst verfolgt werden, denn die Rotationsversuche, welche Schwendener anstellte, haben nach den Versuchen Baranetzky's, wie im I. Theil ausführlich erörtert worden ist, keine Beweiskraft mehr.

Es wird sich empfehlen, hauptsächlich das Winden um dünne Stützen, Fäden u. dergl. zu betrachten, da hierbei der Einfluss, welchen die Stütze ausübt, von den durch Nutation und Geotropismus hervorgerufenen Bewegungen leichter zu trennen ist.

§ 4.

Das Winden um dünne Stützen.

Im ersten Theile wurde ein Versuch, welchen Baranetzky auf S. 62 und 63 seiner Arbeit beschreibt, nicht näher besprochen. Es handelt sich dabei um das Winden einer Ipomoea-Art um einen gespannten Faden. Der genannte Autor findet das Winden unter diesen Verhältnissen »etwas eigenthümlich«. Diese Eigenthümlichkeit soll sich darin aussprechen, dass die windende Spitze der Ipomoea sibirica sich »so zu sagen nie an die Gegenwart der Stütze gewöhnen zu können scheint«. Es werden die einzelnen Stadien beschrieben und durch Skizzen erläutert, allerdings ohne genauere Angabe über die Zeitdauer, die zwischen je zwei der abgebildeten Zustände liegt. Dass bei einer lebhaft wachsenden Pflanze, wie sie Baranetzky jedenfalls bei seinem Versuche vor sich gehabt hat, die mannigfaltigsten Bewegungen auf der Partie von *b* bis aufwärts zur Spitze (vergl. die Fig. 13 der citirten Abhandlung) eintreten mussten, ist von vornherein selbstverständlich; da aber diese Strecke etwa 3½ lebhaft nutirende Internodien umfasst, so ist es ganz unmöglich, in exacter Weise diese Bewegungen zu erklären, denn die Lagenveränderungen, welche die oberen Partieen ausführen, werden fortwährend von den Krümmungen in der Strecke *b*—*f* in der verschiedensten Weise beeinflusst. Die

Bewegungen werden deshalb so complicirt, dass ein Auseinanderhalten der einzelnen Factoren nicht mehr möglich ist.

Das Wesentliche, was sich aus dem Versuche ergibt, lässt sich dahin zusammenfassen, dass die oberen Partieen mehrfach eine flache, annähernd schraubenlinige Krümmung um den Faden bilden, die sich bald wieder verändert, und dass die mehr zurückliegenden Partieen nicht wieder von der Stütze loskommen können, aber immerhin ziemlich ansehnliche Bewegungen noch ausführen und deshalb bald mehr bald weniger steile Windungen um den Faden bilden.

Zu ähnlichen Resultaten ist auch Kohl bei seinen Versuchen gelangt. Während aber Baranetzky das Winden unter diesen Bedingungen nur »etwas eigenthümlich« findet, glaubt Kohl die Behauptung aussprechen zu dürfen, dass die Ergebnisse derartiger Versuche den Schwendener'schen Annahmen über die Wirkung der Greifbewegung widersprächen und einen Beweis für das Vorhandensein einer Reizbarkeit der Stengel lieferten. Auch bei den Versuchen des letzteren Autors und bei den Skizzen, welche er dazu gibt, lässt sich der Einfluss, den die mehr zurückliegenden Partieen infolge ihrer Bewegungen auf die Lagenveränderungen der zunächst der Spitze liegenden Strecke ausüben, nicht klar übersehen. Durch derartige Versuche wird immer nur bewiesen, dass die betreffenden Pflanzen um sehr dünne Stützen winden können, was längst schon zur Genüge bekannt ist; über die eigentlichen Vorgänge, welche die Bildung bleibender Schraubenwindungen hervorrufen, erfahren wir so gut wie gar nichts.

Eine klare Einsicht kann nur gewonnen werden, wenn man das Sprossende in einer Entfernung von etwa 8—10 cm von der Spitze an dem als Stütze dienenden Faden oder in der Nähe desselben derart befestigt, dass die Bewegungen der zurückliegenden Partieen keinen Einfluss auf diejenigen der frei nutirenden Spitze haben können. Es ist dabei ziemlich gleichgültig, in welcher Lage das Sprossende bei Beginn des Versuches festgehalten wurde, denn es sind schliesslich immer wieder dieselben Vorgänge, welche das Winden herbeiführen.

Der Einfachheit halber verfährt man bei derartigen Versuchen am besten auf folgende Weise: Man befestigt die Spitze so an einem Stativ oder dergl., dass die Nutationsbewegungen der Spitze um eine verticale Achse erfolgen können, also nach

Baranetzky *symmetrische* Nutation ausführen. Nachdem die Pflanze ein oder zwei Nutationsumläufe in dieser Weise vollendet hat, bringt man als Stütze einen gespannten Faden an, der parallel mit der Achse steht, um welche die Spitze im Kreise herumgeführt wird. Befestigt man diesen Faden in der Weise, dass die zur Zeit vorhandene Krümmung des Sprossendes ihre Convexität demselben zukehrt, also etwa wie es in beistehender Skizze dargestellt ist, so wird in den nun folgenden beiden

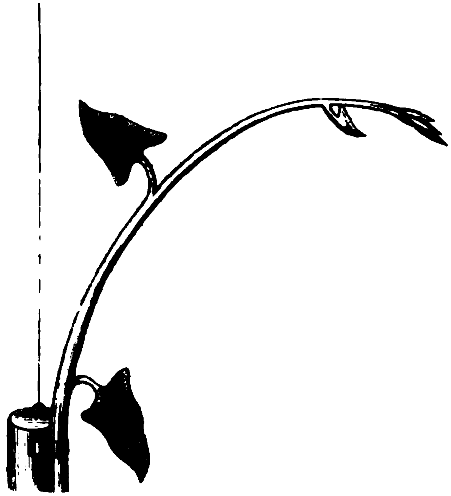


Fig. 6.

Nutationsphasen keine besondere Einwirkung der Stütze auf die stattfindenden Bewegungen zu bemerken sein. Am Schlusse der zweiten Phase steht die Krümmungsebene noch nahezu vertical, nur ist jetzt die Concavität der Krümmung nach der entgegengesetzten Seite, also nach links gerichtet. Während des Verlaufes der beiden nächsten Phasen tritt aber nun die Stütze in erheblicher Weise den Nutationsbewegungen hindernd entgegen, denn die unterste Partie des Sprossendes bleibt rechts vom Faden, die etwas darüber liegende kommt (bei links nutirenden Pflanzen) hinter denselben und die obere links davon zu liegen, so dass während der dritten Phase bereits eine wirksame Greifbewegung im unteren Theile zu Stande kommen muss.

Nach Beendigung derselben wird die Spitze ungefähr nach vorne gerichtet sein, aber die Krümmungsebene steht bereits nicht mehr vollkommen vertical, sondern ist etwas nach links geneigt; denn denkt man sich jetzt die Nutationskrümmung ganz weg, so kann der Stengel nicht völlig gerade sein, sondern er muss eine, wenn auch schwache Krümmung nach links zeigen, da die Verticalstellung, die während dieser Phase sowohl wie in den beiden vorhergegangenen eigentlich hätte stattfinden müssen, durch die Stütze verhindert wurde. Während der vierten Phase kann die Nutation nun nicht mehr völlig »symmetrisch« verlaufen, denn es muss schon eine Einwirkung des Geotropismus sich bemerkbar machen, da am Schlusse derselben die Ebene der Krümmung des oberen Theiles schon nahezu sich in horizontaler Lage befindet.

In der ersten Phase des zweiten Nutationsumlaufs wird nunmehr in der bekannten Weise ein schiefes Aufrichten der Krümmungsebene eintreten, wobei durch die Lagenveränderung der einzelnen Längszonen gegen den Horizont das infolge des negativen Geotropismus hervorgerufene stärkere Wachsthum auf einer links um den Stengel verlaufenden Raumcurve sich geltend machen muss. Beim Abschluss dieser Phase wird deshalb die Spitze gewöhnlich nicht hinter den Faden zu liegen kommen, sondern etwas rechts von demselben, so dass beim Weitergehen der Nutation ein Contact irgend eines Punktes in der oberen Partie mit dem Faden nicht eintreten kann. Im anderen Falle, wenn die Einwirkung des Geotropismus nicht so bedeutend ist, was auch nicht selten stattfindet, wird jener Contact hergestellt und dadurch beim Fortgange der Nutation eine wirkliche antidrome Torsion bedingt.

Betrachten wir zunächst den ersteren Fall, so ist klar, dass auch unter diesen Umständen während des zweiten Nutationsumlaufes zwar mannigfaltige Krümmungen, wie sie das Zusammenwirken von Nutation und Geotropismus, sowie die Bewegungen der dem Faden bereits in ½ oder ¾ Windung theilweise anliegenden unteren Partieen bedingen, eintreten werden, dass aber ein weiteres Umschlingen des Fadens Seitens jener frei nutirenden oberen Partieen nicht möglich ist. Erst wenn durch eine ausgiebige geotropische Krümmung die Ebene der Nutationskrümmungen wieder nahezu vertical gestellt worden ist, kann auch durch die jetzt wieder ungefähr »symmetrisch« statt-

findenden Bewegungen ein weiteres Umwinden des Fadens, ähnlich wie im ersten Nutationsumlaufe, erzielt werden.

Man kann sich dieses Umwinden sehr leicht an einem Modell veranschaulichen. Man nimmt ein bogenförmig gekrümmtes Bleiröhrchen und befestigt dies mit seinem unteren Ende derart an einem vertical stehenden Drahte, so dass zunächst der letztere an dem Befestigungspunkte die Curve tangirt. Führt man nun mechanisch dieselben Krümmungen an dem Röhrchen aus, die an einem symmetrisch nutirenden Sprossende unter solchen Umständen während eines Nutationsumlaufes auftreten, so sieht man sofort, dass schliesslich das Bleiröhrchen in seinem unteren Theile eine Schraubenlinie um den Draht bildet. Es leuchtet aber weiterhin ein, dass die schraubenlinige Krümmung nur dadurch entstanden ist, dass der Draht dem Biegen des Röhrchens einen gewissen Widerstand entgegensetzte. Würde an Stelle des Drahtes ein leicht biegsames Object, etwa ein lose herabhängender Faden genommen, so müsste das Röhrchen bei jenen Biegungen seine verticale Krümmungsebene beibehalten, der Faden aber würde dann schraubenlinig um den unteren Theil desselben herumgeschlungen werden.

Das vorstehend Gesagte ist eigentlich so selbstverständlich, dass es kaum einer Erwähnung bedurft hätte; da es aber nothwendig ist, dass man diese Vorgänge stets im Auge behält, wenn es sich um Winden um sehr dünne Stützen handelt, und da ferner diese an sich so einfachen Verhältnisse sowohl von Kohl wie von Baranetzky theils nicht berücksichtigt, theils falsch aufgefasst worden sind, so war es nicht überflüssig, nach den diesbezüglichen Bemerkungen im I. Theile an dieser Stelle nochmals etwas näher darauf zurückzukommen.

Das Umschlingen derartiger Stützen gestaltet sich demnach sehr einfach. Durch die Nutation wird das Sprossende ein oder zweimal um die Stütze herum geführt, durch den Widerstand, welchen die letztere den Bewegungen des ersteren entgegensetzt, werden schraubenlinige Krümmungen geschaffen. Sodann zeigt das nunmehr annähernd in horizontaler Lage befindliche äussere Sprossende jene im vorigen Paragraphen ausführlich besprochenen Bewegungen, bis schliesslich wieder ein Aufrichten der Krümmungsebene erfolgt und das Umschlingen des Fadens ähnlich wie vorher eintreten kann.

Die auf diese Weise gebildeten Windungen sind nun aber,

wie leicht ersichtlich, vorerst nicht bleibende, sondern sie erfahren noch mannigfache Veränderungen, da ja die Nutation auch in der unteren Partie noch nicht erloschen ist. Durch die Bewegungen, welche infolge dessen noch eine Zeit lang in dieser Partie stattfinden und die an einem bereits schraubenlinig gekrümmten Organe auftreten, müssen natürlich auch stets wieder annähernd schraubenlinige Krümmungen zu Stande kommen; denn führt ein in dieser Weise gebogener Stengel regelmässige Nutationsbewegungen aus, so beschreibt jeder Punkt desselben während eines Nutationsumlaufes ungefähr einen Kreis, es würde also, wie bereits im I. Theil ausführlicher auseinandergesetzt wurde, die Gestalt der Curve erhalten bleiben. Das letztere ist aber in unserem Falle deshalb nicht ganz möglich, weil die Stütze diesen Bewegungen Widerstand leistet.

Es würde zu weit führen, wollte man diese einzelnen Bewegungen hier genau verfolgen, es genügt zu wissen, dass die einmal schraubenlinig gekrümmte Partie sich nicht wieder von der Stütze abwickeln kann, und dass durch sehr häufige Greifbewegungen, die dabei naturgemäss eintreten müssen, die nöthigen bleibenden Krümmungen erzielt werden. Dieselben stellen erst nach dem Erlöschen der Nutation und des Längenwachsthums sich als normale Schraubenwindungen dar, denn das vollständige Geradestrecken des Stengels wird offenbar durch die Stütze verhindert.

Dasselbe, was hier für das Verhalten der untersten Partie des Sprossendes in unserem Versuche gesagt wurde, gilt nun auch ebenso für die übrigen Partieen. In der Zeit, wo durch die annähernd horizontale Lage des frei nutirenden Theiles die Herstellung eines Contactes mit der Stütze meist nicht stattfindet, wird durch Einwirkung des Geotropismus ebenfalls eine zeitweise bleibende geotropische Krümmung erzielt, die in ihrer Form einer links verlaufenden, allgemeiner gesagt, homodromen Schraubenlinie ähnelt. Ist sodann das Organ wieder soweit aufgerichtet, dass die Spitze hinter den Faden zu liegen kommt, so wird durch das Vorhandensein dieser geotropischen Krümmung das Umschlingen der Stütze offenbar bedeutend erleichtert; dabei braucht ebenfalls kein Contact in der oberen Partie stattzufinden und findet auch gewöhnlich nicht statt, sondern es genügt, wenn jetzt wiederum eine schraubenlinige

Krümmung in ähnlicher Weise hergestellt wird, wie es in der darunter liegenden Partie geschah.

Kommt aber jener Contact doch zu Stande, was ja, wie schon erwähnt, durchaus nicht so selten ist, so wird dadurch an dem ganzen Vorgange im Wesentlichen nichts geändert; denn die wirkliche antidrome Torsion, die dabei auftritt, muss nothwendigerweise das Ueberführen des Sprossendes in horizontale Lage beschleunigen und ebenso auch die durch den negativen Geotropismus herbeigeführte homodrom verlaufende Krümmung erneuern oder verstärken.

Es kann demnach ein Umwinden sehr dünner Stützen sehr wohl eintreten, ohne dass die obersten Partieen jemals mit der Stütze in Contact kommen, und daraus erklären sich auch die Versuche, welche Kohl mit Hopfen anstellte, indem er diese Pflanze um Bindfäden u. dergl. winden liess. Die Behauptung Kohl's, dass solche Fälle den Schwendener'schen Annahmen widersprächen, ist also vollständig ungerechtfertigt, denn in der ganzen Abhandlung des letztgenannten Forschers steht kein Wort davon, dass eine wirksame Greifbewegung nur dann stattfinden könne, wenn der obere Contactpunkt in den äussersten Partieen des nutirenden Sprossendes liege.

Dass auch bei sehr dünnen Stützen in Folge der auftretenden Greifbewegungen wirkliche antidrome Torsionen entstehen müssen, braucht nicht weiter auseinandergesetzt zu werden; wenn Kohl behauptet, dass bei dieser Art des Windens fast immer homodrome Torsionen sich einstellten, so beruht dieser Irrthum darauf, dass er bei seiner Berechnung der Torsion von einem unrichtig gewählten Nullpunkte ausgegangen ist. Allerdings können auf kleineren Strecken wohl auch homodrome Torsionen sich vorfinden; denn dadurch, dass oft längere Zeit hindurch die oberen Partieen ganz frei nutiren, müssen auch homodrome Torsionen entstehen, diese werden jedoch in der Regel durch die später bei den Greifbewegungen eintretenden antidromen mindestens ausgeglichen; ist das letztere jedoch nicht der Fall, was bei nicht sehr lebhaft wachsenden Pflanzen auftritt, so können auch geringe homodrome Torsionen an den fertig gewordenen Partieen sich zeigen. Gewöhnlich aber wird die eventuell vorhandene homodrome Torsion nicht blos ausgeglichen, sondern es wird eine nicht unbeträchtliche gegenläufige Drehung erzielt, wie sich aus folgender Tabelle ergibt:

Torsionen an einem Stengel von Calystegia dahurica, welcher um einen Zwirnsfaden gewunden hatte.

Reihenfolge der Internodien von unten an gerechnet	Anzahl der Windungen in einem Internodium	Betrag der Torsion
I	2	360⁰ antidrom
II	3	120⁰ -
III	3½	860⁰ -
IV	3	270⁰ -
V	4	400⁰ -
VI	3½	400⁰ -
VII	4	430⁰ -
VIII	3½	270⁰ -
IX	2½	180⁰ -
X	3½	400⁰ -
XI	3½	180⁰ -
XII	4	180⁰ -

Bisher wurde nur der Fall betrachtet, in welchem die dünnen Stützen Widerstand leisten können, also durch gespannte Fäden, dünne Drähte u. dergl. dargestellt werden. Es mögen nun noch kurz die Vorgänge berücksichtigt werden, die sich abspielen, wenn lose herabhängende Fäden den Pflanzen dargeboten werden. Ist der Faden in seinem unteren Theile ganz gerade und der Stengel der Versuchspflanze unbehaart, so dass ein Anhaften des Fadens an demselben nicht stattfinden kann, so wird bei fortgesetzter symmetrischer Nutation der Faden im Kreise herumgeführt, aber nicht um den Stengel gewunden. Das letztere tritt jedoch stets ein, wenn man den Faden in seiner unteren Partie umbiegt, oder über einen Blattstiel, Glasstab u. dergl. horizontal legt. Bei jedem Nutationsumlaufe wird der Faden unter diesen Umständen einmal um den Stengel geschlungen; d. h. mit anderen Worten: der Faden setzt den Nutationsbewegungen kein Hinderniss entgegen, deshalb bleibt die Krümmung in verticaler Ebene erhalten und stellt eine ebene Curve dar.

Dadurch, dass bei jedem Nutationsumlaufe eine Windung des Fadens um den Stengel entsteht, wird schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit, etwa im Laufe eines Tages, bei Calystegia dahurica eine ziemliche Anzahl solcher Windungen um den Stengel gebildet und infolge dessen der Faden von dem Stengel

durch Reibung so festgehalten, dass nunmehr derselbe auch an seiner unteren Partie als befestigt anzusehen ist. Dass später schraubenlinige Krümmungen auftreten müssen, weil das intercalare Wachsthum durch den Faden theilweise gehindert wird, wurde schon im I. Theile eingehender erörtert. Es wurde zugleich dargelegt, dass von einer Reizbarkeit hierbei nicht die Rede sein könne.

Durch das weitere Längenwachsthum des Stengels und das infolge dessen zunehmende Gewicht des Sprossendes wird allmälig ein Umbiegen des letzteren bewirkt und dieses findet soweit statt, als es die Länge des Fadens gestattet; nunmehr zeigt derselbe eine, wenn auch geringe Spannung, die durch das Gewicht des Sprossendes bedingt wird. Da jedoch der Faden auch jetzt den Nutationsbewegungen keinen erheblichen Widerstand entgegensetzen kann, so findet das Umwinden auch noch in ganz ähnlicher Weise statt, wie zu Anfang des Versuchs.

Obwohl das Endresultat hier — mit Ausnahme der Torsionen — ganz ebenso erscheint, als wie beim Winden um einen straffgespannten Faden, besteht zwischen beiden Vorgängen natürlich ein wesentlicher Unterschied. In dem letzteren Falle werden die bleibenden schraubenlinigen Krümmungen durch die Greifbewegung erzielt, also durch den Widerstand, welcher durch die *Biegungsfestigkeit* der Stütze den Nutationsbewegungen geleistet wird; im ersteren Falle dagegen durch die Verhinderung des Längenwachsthums des Stengels, also durch den Widerstand, welchen die *Zugfestigkeit* des Fadens dem intercalaren Wachsthum des Sprosses entgegensetzt.

§ 5.

Ueber das Verhalten der oberen Windungen beim Umkehren der Pflanze.

Es wurde schon im ersten Theile gesagt, dass die von Baranetzky aufgestellte Behauptung, die windenden Pflanzen zeigten nach dem Umkehren eine in entgegensetzter Richtung verlaufende Nutationsbewegung, gänzlich unbegründet sei. Dagegen bleibt die Thatsache bestehen, dass unter solchen Bedingungen die obersten Windungen sich wieder von der Stütze ablösen. Es fragt sich nun, in welcher Weise dieses Abwickeln auf Grund

der in §§ 1, 2 und 3 gegebenen Betrachtungen erklärt werden kann.

Vergegenwärtigt man sich diejenigen Bewegungen, die an einer in horizontaler Lage befindlichen antidromen Krümmung beim Fortschreiten der Nutation auftreten, so erkennt man, dass in der ersten nunmehr auftretenden Phase ein allmäliges Flacherwerden der Krümmung stattfinden muss, denn auf der nach unten gekehrten Partie macht sich in Folge des negativen Geotropismus ein stärkeres Ausdehnungsbestreben geltend und am Abschlusse dieser Phase wirkt dasselbe der Nutationskrümmung gerade entgegen. Es handelt sich also ungefähr um dasselbe, was S. 154 u. 155 schon ausführlicher beschrieben wurde. In den nächsten beiden Phasen wird die Krümmung wieder stärker und am Schlusse derselben wirken geotropische und Nutationskrümmung im gleichen Sinne, so dass dann der Krümmungsradius kleiner ist, als bei Beginn des Versuchs. Zugleich ist aber während dessen auch jene schon oft erwähnte Lagenveränderung der einzelnen Längszonen gegen den Horizont eingetreten und die Krümmung stellt demnach keine ebene Curve mehr dar, sondern eine solche von doppelter Krümmung, die ähnlich wie eine homodrome Schraubenlinie verläuft.

Betrachtet man die Veränderungen, welche durch das Umkehren in den oberen noch frei nutirenden Partieen einer windenden Pflanze geschaffen werden, so ist einleuchtend, dass zunächst ein ähnlicher Vorgang wie der ebengeschilderte sich abspielen wird. Da die Krümmung dieser Partieen in der Regel eine homodrome ist, so muss dieselbe nach dem Umkehren eine antidrome sein, denn die Krümmung, die vorher (von vorne gesehen) ihre Concavität nach rückwärts richtete, ist jetzt nach vorne geöffnet. Befindet sich dieselbe in annähernd horizontaler Lage, was ja sehr häufig der Fall ist, so müssen also ähnliche Veränderungen eintreten, wie unter den vorhin geschilderten Bedingungen. Aber auch wenn die Lage der Krümmung eine andere ist, so spielen sich doch im Grunde genommen dieselben Vorgänge ab. Immer muss in kurzer Zeit eine homodrome Krümmung erzielt werden und damit sind auch wieder dieselben Bedingungen gegeben. Dadurch wird aber zunächst bewirkt, dass die Concavität der Krümmung im frei nutirenden äusseren Theile sehr bald nach hinten gekehrt wird, dass also die Stütze an die Convexität derselben zu liegen kommt. Diese

homodrome Krümmung wird aber nicht blos in dem frei nutirenden Ende, sondern sie wird auch in einer der Stütze bereits anliegenden Strecke sich bemerkbar machen, denn dieselbe ist ja noch nutationsfähig und die schraubenlinige Krümmung ist noch keine bleibende geworden. Es leuchtet nun sofort ein, dass auf diese Weise auch die mehr zurückliegende Partie ähnliche Bewegungen ausführen wird, wie die vorher frei nutirende, und dass hierdurch die erstere sich von der Stütze abwickeln, ja sogar derselben die Convexität der Krümmung zukehren wird.

Diese Bewegungen lassen sich sehr leicht beobachten und das Experiment bestätigt die obigen, zunächst theoretischen Betrachtungen sofort. Nun sieht man aber auch bei solchen Versuchen, dass nach der Aufrichtung der äusseren Partie, infolge des negativen Geotropismus und der Nutation, sehr oft ein Contact derselben mit der Stütze eintritt, da die letztere den weiteren Nutationsbewegungen hindernd in den Weg tritt. Der Erfolg dieses Contactes und der hierdurch hervorgerufenen Spannung muss aber jetzt offenbar ein ganz anderer sein als in der normalen Stellung der Pflanze, denn jetzt kann durch jene Spannung nicht etwa ein Anziehen des Stengels an die Stütze erfolgen, sondern es muss vielmehr in einer der Stütze noch anliegenden Partie ein passives Wegkrümmen von derselben erzielt werden. Ist der Contact wieder aufgehoben, so wird bald wieder eine annähernd horizontale Lage erreicht werden, zugleich muss aber auch in jenen noch nutationsfähigen Partieen, die der Stütze noch anliegen, aus den oben angegebenen Gründen die vorhandene Krümmung flacher werden und schliesslich in eine andere verwandelt werden, deren Convexität der Stütze zugekehrt ist. Tritt dabei ein nochmaliger Contact in den oberen Partieen ein, so wird jenes Abwickeln von der Stütze noch beschleunigt.

Auf diese Weise erklärt es sich ganz ungezwungen, dass beim Umkehren der Pflanze schliesslich die ganze noch nutationsfähige Partie von der Stütze in verhältnissmässig kurzer Zeit wieder abgelöst wird. Die einmal fertig gebildeten Schraubenwindungen bleiben natürlich erhalten und nachdem die geotropische Krümmung so stark ist, dass die nutirende Partie annähernd vertical steht, stellt sich das normale Winden wieder ein, denn jetzt müssen die Greifbewegungen und ebenso das

Zusammenwirken von Geotropismus und Nutation wieder dasselbe Resultat ergeben, wie in der aufrecht gestellten Pflanze.

Es ist also eine Nothwendigkeit, dass beim Umkehren einer Pflanze durch die veränderte Lage der einzelnen Zonen gegen den Horizont und die damit verbundenen Veränderungen im Zusammenwirken von Geotropismus und Nutation ein Abwickeln der jüngsten noch nicht fertigen Windungen eintritt; es ist demnach gänzlich ungerechtfertigt, wenn Sachs auf Grund dieser sehr einfachen Erscheinung eine allerdings nicht näher von ihm definirte Reizbarkeit der windenden Pflanzen annehmen zu dürfen glaubt.

Die Frage, weshalb bei Rotation der Pflanze um eine horizontale Achse die obersten Windungen wieder abgewickelt werden, ist schon im ersten Theile näher erörtert worden. Es leuchtet sofort ein, dass bei Aufhören des Geotropismus und der regelmässigen Nutation auch das Winden nicht mehr stattfinden kann; auch wurde bereits dargelegt, dass in diesem Falle der Stengel nicht wieder vollständig gerade gestreckt werden kann, da die durch Greifbewegungen und Geotropismus früher entstandenen Krümmungen beibehalten werden müssen, denn der Geotropismus, welcher ein Ausgleichen derselben bewirken könnte, ist ausgeschlossen.

§ 6.

Bedeutung der scheinbaren antidromen Torsion für das Winden.

Den Zusammenhang der wirklichen antidromen Torsion und ihre Bedeutung für das Winden hat Schwendener bereits genügend klar gelegt, so dass ich mich hier nicht näher damit zu beschäftigen brauche. Nur darauf möge noch kurz hingewiesen werden, dass die Quantität jener wirklichen Torsionen von dem Durchmesser der Stütze abhängt. Während bei sehr dünnen Stützen nach den in § 4 mitgetheilten Bemerkungen nur geringe Torsionen dieser Art auftreten können, weil bei den wirksamen Greifbewegungen kein bedeutendes Torsionsmoment vorhanden ist, müssen bei Stützen von mittlerer Dicke schon stärkere Drehungen erzielt werden, denn hier sind wirksame Greifbewegungen auch in den oberen Theilen des Sprossendes häufig vorhanden, sie treten in der Regel bei jedem Nutationsumgange auf,

und ausserdem sind auch die Spannungen, welche jene Torsionen herbeiführen, bedeutend stärker. In noch höherem Grade gilt dies für das Winden um dicke Stützen, deren Durchmesser nahe dem Grenzwerthe liegt; wobei also der grössere Theil des ganzen nutationsfähigen Sprossendes eine lange andauernde Greifbewegung ausführt.

Demgemäss findet man in dem letzteren Falle eine sehr starke antidrome Torsion vor, wie Schwendener ganz richtig bemerkt hat. Mit dem Stärkerwerden dieser Torsionen wird aber auch die Amplitude der Nutationskrümmungen geändert, denn denkt man sich einen nutirenden Stengel stark gedreht, so bilden jetzt die successive stärker sich ausdehnenden Zonen Schraubenlinien mit verhältnissmässig eng aneinander liegenden Windungen, es muss also die Nutationskrümmung eine Schraubenlinie darstellen, die um einen Cylinder mit geringem Durchmesser verläuft. Je stärker demnach die Torsion wird, desto kleiner muss dieser Durchmesser werden; dazu kommt noch, dass in diesen Fällen ausser der Krümmung in verschiedenen Ebenen auch noch eine Verstärkung der Torsion auftreten wird, denn wenn eine schraubenlinig um einen Stengel verlaufende Zone stärker wächst wie die übrigen, so muss neben der krümmenden Componente auch noch eine drehende vorhanden sein, die eine Verstärkung der einmal vorhandenen Torsion bedingt.

Bei dicken Stützen zeigt immer schon ein bedeutender Theil der nutationsfähigen Zone starke antidrome Torsionen und es können in den gedrehten Partieen demnach die Nutationsbewegungen nicht mehr so ausgiebig sein, als wie in den obersten Internodien. Daraus folgt auch, dass die der Stütze einmal anliegenden Internodien sich nicht so leicht wieder von derselben wegwenden können, wenn durch die Bewegungen der oberen Partieen und durch den Einfluss des Geotropismus lange andauernde wirksame Greifbewegungen hergestellt werden.

Bei dünnen Stützen dagegen, wo die Torsionen gering sind, müssen die Nutationsbewegungen auch in den weiter von der Spitze entfernt liegenden Theilen noch eine ansehnliche Amplitude besitzen und erst wenn schliesslich beim allmäligen Aufhören derselben das völlige Geradestrecken des Stengels durch die Stütze verhindert wird, können die bleibenden Schraubenwindungen zu Stande kommen.

Es steht also die Bewegungsfähigkeit der tordirten Internodien mit der Quantität dieser Torsionen in einem ganz bestimmten Zusammenhange und deshalb sind die letzteren von grosser Bedeutung für den Vorgang des Windens selbst.

Etwas anders verhält es sich mit den scheinbaren Torsionen, deren Ursachen in den §§ 1 und 2 auseinandergesetzt wurden. Die wesentliche Bedeutung derselben für das Winden ist, wie schon aus den vorigen Paragraphen hervorgeht, darin zu suchen, dass infolge der Lagenveränderung der einzelnen Längszonen gegen den Horizont eine geotropische Krümmung herbeigeführt wird, die annähernd eine homodrome Schraubenlinie darstellen muss. Bei sehr dünnen Stützen werden deshalb in den frei nutirenden Enden ziemlich häufig flache oder auch steiler aufsteigende schraubenlinige Krümmungen zu Stande kommen, die zwar nicht bleibend sind, die aber das Umschlingen der Stütze wesentlich begünstigen. Bei Stützen von mittlerer Dicke wird in den Zeiträumen, wo die äussersten Partieen frei nutiren, etwas Aehnliches eintreten und dadurch das abermalige Zustandekommen der Greifbewegung nur beschleunigt werden. Zugleich muss aber durch die bei dem letzteren Vorgange eintretende antidrome Torsion die infolge der geotropischen Einwirkung wachsende Zone auf die Convexität der schraubenlinigen Krümmung zu liegen kommen. Dies wird sich fast bei jedem Nutationsumgange in derselben Weise wiederholen und es müssen deshalb auch die geotropischen Krümmungen zur Bildung der schliesslich vorhandenen bleibenden Schraubenwindungen wesentlich beitragen. Noch viel mehr gilt dies für sehr dicke Stützen, bei denen sich die Spitze fast gar nicht ablöst; hier wird immer wieder die früher nach unten gekehrte Zone nach aussen gelangen und somit die Concavität der geotropischen Krümmung der Stütze zugekehrt werden.

Da das Aufrichten der Stengel auch in diesem Falle wie in den beiden vorigen schliesslich nur durch die Stütze verhindert wird, so müssen die vorhandenen geotropischen Krümmungen wesentlich dazu mitwirken, die Spitze so fest an die Stütze anzudrücken, dass jenes Aufrichten nicht stattfinden kann, dass also eine bleibende schraubenlinige Krümmung entstehen muss.

Beachtet man ferner noch, was in § 2 über den Einfluss des Geotropismus auf eine schraubenlinige Krümmung gesagt wurde,

so leuchtet ein, dass in den noch wachsthumsfähigen, aber bereits Schraubenwindungen bildenden Partieen auch stets ein Anpressen des Stengels an die Stütze stattfinden muss, denn beide Krümmungsradien der Curve würden infolge des Geotropismus kleiner werden, wenn nicht die Stütze den damit verbundenen Bewegungen Widerstand entgegensetzte.

Das Gesagte dürfte genügen, um die Bedeutung der scheinbaren Torsionen, die mit den Lagenveränderungen einer um horizontale oder etwas geneigte Achse nutirenden Spitze zusammenhängen, für die weiteren Bewegungen einer windenden Pflanze darzulegen.

§ 7.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Die von Baranetzky angenommene »transversale Krümmung« erklärt sich ohne Schwierigkeit aus dem Zusammenwirken der Nutation und des Geotropismus, welches stets dann eintreten muss, wenn die Nutationsbewegungen um eine horizontale oder schief gestellte Achse stattfinden.

2. Die von Kohl angenommene Reizbarkeit der windenden Stengel ist nicht vorhanden, die Stütze wirkt nur dadurch auf die Bildung von Schraubenlinien ein, dass sie den Nutations- und geotropischen Krümmungen der Sprossenden einen gewissen Widerstand entgegensetzt.

3. Die nothwendigen Factoren für das Winden sind: die Circumnutation, der negative Geotropismus und der Widerstand, welchen die Stütze den Bewegungen des Sprossendes entgegensetzt.

4. Bei den Bewegungen eines nutirenden Sprossendes um eine horizontale oder schief gestellte Achse werden zeitweise scheinbare antidrome Torsionen erzielt, die für die weitere Einwirkung des negativen Geotropismus von Bedeutung sind.

5. Die Mitwirkung des negativen Geotropismus beim Zustandekommen der bleibenden Schraubenwindungen besteht einestheils in dem Aufwärtskrümmen der in horizontale oder schiefe Lage gebrachten Sprossenden, anderntheils in der Herstellung von Krümmungen, die durch das stärkere Wachsthum

einer ähnlich wie eine homodrome Schraubenlinie um den Stengel verlaufenden Curve erzielt werden.

6. Das Winden um sehr dünne Stützen erfolgt im Wesentlichen unter denselben Umständen, wie das Umschlingen dickerer Stützen, und die dabei auftretenden Bewegungen sprechen weder gegen die Wirkung der Greifbewegungen, noch für eine den windenden Stengeln eigenthümliche Reizbarkeit.

7. Das Abwickeln der obersten Windungen beim Umkehren der Pflanzen lässt sich durch die relativ umgekehrte Nutationsrichtung und die damit verbundene Aenderung in dem Zusammenwirken von Nutations- und geotropischen Krümmungen vollständig erklären. Es ist deshalb kein Grund vorhanden, aus diesem Vorgange auf eine, wenn auch nicht näher definirte, Reizbarkeit der windenden Pflanzen zu schliessen, wie dies von Sachs geschehen ist. Vielmehr wird durch dieses Abwickeln bewiesen, dass die Bildung bleibender Schraubenwindungen nicht möglich ist, wenn in dem Zusammenwirken der oben genannten drei Factoren eine Aenderung eintritt.

Anhang.

(Anmerkung zu Seite 59.)

Auf S. 59 wurde die Berechnung der Werthe für cos a und tg C nicht genauer ausgeführt, es soll dies im Folgenden noch nachgeholt werden.

Der Supplementwinkel der Seite a gehört einem sphärischen Dreieck an, in welchem ein Winkel ein Rechter und die denselben einschliessenden Seiten gleich $90^0 - \alpha$ und β sind. Jene Seite, welche den Supplementwinkel von a darstellt, liegt dem rechten Winkel gegenüber.

Es lässt sich demnach dieselbe, die wir z nennen wollen, berechnen aus der Gleichung:

$$\cos z = \cos (90^0 - \alpha) . \cos \beta$$
$$= \sin \alpha \cos \beta .$$

Da aber $z = 180^0 - a$,

so ist:

$$\cos a = - \sin \alpha \cos \beta .$$

Die Bestimmung von tg C lässt sich ebenfalls an dem eben betrachteten sphärischen Dreiecke ausführen.

C ist das Supplement des Winkels, welcher in jenem Dreiecke der Seite $90^0 - \alpha$ gegenüberliegt.

Wir haben demnach, wenn wir diesen Winkel mit B bezeichnen, folgende Gleichung:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg}(90^0 - \alpha)}{\sin \beta}$$

$$= \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sin \beta} \,.$$

Da aber $$B = 180^0 - C\,,$$
so gilt für C die Gleichung:

$$\operatorname{tg} C = - \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sin \beta} \,.$$

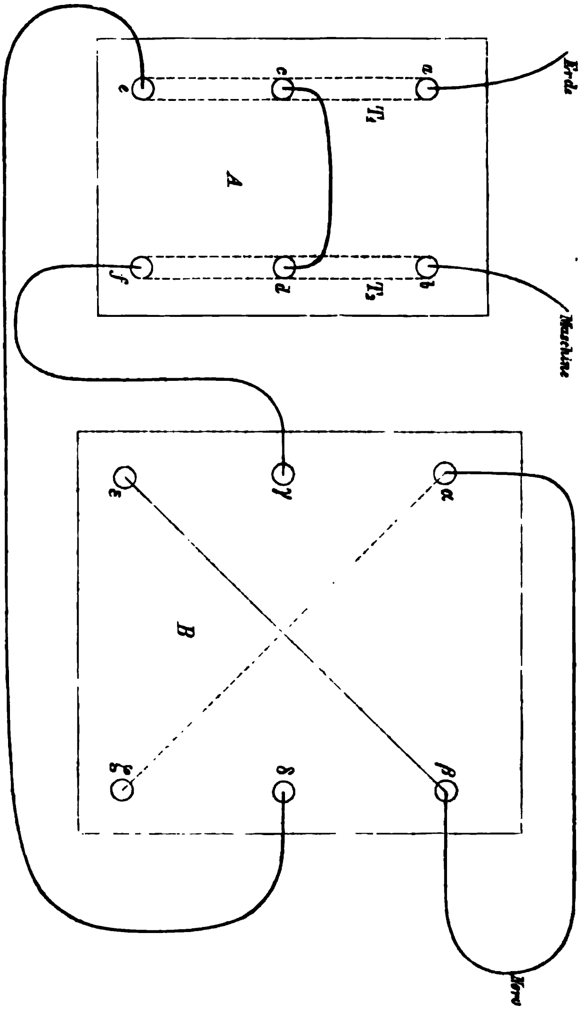
M. von Frey und **E. Wiedemann**, *Ueber die Verwendung der Holtz'schen Maschine zu physiologischen Reizversuchen.*

Die meist zur Erzeugung elektrischer Reize verwandten Hülfsmittel sind das Inductorium und die galvanische Batterie. Beide haben gewisse Nachtheile: bei letzterer lassen sich die Reize nicht in beliebig schneller Aufeinanderfolge herstellen, während bei ersterem jeder Inductionsstoss, sei es, dass er einer Oeffnung oder Schliessung des primären Stromes entspricht, ein äusserst complicirtes Gebilde darstellt. An eine erste Hauptentladung reiht sich eine grosse Reihe von Partialentladungen von abnehmender Stärke. Ihre Zahl und die Stärke einer jeden derselben hängt von den speciellen Versuchsverhältnissen, dem Widerstande des Nerven etc. ab.

Wir haben daher versucht, die Holtz'sche Maschine zu physiologischen Versuchen zu verwenden. Die bisherigen Versuche sind durchaus befriedigend ausgefallen.

Die Versuchsanordnung ist folgende: Der eine Pol der Maschine ist zur Erde abgeleitet, der andere wird durch einen mit Kautschuk übersponnenen Draht mit oder ohne Einschaltung des Nerven zur Erde geführt. Um dies zu bewerkstelligen, dienen folgende zwei Vorrichtungen: A ist ein in eine Pappschachtel gegossener Paraffinklotz, in den zwei T-Röhren T_1 und T_2 eingesetzt sind. Ihre Schenkel sind sämmtlich so gebogen, dass sie aus dem Paraffin heraussehen. Die T-Röhren selbst sind mit Quecksilber gefüllt. In die Oeffnungen a und b und e und f werden die Zu- und Ableitungsdrähte gesetzt; c und d können durch einen Metallbügel direct verbunden werden. In einen zweiten Paraffinklotz B sind sechs U-Röhren eingesetzt $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$.

In die nach aussen stehenden Schenkel derselben tauchen die Zuleitungsdrähte, während in ihre inneren weiteren Schenkel



sich die Enden zweier ∩ gebogenen Kupferdrähte *k* und k_1 einsenken, die an einem Hartgummistabe befestigt sind. Da noch

ausserdem α und ζ und ε und β durch Drähte, wie die Figur zeigt, verbunden sind, so stellt das Ganze einen Commutator dar.

Die Verbindungen selbst werden in der folgenden Weise dargestellt: Zu dem Napf *b* wird der Strom der Maschine geleitet, der, falls der Bügel *l* eingeschaltet ist, unmittelbar nach *c* und von da durch *a* zur Erde abfliesst. Wird *l* herausgenommen, so geht der Strom nach *f*, dann nach γ. Von hier fliesst er, je nachdem die Bügel *k* und k_1, γ und ε und δ und ζ oder aber γ und α und δ und β verbinden, in einem oder im anderen Sinne durch den Nerven, um über δ, *e* und *a* zur Erde abzufliessen.

Um den Strom der Maschine in passender regelmässiger Weise zu unterbrechen, wurde in den Stromkreis zwischen die Maschine und den Napf *b* zunächst ein Widerstand und dann ein Entladungsrohr eingeschaltet. Der Widerstand selbst bestand aus einem V-Rohr mit ca. 1,5 cm weiten Schenkeln; von diesen stand der eine vertical, der andere war unter ca. 45° gegen den Horizont geneigt. Die beiden Schenkel wurden zunächst mit Quecksilber gefüllt, in den verticalen Schenkel tauchte der Zuleitungsdraht von der Maschine, in den schrägen Schenkel wurde dann ein Glasrohr von ca. 7 mm Weite, das oben erweitert war und das sich in demselben auf- und niederschieben liess, eingeführt. In dasselbe wurde Wasser gegossen und von oben ein Kupferdraht eingesetzt, der den Strom zu der Entladungsröhre weiter leitete. Durch Herausziehen und Hineinschieben des engeren Rohres konnte man grössere oder kleinere Widerstände einschalten. Frühere Versuche hatten nun gezeigt, dass dadurch die Zahl der Entladungen wesentlich verändert wird, indem, je grösser der Widerstand ist, um so grösser die Zahl der Entladungen wird.

Ohne Einschaltung von Widerständen entlädt sich nämlich, sobald einmal das Potential an den Elektroden eine bestimmte Höhe erreicht hat, die ganze auf den Electroden, auf den diese mit der Maschine verbindenden Leitern und auf einem Theil der Platten der Maschine befindliche Elektricitätsmenge auf einmal; sie fliesst den Elektroden so schnell zu, dass dort das Potential trotz des Abflusses von Elektricität nicht so weit sinken kann, dass ihr Uebergang aufhörte. Bei Einschaltung von Widerständen wird aber der Zufluss der Elektricität immer langsamer und langsamer und es tritt wesentlich nur die Elektricitäts-

menge über, die auf der Electrode selbst und in deren nächsten Nähe sich befindet. Bei gleicher Intensität des Stromes treten daher immer zahlreichere Entladungen ein.

Das Entladungsrohr selbst war etwa 3 cm weit und hatte zwei spitze, etwa 2 mm von einander abstehende Electroden. Durch ein Ansatzrohr war es mit einer Quecksilberpumpe verbunden. Die Drucke betrugen ca. 1—3 mm. Als Gas wurde meist Luft verwandt; nur in den Fällen, wo Beobachtungen im rotirenden Spiegel stattfanden, wurde Kohlenoxyd, der grösseren Intensität des von ihm ausgegebenen Lichtes wegen, eingeführt. Versuche mit anderen Formen von Entladungsröhren, besonders solchen mit capillarem Zwischenstück, zeigten, dass bei diesen das Potential zur Entladung und damit die bei jeder einzelnen Entladung übergehende Elektricitätsmenge so gross war, dass die von uns zunächst gesuchten physiologischen Grenzwerthe der Reizung ausserordentlich hoch zu liegen kamen. Wir haben daher vorläufig die oben beschriebene Röhre vorgezogen.

Die Zahl der Entladungen wurde auf zwei Wegen zu bestimmen versucht. Einmal mittelst eines rotirenden Spiegels. Neben der Entladungsröhre, durch die der die Reize liefernde Strom floss, wurde eine zweite aufgestellt, durch welche der secundäre Strom eines Inductoriums ging, dessen primärer mittelst einer Stimmgabel eine bestimmte Anzahl von Malen in der Secunde unterbrochen wurde und die Entladungsbilder beider Röhren wurden in einem rotirenden Spiegel betrachtet. Man bestimmte dann, wieviel Entladungsbilder des ersten Stromkreises zwischen zweien des zweiten lagen. Diese Methode liess deutlich erkennen, dass die Entladungen mit grösster Regelmässigkeit auf einander folgten. Da sich aber später herausstellte, dass die in Betracht kommende Zahl der Entladungen eine sehr grosse war und die Lichtstärke derselben dem entsprechend sehr gering wurde, so verwandten wir ein Telephon, das zwischen *b* und die Entladungsröhre eingeschaltet wurde.

Die meist eintretende grosse Klarheit des Tones war ein Zeichen für die Regelmässigkeit der Intervalle zwischen den aufeinander folgenden Entladungen. Nur in einem Falle traten Unregelmässigkeiten auf. Vergrössert man den Widerstand von seinem kleinsten Werthe ausgehend, so entwickelt sich zunächst ein tiefer Ton, der allmälig steigt; bei einem bestimmten Widerstande hört man aber ein blasendes Geräusch, dem eine flak-

kernde unruhige Entladung entspricht; eine weitere Vermehrung des Widerstandes macht den Ton wieder klar und höher. Wir werden auf diese Erscheinung später zurückkommen. Man kann die Tonhöhe bis über die Grenzen der Hörbarkeit hinaussteigern. Ist der Nerv eingeschaltet, so ist meist der Ton höher als ohne denselben und muss daher die Tonhöhe bei Einschaltung desselben ermittelt werden.

Sehr sorgfältig muss bei den Versuchen jede Funkenstrecke vermieden und darauf geachtet werden, dass der Nerv und der mit ihm verbundene, die Zuckungen aufschreibende Muskel von der Erde isolirt ist, indem sonst grosse Unregelmässigkeiten eintreten. Die ganzen Räume werden elektrisch geladen und zwar in einem bestimmten Rhythmus, und man erhält tetanische Reizungen, sobald sich ein Strom durch den Nerven ausgleichen kann. Berührt man z. B. mit dem an einer Pincette gehaltenen Nerv-Muskel-Präparat die Gasleitung, so tritt Tetanus auf, welcher ausbleibt, sobald man die Pincette mit einem isolirenden Glasstab vertauscht.

Die Isolirung wurde in folgender Weise bewerkstelligt. Die von dem Näpfchen α und β kommenden mit Kautschuk überzogenen Kupferdrähte waren in die amalgamirten Zinkstäbchen der nicht polarisirbaren Pinselelectroden eingeschraubt. Letztere waren auf Korke aufgebunden, die selbst von Glasröhren isolirt getragen wurden. Der Knochen des Froschschenkels war in ein Glasrohr eingekeilt. Die Verkürzungen des Muskels konnten durch eine passende, gleichfalls isolirte Schreibvorrichtung auf einer rotirenden Trommel aufgezeichnet werden.

Die Stromrichtung liess sich unmittelbar aus dem verschiedenen Aussehen der beiden Electroden erkennen.

Die Zahl und Intensität der Reize lässt sich durch Veränderung einer der drei folgenden Grössen variiren: 1) des Widerstandes; 2) der Umdrehungsgeschwindigkeit der Holtz'schen Maschine, die bei unseren Versuchen durch einen Schmidt'schen Wassermotor getrieben wurde, und endlich 3) durch Veränderung des Druckes im Entladungsrohr.

Die Reize sind sämmtlich als von nahezu unendlicher Steilheit anzusehen, da die Entladungen instantan erfolgen. Bestimmt man ihre Zahl und gleichzeitig die Intensität des Stromes in einem Galvanometer, das zwischen a und b eingeschaltet ist,

so kann man die jedem Reize entsprechende Elektricitätsmenge quantitativ bestimmen.

Die physiologischen Erfolge, die sich beobachten lassen, wenn ein Stück eines Froschnerven in die Erdleitung aufgenommen wird, bestehen in Zuckung oder Tetanus des zugehörigen Muskels. Das gewöhnliche Resultat ist Tetanus und zwar, entsprechend der Gleichartigkeit der Entladungen, sehr regelmässige Tetani, bei welchen die neue tetanische Gleichgewichtslage sehr rasch erreicht und dann ohne erhebliche Contractur festgehalten wird, eine Erscheinung, die mit den Erfahrungen des Herrn Bohr in Uebereinstimmung steht. Die Tetani können maximal oder untermaximal sein. Diese Ausdrücke bedeuten zwar ursprünglich, dass der Tetanus aus maximalen oder untermaximalen Zuckungen zusammengesetzt ist; sie lassen sich aber auch ohne Kenntniss der Einzelzuckung anwenden, insofern bei stets gleicher Form der tetanischen Curve die erreichten Verkürzungen als maximale oder untermaximale bezeichnet werden. Zuckungen durch einzelne Entladungen zu bewirken, ist uns bisher nicht gelungen, und es ist fraglich, ob es überhaupt ausführbar ist aus vielen Hunderten, ja vielen Tausenden Entladungen innerhalb einer Secunde eine einzelne abzusondern. Dagegen ist die Versuchsanordnung sehr geeignet, die physiologisch wichtige Frage zu prüfen, ob die Grösse des Reizerfolges mit der Zahl der Entladungen stets wächst oder ob es einen Wendepunkt gibt, von welchem an die Erfolge sich mindern, speciell ob die tetanische Reizung verschwindet. Gerade über diesen Punkt gehen die Erfahrungen der Physiologen sehr auseinander. Manche, wie Kronecker und Stirling, bezweifeln das Vorhandensein eines solchen Wendepunktes innerhalb der technisch herstellbaren Schwankungsfrequenzen, indem sie selbst bei 22 000 Schwankungen des Reizes pro Sec. noch Tetani beobachteten. Andere haben von einer gewissen Schwankungszahl ab die Tetani verschwinden und einzelne Zuckungen, sogenannte Anfangs- und Endzuckungen, an deren Stelle treten sehen. Zuweilen fehlte auch jede Reaction. Die Schwankungsfrequenzen, welche zur Hervorbringung dieser Erscheinung nöthig waren, oder die Grenzzahlen, wie ich sie der Kürze halber nennen will, bewegen sich zwischen den Werthen von 100 bis zu einigen Tausend in der Secunde. Die grossen Differenzen der Werthe sind nicht erstaunlich, wenn man erwägt, dass ausser der

Anzahl der Schwankungen auch die Form derselben bezogen auf die Zeit (Engelmann), die Intensität (Engelmann, Bernstein, v. Kries), die Temperatur des Nerven (v. Kries) und seine Ermüdung (Engelmann) von Einfluss sind. Es haben somit auch unsere Werthe nur Giltigkeit für die gegebene Entladungsform und für die zur Verfügung stehenden Intensitätsgrenzen. Die Temperatur der Nerven war die des Zimmers, etwa 15° C., und der Einfluss der Ermüdung wurde durch Anwendung möglichst frischer Nerven eliminirt.

Wir finden für jeden Nerven eine Grenzzahl der Entladungen, von welcher ab kein Tetanus mehr erscheint, sondern nur eine Anfangs- oder Endzuckung, zuweilen auch beide, je nach der Richtung des Stromes; Erscheinungen, wie sie sich bei Reizungen mit constanten Strömen einstellen. Die Werthe der Grenzzahlen schwanken zwischen 3000 und 15 000 in der Secunde. Die genaue Bestimmung der Zahlen und ihre Abhängigkeit von der Intensität muss weiteren Versuchen vorbehalten bleiben. Die obere Grenze lässt sich durch Wahl anderer Entladungsröhren wahrscheinlich noch höher hinauftreiben.

Ihre Bestimmung mittelst des Telephons bietet infolge des unvollkommenen musikalischen Charakters so hoher Töne nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Da aber diese Werthe und noch höhere unter stetiger Aenderung der Tonhöhe sich gewinnen lassen, so ist scharf bewiesen, dass der geänderte physiologische Effect nicht auf einer qualitativen Aenderung des Reizes beruhen kann.

Merkwürdiger Weise zeigte sich hierbei eine neue Abhängigkeit, welche für die einsinnigen Stromschwankungen charakteristisch sein dürfte. Der Werth der Grenzzahl ist nämlich für ein gegebenes Nervenstück verschieden je nach der Richtung, in welcher die Schwankungen hindurchgeschickt werden. Der Unterschied kann sich auf mehrere tausend Entladungen belaufen. Meistens verschwindet bei absteigender (gegen den Muskel gewendeter) Stromrichtung der Tetanus erst bei viel höheren Entladungszahlen, als bei aufsteigender. Indessen kommt auch das Umgekehrte vor. Die Erklärung dieser Erscheinung dürfte sich ohne Schwierigkeit aus der Betrachtung ergeben, dass die meisten Stellen des Nerven für die beiden Stromrichtungen verschieden empfindlich sind. In der wirksameren Richtung ist der Erfolg der Entladungen genau derselbe, als wenn ihre

Intensität verstärkt worden wäre und es ist somit begreiflich, dass die tetanische Erregung erst bei höheren Grenzwerthen ausbleibt.

Ob sich die Grenzwerthe bei höherer Intensität der Einzelentladung noch weiter treiben lassen, müssen wir vorläufig dahin gestellt sein lassen. Dass aber der Nerv unter günstigen Umständen sehr hohen Frequenzen zu folgen im Stande ist, scheint uns nach den auf so verschiedenen Wegen übereinstimmend erhaltenen Resultaten von Kronecker und von uns nicht länger zweifelhaft zu sein.

Einige Versuche mit dem curarisirten Froschmuskel zeigten, dass ohne Einschaltung grösser Funkenstrecken keine Reizung zu erhalten war.

SITZUNG AM 23. APRIL 1885.

Herm. Credner, *Die obere Zechsteinformation im Königreich Sachsen.*

Nachdem im Jahre 1867 die kgl. preussische geologische Landesanstalt in's Leben gerufen worden war, beschäftigten sich deren Geologen zunächst mit der Untersuchung und kartographischen Aufnahme des *Unterharzes* und der denselben südlich umrandenden Gebiete. Das specielle Studium der dort typisch und in grösstmöglicher Vollständigkeit entwickelten *Zechsteinformation* liess es E. Beyrich dem Zwecke einer naturgemässen Gruppirung verwandter Schichtencomplexe dienlich erscheinen, die bis dahin meistentheils zum Buntsandstein gerechneten und als dessen unterstes Glied aufgefassten gypsführenden bunten Letten zur Zechsteinformation zu ziehen, wie dies von Th. Liebe in dem ostthüringischen Zechsteinareale schon seit dem Jahre 1855 geschehen ist. Durch diesen Zuwachs vermehrten sich die Glieder dieser letzteren um eine obere Abtheilung, welche sich auf Grund der bezüglichen Publicationen der kgl. preussischen geologischen Landesanstalt wie folgt charakterisiren lässt:

Obere Zechsteinformation, rothe, braune, grünliche, violette oder bläuliche *Letten* mit dünnen Lagen von dichtem *Kalkstein*, sowie mit knollen- oder klotzförmigen Partien oder auch bankförmigen Platten von porösem bis zellig-löcherigem *Dolomit* und endlich mit Stöcken oder Lagern von *Gyps* (dem jüngeren Zechsteingyps). *Liegendes*: die den älteren Anhydrit und Gyps bedeckenden Stinkschiefer und Dolomite. *Hangendes*: die feinkörnigen, rogensteinführenden Sandsteine, oder die röthlichen, glimmerreichen, sandigen Schieferletten des unteren Buntsandsteins.

Bezüglich des *westlichen* Harzrandes gelangte O. Speyer *) zu vollkommen gleichen Resultaten. Auch er fasst die bunten Letten mit knollenförmigen Dolomiten, dichten Kalksteinen und Gypslagern, wie sie sich an die Stinkschiefer anschliessen, als *obere Abtheilung der Zechsteinformation* auf.

Diese Dreigliederung der letzteren und ihre Abgrenzung gegen die Trias hat seitdem auf sämmtlichen den südlichen und westlichen Harzrand, sowie das Gebiet von Mansfeld bis Halle umfassenden Blättern der geologischen Specialkarte des Königreichs Preussen und in den begleitenden Texten **), ebenso auch auf Lossen's geognostischer Übersichtskarte des Harzgebirges ihren Ausdruck gefunden. Sie ist dem zu Folge auch schon längst in Werke, welche Lehrzwecken ***) oder zur Anleitung praktischer geologischer Studien †) dienen, aufgenommen und dadurch in weitere Kreise als anerkanntes Forschungsresultat eingedrungen.

Die oben dargelegte Ausbildungsweise der oberen Zechsteinformation des westlichen und südlichen Harzrandes sowie des Mansfeldischen beginnt jedoch bereits am Kyffhäuser dadurch eine Modification zu erhalten, dass sich zwischen die gypsführenden Letten ein *Plattendolomit* einschiebt, durch welchen die Letten und Gypse in eine obere und eine untere Stufe getrennt werden. Diese dadurch erzeugte Dreigliederung des Oberen Zechsteins ist die in *Thüringen* und in *Hessen* herrschende Facies des letzteren ††). Als solche ist sie erkannt, beschrieben und z. Th. kartographisch zum Ausdruck gebracht

*) O. Speyer, Die Zechsteinformation des westlichen Harzrandes. Jahrb. d. kgl. preuss. geol. Landesanst. f. 1880. S. 50.

**) Beyrich, Erläut. zu Blatt Ellrich 1870. S. 12; — Bl. Stollberg 1870, S. 21; — Beyrich und Moesta, Bl. Schwenda 1883, S. 37; — Bl. Wippra 1883, S. 75; — Bl. Kelbra 1884, S. 28; — Bl. Frankenhausen 1884, S. 17; — Kayser, Bl. Lauterberg 1879, S. 23; — Bl. Gerbstedt 1884, S. 6; — Bl. Cönnern 1884, S. 11; — Bl. Artern 1884, S. 4; — Laspeyres, Bl. Petersberg 1874, S. 5; — Moesta und Weiss, Bl. Mansfeld 1884, S. 31; — v. Seebach und Speyer, Bl. Gerode 1884, S. 3; — Speyer, Bl. Eisleben 1884, S. 7.

***) H. Credner, Elemente der Geologie. 1. Aufl. 1872, S. 366; 5. Aufl. 1883, S. 526 und 527.

†) v. Groddeck, Abriss der Geologie des Harzes. 1871, S. 62; 2. Aufl. 1883, S. 74.

††) Vergl. die von Speyer l. c. S. 59 gegebene und in meinen Elementen d. Geologie S. 525 aufgenommene tabellarische Übersicht.

worden z. B. von Beyrich und Moesta in den nordwestlichen Ausläufern des Thüringer Waldes und in Niederhessen*), — von Bücking in der Gegend von Schmalkalden**), — von Liebe in Ostthüringen***).

An diese reussischen Ablagerungen der oberen Zechsteinformation schliessen sich nun diejenigen des Königreichs Sachsen in unmittelbarem, ununterbrochenem Zusammenhange an Blatt Ronneburg der preuss.-thüringischen und Section Meerane der sächsischen geologischen Specialkarte), jedoch keilen sich die *unteren* gypsreichen Letten aus, so dass sich *der obere Zechstein auf die 5 bis 15 m mächtigen Plattendolomite und die bis 15 m mächtigen bunten Letten reducirt.* Nur in der Gegend von Frohburg (Greifenhain) und am Südrande des Mügelner Beckens sind *unter* dem Plattendolomit noch bunte Letten vorhanden.

Das sind die Thatsachen, denen die geologische Landesuntersuchung von Sachsen gegenüber stand, als es sich um Aufnahme, kartographische und textliche Darstellung der kleinen einförmigen und wenig mächtigen Partien der oberen Zechsteinformation handelte, welche sich von Westen, dem Fürstenthume Reuss aus nach Crimmitzschau und Meerane und von hier nach Geithain und Frohburg in das Königreich Sachsen hineinziehen und endlich bei Mügeln, südlich von Oschatz, in Form eines isolirten flachtellerförmigen Beckens auftreten. Es ist bekannt, dass in diesen Gebieten kein einziges Glied der unteren und mittleren Zechsteinformation und als alleiniger Vertreter der Trias ein gering mächtiger Complex von unterem Buntsandstein entwickelt ist.

Auf eine erneute Erörterung der in unseren Nachbarländern unter günstigsten Verhältnissen längst entschiedenen Grenzfrage zwischen Perm und Trias musste unter solchen Umständen als gänzlich zwecklos verzichtet werden. Wir schlossen

---

*) Moesta, Erl. z. Bl. Netra 1876, S. 5; — Bl. Eschwege 1876, S. 3 und 4; — Bl. Waldkappel 1876, S. 1 u. 6; — Beyrich und Moesta, Bl. Sontra 1876, S. 7 u. 13.

**) Jahrb. d. k. preuss. geol. Landesanst. f. 1882, S. 29.

***) Zeitschr. d. Deut. geol. Gesellsch. 1855. S. 427. Taf. XXXIII und XXIV. Übersicht über den Schichtenaufbau Ostthüringens. Abhandl. zur geol. Specialk. von Preussen u. d. thüring. Staaten. Bd. V, Heft 4. Berlin 1884, S. 59; — Erl. z. Bl. Neustadt 1881, S. 15; — Bl. Ronneburg 1878, S. 16; — Bl. Orlamünde 1885, S. 2; — Bl. Gera 1878 u. a. O.

uns vielmehr den Errungenschaften der harzer, hessischen und thüringer Geologen an und zogen wie diese die betreffende Grenze *oberhalb* der bunten Letten, welche demnach auch von uns *zur oberen Zechsteinformation* gerechnet wurden und noch gerechnet werden.

Leider aber hat dieses unser Vorgehen die Missbilligung des Herrn H. B. Geinitz in Dresden von Beginn an auf sich gezogen.

Bereits in seinem im Neuen Jahrbuche für Mineralogie 1878, S. 246 enthaltenen Referate wird an einem der erst erschienenen Blätter der geolog. Specialkarte von Sachsen, Section Rochlitz, ausgesetzt, dass die bunten Letten über den Plattendolomiten von Geithain zur Zechsteinformation gezogen seien, obwohl »sich an vielen Stellen zwischen letzterer und den Letten eine geologische Grenze deutlich nachweisen lasse«.

In seinen Nachträgen zur Dyas I, S. 40 schreibt Geinitz im Jahre 1880: »Nach allen unseren Erfahrungen scheint es sich schwer rechtfertigen zu lassen, wenn unsere Landesgeologen jene Ansicht von der Zugehörigkeit der oberen bunten Letten zur Zechsteinformation von Neuem zu der ihrigen machen«. Er begründet diesen Vorwurf durch die Behauptung (l. c. 39), dass sich die Letten »in die an der Oberfläche vielfach zerklüfteten und buchtenförmig ausgewaschenen Schichten der Plattendolomite ungleichförmig eingelagert haben sollen«.

In ähnlicher Weise spricht sich Geinitz in der Sitzung der Isis zu Dresden im December 1882 aus.

Im März 1883 legte Herr Geinitz der Isis eine briefliche Mittheilung von A. Dittmarsch vor, illustrirt durch mehrere Profile aus der Gegend von Ostrau*), welche »sehr deutlich eine geologische, eine Zeitgrenze zwischen den Plattendolomiten und den bunten Letten nachweise, die man nicht länger durch *gesuchte künstliche* Erklärungen zu verdecken suchen sollte«. Diese Verdächtigung leitete Herr Geinitz mit folgenden Worten ein: »Wie es irriger Weise schon von Murchison aufgefasst ist, werden auch jetzt wieder von mehreren Mitgliedern der geologischen Landesuntersuchung des Königreichs Sachsen jene bunten Letten mit zum Zechstein gerechnet, trotz ihrer sehr deutlich ausgesprochen ungleichförmigen Auflagerung auf

*) Sitzber. d. Isis. 1883, S. 19, Taf. III.

den erodirten Schichten des oberen Zechsteins, welche nur hier und da bei *ungenügender* Beobachtung gleichartig erscheint. Trotzdem ..... *kommen doch immer wieder einige junge Geologen auf diesen Irrthum zurück.*«

Angesichts der Insinuation, als ob es immer wieder *junge* (also wohl unerfahrene, »ungenügend« beobachtende) Geologen wären, die auf diesen »Irrthum« verfallen, fragt man sich unwillkürlich, ob es denn Herrn Geinitz ganz unbekannt geblieben ist, dass die von ihm so hart beurtheilte Grenzziehung von so hoch angesehenen und leider auch nicht mehr jungen Forschern wie Beyrich und Liebe ausgegangen ist? — dass ferner diese bunten Letten nicht von »mehreren Mitgliedern der geologischen Landesuntersuchung von Sachsen«, sondern von allen Geologen Norddeutschlands, die sich neuerdings mit dieser Frage beschäftigt haben, zur Zechsteinformation gezogen worden sind und dass die geologische Landesuntersuchung von Sachsen nur diesem Beispiele gefolgt ist?

Ganz ähnliche Anschauungen über die geologische Stellung der bunten Letten, wie die oben erwähnten, sprach Geinitz in einem Vortrage aus, den er in der Versammlung der Deutschen Geologen zu Hannover im September 1884 hielt*). Auch hier suchte er den Beweis der Richtigkeit seiner Ansicht namentlich durch Vorlegung einer Anzahl von Profilen zu führen, aus denen ein discordantes Lagerungsverhältniss der Letten zum Plattendolomit hervorgehen sollte. Dass dem nicht so sei, dass vielmehr die scheinbare Ungleichförmigkeit der Auflagerung von Seiten der Letten nur eine secundäre Erscheinung sei und auf der nachträglichen Entstehung von »geologischen Orgeln« beruhe, suchte ich schon damals klar zu legen**).

Wie wenig überzeugend jedoch meine Erörterungen damals auf Herrn Geinitz gewirkt haben, zeigt dessen jüngst erschienener Aufsatz***), welcher die längst und wiederholt in Aussicht gestellte ausführliche Erhärtung seiner abweichenden Ansichten enthält. Hier wie früher beruht dieselbe wesentlich auf dem Versuche der Beweisführung, dass *die bunten Letten im*

*) Zeitsch. d. Deut. geol. Gesellsch. 1884. S. 674.

**) l. c. S. 676.

***) Über die Grenzen der Zechsteinformation und der Dyas überhaupt. *Leopoldina* XXI. 1885. S. 52.

Verhältnisse discordanter Auflagerung zu den Plattendolomiten stehen sollen.

Um dies darzuthun hat Herr Geinitz die Gegenden von Crimmitzschau und Meerane, die von Gera, Pössneck, Salzungen und Eisenach von Neuem besucht und die Grenzverhältnisse der Plattendolomite und oberen Letten an der Hand der dortigen Aufschlüsse nochmals studirt. Als Ergebniss resultirte eine Anzahl von durch den oben erwähnten Herrn Dittmarsch bei Crimmitzschau und Meerane aufgenommenen Profilen, nach denen es Herrn Geinitz »unbegreiflich erscheint, wie man da noch von gleichförmiger Lagerung jener Letten über den Plattendolomiten sprechen könne«. Zu ähnlichen Schlüssen gelangte Herr Geinitz in den übrigen oben genannten von ihm aufgesuchten Gegenden.

Der Plattendolomit des oberen Zechsteines besteht in Sachsen*), wie anderwärts, aus schwachen, ebenflächigen, jedoch stark quergeklüfteten Platten eines gelblichweissen bis graugelben, stark dolomitischen Kalksteines, welche fast überall durch dünne Lagen eines grauen oder rothen Lettens von einander getrennt werden. Diese sind zwar meist nur einige Millimeter stark, können aber auch eine Mächtigkeit von mehreren Centimetern, ja Decimetern erreichen und sich so reichlich einstellen, dass die ihnen zwischengeschalteten Dolomitplatten geradezu in den Hintergrund treten und dann den Abbau kaum mehr lohnen. Diese Lettenlagen *zwischen* dem Plattendolomit sind aber genau dieselben wie diejenigen *über* letzterem d. h. wie die der bunten Letten-Stufe. Sieht man nun z. B. in den weit ausgedehnten Brüchen von Geithain, wie die letztgenannte Lettenstufe aus derjenigen der Plattendolomite auf die Weise hervorgeht, dass die Lettenlagen die Dolomitbänke allmählich fast vollständig verdrängen, — verfolgt man, wie zu unterst in der Lettenstufe noch einzelne schwache Lagen von Dolomit auftreten, die sich weiter nach oben zu auf Schmitzen und Knauern reduciren, so erhält man den klarsten, un-

*) Rothpletz, Erl. z. Sect. Rochlitz 1877, S. 56; — Sect. Frohburg 1878, S. 33; — Penck, Sect. Colditz 1879, S. 28; — Dathe, Sect. Döbeln 1879, S. 33; — Siegert, Sect. Meerane 1882, S. 9; — Sect. Oschatz 1885.

zweideutigsten Eindruck einer einheitlichen Schichtenreihe, welche einem ununterbrochenen Sedimentationsprocesse ihren Ursprung verdankt. So klar und unzweideutig liegen hier die Verhältnisse vor Augen, dass ich seit Jahren gewohnt bin, lernbegierige Zuhörer in die Geithainer Brüche zu führen oder zu senden, um ihnen eine Vorstellung von der Verknüpfung zweier Schichtencomplexe durch Wechsellagerung zu verschaffen.

Aber nicht allein Lager von thonigen Letten, sondern auch solche und mächtigere Bänke eines z. Th. schieferigen, z. Th. dolomitischen Sandsteines finden sich zuweilen dem Plattendolomit eingelagert und repetiren dann meist in noch grösserer Anzahl innerhalb der durch Zurücktreten der Dolomitbänke entstehenden Lettenstufe.

Mit dieser Verknüpfung durch Wechsellagerung geht naturgemäss die vollkommenste Concordanz der gesammten Schichtenreihe Hand in Hand. Bei sonst schwebender Lagerung derselben wiederholen sich die kleinen flachwellenförmigen Faltungen und Biegungen der obersten Bänke des Plattendolomites in den auf sie folgenden dünnschichtigen buntgestreiften Letten und deren Einlagerungen (vergl. z. B. das Profil in den Erläut. z. Sect. Rochlitz, S. 57).

Die nämlichen Verhältnisse, wie die eben aus der Gegend östlich von Geithain beschriebenen lassen sich westlich davon bei Frohburg beobachten, nur dass hier local die Letteneinlagerungen im Plattendolomit eine noch grössere Rolle spielen. Ganz das Gleiche gilt einerseits von den weiter nach NO. zu gelegenen Aufschlüssen bei Ebersbach, anderseits von der durch die Pleisse und ihre Nebenflüsse durchfurchten, ebenfalls fast vollkommen schwebend den Ober-Rothliegenden aufgelagerten Platte von Zechsteindolomit und bunten Letten der Gegend zwischen Crimmitzschau, Schmölln und Meerane. Auch an den beiden Stufen der oberen Zechsteinformation des Mügelner Beckens, südlich von Oschatz, wurden dieselben Beobachtungen bezüglich deren concordanter Lagerung gemacht. Namentlich sieht man zur Zeit in den Ostrauer Brüchen sehr schön, wie sich die Letten den flachen Biegungen der Kalksteinschichten anschmiegen. In den Tagebauen von Pfarrsteina und Rittmitz nehmen die Letten in den unteren Horizonten der Plattendolomit-Stufe so stark überhand, dass der Dolomit an erstgenanntem Orte zwar noch zahlreiche, aber nur 1—3 cm starke, den

Letten untergeordnete Platten bildet, — bei Rittmitz sogar auf isolirte Linsen und Knollen reducirt erscheint.

Alle diese Thatsachen sind durchaus nicht neu, sondern bereits von Naumann, dessen Beobachtungstreue gerade die Mitglieder der geologischen Landesuntersuchung von Sachsen so oft zu bewundern Gelegenheit haben, nicht nur in seiner Geognost. Beschreibung Sachsens I. Heft 1845, S. 145, sondern auch in seinem Lehrbuche der Geognosie II. Aufl. II. Bd. 1862, S. 640 u. f. treffend beschrieben*), konnten also von uns nur bestätigt und erweitert werden. Als Resultat seiner an älteren, sowie unserer an neueren Aufschlüssen gemachten Beobachtungen steht fest:

dass die Plattendolomite der oberen Zechsteinformation im Königreich Sachsen und die darauf folgenden bunten Letten durch Wechsellagerung und concordante Schichtenfolge auf das Innigste mit einander verknüpft sind.

Nun ist es aber eine bekannte Thatsache (auf deren Erörterung ich an dieser Stelle nicht wagen würde zurückzukommen, wenn mich nicht die Einwürfe des Herrn Geinitz dazu zwängen), dass dort, wo in kohlensäurehaltigem oder reinem Wasser lösliche Gesteinskörper von letzterem ausgelaugt und entfernt werden, die ursprünglich deren Hangendes bildenden Schichten in die entstehenden Höhlungen dem Gesetze der Schwere folgend nachsinken, d. h. sich setzen. Sind es starre, spröde Gesteine, so brechen sie dabei in Fragmente und Schollen, sind es plastische, im durchfeuchteten Zustande nachgiebige Massen, so quellen sie und senken sich, ohne den Zusammenhang mit ihrer intact bleibenden Fortsetzung zu verlieren, hinab. Jede an Gyps- oder Steinsalzstöcken reiche Gegend liefert instructive Beispiele für diese Vorgänge. Ganz analoge Processe haben sich aber auch hier und dort auf der Grenze zwischen

---

*) Nur in einer Anmerkung l. c. S. 641 citirt Naumann jene »merkwürdigen Ausnahmen« von der regelmässigen Auflagerung, welche Gutbier bereits 1849 (Verstein. d. Zechst. u. d. Rothlieg. Heft II, S. 4) beschreibt. Es sind die geologischen Orgeln, auf die wir weiter unten zurückkommen werden.

Wenn Naumann trotz der von ihm so trefflich geschilderten und wiederholt betonten Gleichförmigkeit des Schichtenverbandes von Plattendolomit und Letten, letztere doch zum Buntsandstein rechnet, so folgt er nur dem damals herrschenden Gebrauche.

Plattendolomiten und den sie concordant überlagernden bunten Letten Sachsens abgespielt und locale Störungen der ursprünglich gleichförmigen Auflagerung im Gefolge gehabt.

In Folge seiner ausgezeichnet bankförmigen Ablösung, namentlich aber seiner stark ausgesprochenen Querklüftung ist der dolomitische Kalk des oberen Zechsteins dem Eintritte und der Circulation von Tagewassern ausserordentlich zugängig. Da letztere Kohlensäure enthalten, so sind alle Klüfte, denen sie folgen, die Ausgangsstellen hydrochemischer Processe und zwar in erster Linie *auflösender Thätigkeit*. Macht sich diese mehr in dem Innern des Dolomitcomplexes geltend, so resultiren entlang einzelnen, dem Wasser besonders zugängigen Querklüften oder auf deren Kreuzungen schluchtähnliche oder unregelmässig gewölbartige kleine *Höhlen*, deren Wandungen sich später mit Kalksinter und Stalaktiten bedecken und auf deren Boden sich ein sehr eisenschüssiger Thon, das Residuum des aufgelösten dolomitischen Kalkes, angesammelt hat. Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Auflösung direct von der hangenden Grenzfläche des Plattendolomites aus, den Klüften nachgegangen ist. Dann bilden sich keine oben geschlossenen Höhlen, sondern *kessel-*, *brunnen-*, *trichter- oder grabenförmige Vertiefungen*, welche in den Plattendolomit von dessen Oberfläche aus mehr oder weniger weit hinab, ja bis auf dessen Liegendes hinunter reichen und auf ihrem Boden und an ihren Wänden einen Überzug von zähem, thonigen, braunen oder schwarzen Eisen- und Manganhydroxyd tragen, den Rückstand des aufgelösten unreinen Dolomites. In diese an ihrer Basis entstehenden Vertiefungen haben sich nun die in durchfeuchtetem Zustande (wie die misslichen Erfahrungen an jedem durch Letten geführten Bahneinschnitte beweisen) aufquellenden und plastischen Letten hinabgezogen und erstere ausgefüllt*). Sie haben dabei meist den Zusammenhang mit ihrer Fortsetzung nicht verloren, sondern dann nur eine der Gestalt der sich bietenden Vertiefung entsprechend steile Stellung angenommen, die in sehr vielen der von uns beobachteten Fälle und zwar in den kessel-, schacht- oder schluchtartigen Einsenkungen eine vollkommen *senkrechte* geworden ist. Schon dieser Umstand hätte

*) Siehe auch A. Penck, Zeitschr. d. Deut. geol. Ges. 1879, S. 134; Th. Siegert, Erl. z. Sect. Meerane, S. 10.

Herrn Geinitz davor behüten sollen, an eine discordante Ablagerung dieser Letten auf den Plattendolomiten zu glauben, da saigere oder steile Schichtenstellung nie eine ursprüngliche sein kann.

Dort, wo diese geologischen Orgeln einen grösseren Umfang erreichen, sind nicht nur die bunten Letten in dieselben nachgesunken, sondern auch die sie direct überlagernden *Oligocänkiese*, ja die diesen folgenden feuersteinführenden *Diluvialschotter* in Mitleidenschaft gezogen worden. Derartige Löcher sind dann von einem in Folge des Einquellens der erweichten Letten durcheinander gekneteten Gemische der letzteren mit den genannten Kiesen ausgefüllt, wie dies Herr Siegert namentlich in den unterirdischen Abbauen des Dolomitlagers südsüdöstlich von Mügeln bei Oschatz beobachtete. Es wird dadurch bewiesen, dass, wie bereits von vorn herein nicht anders zu erwarten, die Bildung derartiger geologischer Orgeln sich noch in der *neuesten*, *postdiluvialen* Zeit vollzogen hat, diese also z. Th. sehr *jugendlichen* Ursprunges sind.

An manchen Stellen findet man die graben- und schluchtartigen Einschnitte, zuweilen auch die wannenförmigen Vertiefungen zu unterst ausgefüllt von einem groben Haufwerke von Dolomitbruchstücken, welche nicht selten durch Kalksinter zu einer Breccie verfestigt sind. Dieselben rühren augenscheinlich von dem Zusammenbruche der Decke höhlenartiger Weitungen her.

Die heutigen Thalsysteme des nordwestlichen und nördlichen Abfalles des sächsischen Mittelgebirges stammen aus jungtertiären Zeiten*). Wo sie die Gebiete der oberen Zechsteinformation kreuzen, sind sie deshalb in diese und z. Th. noch tief in deren Liegendes eingeschnitten. So ist das Thal der Pleisse durch das Oligocän, die bunten Letten und Plattendolomite von Crimmitzschau noch 30 bis 40 m tief in das obere Rothliegende erodirt, während die flachen Thäler der Gegend von Frohburg, Geithain und Mügeln mit ihrer Sohle meist nur eben das oberste Rothliegende erreichen. In beiden Fällen aber ist die in schwebender Lagerung befindliche Platte des oberen Zechsteins und ihre Decke von Oligocänkiesen in Folge der

*) H. Credner. Das sächs. Granulitgebirge und seine Umgebung. 1884. S. 146.

Thalbildung in eine Anzahl von grösseren und kleineren Lappen zerschnitten worden, so dass die Plattendolomite und über ihnen die Letten an den Thalgehängen zum Ausstriche gelangten. Dies ist jedoch heute nicht überall mehr der Fall, — vielmehr sind local die Letten in Folge ihrer Durchweichung mit Wasser und unter dem Drucke der auf ihnen lastenden Oligocän- und Diluvialgebilde über die nur wenige Meter breite Ausstrichzone der Plattendolomite hinabgequollen, haben sich schräg über deren Schnittfläche gelegt und verhüllen diese ganz oder theilweise. Dies gielt nach Herrn Siegert's Untersuchungen auf Section Oschatz namentlich von den flachen Thaleinsenkungen südwestlich von Mügeln. Hier lässt sich auf Grund markscheiderischer Aufnahmen des dortigen Kalksteinflötzes zugleich constatiren, dass letzteres durch die auflösende Thätigkeit der atmosphärischen Gewässer, welche ebenso wie von seiner Oberfläche, so auch von seiner Peripherie aus auf Klüften nach dem Innern zu fortschritt, in lauter zungenförmige Lappen zerschlitzt ist. Der Abbau dieses Lagers stösst dadurch, dass sich in alle diese bald schmalen, bald sich verbreiternden Gräben die Letten und z. Th. auch die Oligocän- und Diluvialkiese hineingesenkt haben, oft auf Hindernisse.

Die oben beschriebenen kessel-, schacht-, brunnen-, wannen- und grabenförmigen Vertiefungen im Dolomitflötze und die Zerschlitzung derselben durch hydrochemische Processe einerseits, — das Nachsinken der dessen Hangendes bildenden erweichten Letten anderseits, — das sind die Erscheinungen, welche bei Herrn Geinitz die Täuschung erweckt haben, *als ob hier die Letten auf dem damals oberflächlich schon stark umgestalteten Dolomite in ungleichförmiger Lagerung zum Absatz gelangt seien.*

Ich hoffe jedoch durch obige Auseinandersetzungen folgende Sätze so bestimmt bewiesen zu haben, dass ich mich durch keinerlei Entgegnung zu nochmaligen Erörterungen derselben veranlasst zu fühlen brauche:

1) *die bunten Letten im Hangenden der Plattendolomite des Königreichs Sachsen sind mit letzteren durch Wechsellagerung und concordante Schichtenfolge auf das Innigste verknüpft und bilden*

deshalb einen einheitlichen Complex, welchen wir nach dem Vorgange unserer preussischen und thüringischen Nachbarn der Zechsteinformation als deren oberste Stufe zurechnen;

2) *das von Herrn* H. B. Geinitz *behauptete discordante Lagerungsverhältniss der Letten zum Plattendolomit beruht auf einer irrthümlichen Deutung ganz localer, secundärer Erscheinungen, welche einerseits in der auflösenden Einwirkung der Sickerwasser auf den dolomitischen Kalkstein, — anderseits in dem Einquellen und Nachsinken der durchweichten Letten in die entstehenden Vertiefungen ihren Grund haben, und verhältnissmässig jugendlicher Entstehung sind.*

SITZUNG AM 4. MAI 1885.

P. Biedermann, *Ueber Multiplicatorgleichungen höherer Stufe*. Vorgelegt von Prof. *Klein*.

Die Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen*) haben in Weierstrass'scher Bezeichnungsweise die Grössen $\frac{\sqrt{\bar{e}_i - \bar{e}_k}}{\sqrt{e_i - e_k}}$ zu Wurzeln. Wenn wir im üblichen Sinne Modulformen und Modulfunctionen unterscheiden (man sehe etwa Hurwitz, Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 544), sind die Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen demnach Gleichungen für transformirte Modulformen, während die Jacobi'schen Modulargleichungen Gleichungen für transformirte Modulfunctionen sind. Mit Bezug hierauf wollen wir überhaupt im Gebiete der elliptischen Functionen algebraische Gleichungen, welche ein System von transformirten Grössen mit nicht-transformirten Grössen verbinden, *Multiplicator-* resp. *Modulargleichungen* nennen, je nachdem es sich dabei um transformirte *Modulformen*, resp. *Functionen* handelt.

In der Litteratur finden sich ausser den Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen noch diejenigen vor, bei denen die Modulformen g_2, g_3**) und $\sqrt[12]{\Delta}$***) resp. $\sqrt[24]{\Delta}$ zu Grunde gelegt sind.

Die folgenden Angaben beziehen sich auf diejenigen Multiplicatorgleichungen, welche sich ergeben, wenn man von den

*) Man vergleiche insbesondere Joubert, »Sur les équations, qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques«, Paris 1876, und Königsberger, »Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen« sowie »Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen«.

**) Man vergleiche die Dissertation von Felix Müller, Berlin 1867.

***) Man vergleiche Klein, Math. Ann. Bd. XV., Kiepert, Crelle Bd. 87, Hurwitz, Math. Ann. Bd. XVIII.

Theilwerthen der σ-Function:

$$\sigma_{\lambda\mu} = -e^{-\frac{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}{2s^2}} \cdot \sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{s},\ \omega_1,\ \omega_2\right)\,{}^{*})$$

ausgeht.

Wie überlegen die neuere Theorie der Modulfunctionen, welche sich auf Gruppen- und Functionentheorie stützt, der älteren gegenüber ist, die mehr oder weniger nur rechnet, zeigt sich hier u. a. darin, dass vom Standpunkte der ersteren aus alle die Eigenschaften, welche beispielsweise Joubert für die Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen nachweist, lediglich als einzelne Glieder einer ganzen Kette von Sätzen erscheinen. Weiter mag einleitend bemerkt werden, dass die hier angestellten Betrachtungen zu der Einsicht führen, dass es gelingt, alle Multiplicator- und Modulargleichungen allein von den $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgehend zu behandeln**).

§ 1. Bemerkungen über die Theilwerthe der σ-Function.

Die Haupteigenschaften der $\sigma_{\lambda\mu}$ sind in der citirten Note des Herrn Klein bereits abgeleitet worden. Wir benöthigen für unsere Zwecke Folgendes:

Ueber die *Anzahl* der wesentlich verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ bei gegebenem s orientiren uns die beiden Formeln:

$$(1.)\quad \sigma_{\lambda+l.s,\ \mu+m.s} = (-1)^{l.m+l+m} \cdot e^{-\frac{i\pi}{s}(\lambda m-\mu l)} \cdot \sigma_{\lambda\mu},$$

$$(2.)\quad e^{(\lambda-\mu)\frac{i\pi}{s}} \cdot \sigma_{\lambda\mu} = \sigma_{s-\lambda,\ s-\mu}\,.$$

Ausserdem ist zu beachten, dass bei zusammengesetztem s eine gewisse Anzahl von $\sigma_{\lambda\mu}$ als bereits zu den Factoren von s gehörig auszuscheiden sind.

Für $s = 2$, resp. 3 giebt es 3, resp. 4 wesentlich verschiedene Grössen $\sigma_{\lambda\mu}$, als welche wir σ_{01}, σ_{10}, σ_{11}, resp. σ_{01}, σ_{10}, σ_{11}, σ_{12} herausgreifen wollen.

Das *Verhalten der* $\sigma_{\lambda\mu}$ *bei linearer Substitution der Perioden* ω_1, ω_2:

---

*) Man vergleiche Klein, Ber. d. K. S. Gesellsch. d. W. (Sitzung vom 14. Nov. 1884).

**) Man vergleiche die späteren diesbez. Bemerkungen im Texte.

$$\omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2\,, \quad \omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

wird durch die Formel markirt:

$$(3.) \qquad \sigma_{\lambda\mu}(\omega'_1, \omega'_2) = \sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\, \lambda\beta+\mu\delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Die Combination der Gleichungen (1.) und (3.) giebt für das Verhalten der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei einer linearen Substitution von ω_1 und ω_2, welche mod. s zur Identität congruent ist, also für eine Substitution:

$$\omega'_1 = (sa+1)\,.\,\omega_1 + sb\,.\,\omega_2\,, \quad \omega'_1 = sc\,.\,\omega_1 + (sd+1)\,.\,\omega_2\,,$$
$$[(sa+1)(sd+1) - sb\,.\,sc = 1]$$

$$(4.) \quad \sigma_{\lambda\mu}(\omega'_1, \omega'_2) = (-1)^{\lambda^2(ab+a+b)+\mu^2(cd+c+d)+\lambda\mu(ad+bc)}$$
$$.\, e^{\frac{i\pi}{s}[-b\lambda^2+(a-d)\lambda\mu+c\mu^2]} \,.\, \sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2)\,.$$

Für ungerades s lässt sich dies Resultat zusammenziehen in:

$$(4^b.)\, \sigma_{\lambda\mu}(\omega'_1, \omega'_2) = \varepsilon^{\frac{s-1}{2}[b\lambda^2-(a-d)\lambda\mu-c\mu^2]} \,.\, \sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2), \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{s}}\,.$$

Diese Relationen lehren, dass die $\sigma_{\lambda\mu}$

1) bei beliebigen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 sich bis auf vortretende $2s^{\text{te}}$ Einheitswurzeln permutiren;

2) *bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod. s zur Identität congruent sind, sich um $2s^{\text{te}}$, resp. s^{te} Einheitswurzeln ändern, je nachdem s gerade, resp. ungerade ist*;

3) ungeändert bleiben erst bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod. $2s^2$, resp. s^2 zur Identität congruent sind (je nachdem s gerade, resp. ungerade ist, was im Folgenden zu ergänzen ist).

Das letztere besagt, dass die $\sigma_{\lambda\mu}$ *Modulformen von der Stufe $2s^2$, resp. s^2 sind.*

§ 2. Von den Functionen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ und ihrem Verhalten bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2.

Wir lassen Transformation n^{ter} Ordnung (n relativ prim zu s vorausgesetzt) in der Weise eintreten, dass wir unter

$$\bar{\omega}_1^{(i)} = \frac{\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2}{n}\,, \quad \bar{\omega}_2^{(i)} = \frac{\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2}{n}\,, \quad i = 1, 2 \cdots N\,,$$
$$(\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = n)$$

ein volles Repräsentantensystem verstehen, so beschaffen, dass die Grössen:

$$\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2\,,\ \gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2$$

mod. $2s^2$, resp. mod. s^2 zur Identität congruent sind. Diese Wahl ist stets zulässig, wie ein Fundamentalprincip der Gruppentheorie lehrt*). Dies festgesetzt definiren wir die N Functionen:

$$(5.)\qquad x_{\lambda\mu}{}^{(i)} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{\bar{\omega}_1{}^{(i)},\ \bar{\omega}_2{}^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1,\ \omega_2)}\,,\quad i = 1,\ 2, \cdots N.$$

Um das Verhalten derselben bei linearer Substitution P der Perioden ω_1, ω_2 bequem angeben zu können, bringen wir P auf die Form

$$P \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ n\gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mod. } 2s^2, \text{ resp. mod. } s^2.$$

Dann lässt sich das Resultat folgendermassen formuliren: *Jede der N Grössen $x_{\lambda\mu}{}^{(i)}$ geht bei Anwendung einer linearen Substitution P von ω_1, ω_2 über in:*

$$(6.)\qquad (x_{\lambda\mu}{}^{(i)})' = \frac{\sigma_{\lambda\mu+\mu\gamma,\ \lambda\cdot n\beta+\mu\delta}\{\bar{\omega}_1{}^{(j)},\ \bar{\omega}_2{}^{(j)}\}}{\sigma_{\lambda\alpha+\mu\cdot n\gamma,\ \lambda\beta+\mu\delta}(\omega_1,\ \omega_2)}$$

und zwar der Art, dass wenn i von 1, 2 $\cdots$ N läuft, dies auch j thut (abgesehen von der Reihenfolge, welche für das Folgende gleichgültig ist).

§ 8. Existenz der Multiplicatorgleichungen für die $x_{\lambda\mu}{}^{(i)}$.

Wir wollen kurz die Stufe der Coëfficienten einer Multiplicator- oder Modulargleichung *die Stufe der betreffenden Gleichung* nennen.

Da wir die *Gesammt*gruppe der linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 in Betracht gezogen haben und nach den Formeln (6.), (1.), (2.) das Verhalten der $x_{\lambda\mu}{}^{(i)}$ bei beliebigen Substitutionen dieser Gesammtgruppe kennen, sind wir in den Stand gesetzt, den verschiedenen Congruenzuntergruppen der Gesammtgruppe entsprechend, nunmehr die Existenz der Multiplicator- und Modulargleichungen der verschiedenen Stufen für die $x_{\lambda\mu}{}^{(i)}$ und ihre Combinationen zu erschliessen. In der That, die Aufgabe,

---

*) Man vergleiche Klein, Math. Ann. Bd. XVII, pag. 67.

die Existenz der Multiplicatorgleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ selbst zunächst zu erschliessen, kommt unmittelbar darauf hinaus, unter Benutzung der Formel (6.) die Stufe der symmetrischen Functionen eines Systems von N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ zu bestimmen. Wird diese Stufe mit t bezeichnet, so ist damit damit die Existenz einer Multiplicatorgleichung t^{ter} Stufe vom Grade N bewiesen. Dabei sind die Coëfficienten der Gleichung *rationale* Functionen des vollen Modulsystems t^{ter} Stufe, da die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ algebraisch von demselben abhängen.

Das Analoge gilt, wenn Combinationen der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ in das Auge gefasst werden.

Was nun die Multiplicatorgleichungen für die Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ selbst angeht, so liefert die Discussion der Formel (6.) in dieser Richtung folgendes Resultat:

Je N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ $(i = 1, 2 \cdots N)$ genügen einer Gleichung N^{ten} Grades, deren Coëfficienten,

$$\begin{cases} \textit{wenn a) } s \textit{ gerade und } n \equiv 1 \textit{ mod. } 2s \textit{ ist} \\ \textit{oder b) } s \textit{ ungerade und } n \equiv 1 \textit{ mod. } s \textit{ ist} \end{cases}$$

rationale Functionen eines vollen Modulsystems s^{ter} Stufe sind.

In den andern Fällen:

$$\begin{cases} s \textit{ gerade und } n \not\equiv 1 \textit{ mod. } 2s \\ s \textit{ ungerade und } \not\equiv 1 \textit{ mod. } s \end{cases}$$

wird die Stufe der Gleichung dagegen $> s$ und $\leqq s^2$, hängt aber wesentlich von der genaueren Beschaffenheit der Zahlen s und n ab. Jedenfalls kann jedoch im einzelnen Falle die Stufe der Gleichung direct angegeben werden.

Die andere Aufgabe, die Multiplicator- und Modulargleichungen für die Combinationen der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ zu studiren, wird dadurch bedeutungsvoll, dass sich zeigt, dass die in der Transformationstheorie gewöhnlich betrachteten Modulformen und Modulfunctionen sich in einfacher Weise durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ darstellen. Man vergleiche hierzu I. § 2. der citirten Note des Herrn KLEIN.

Es mag genügen, explicite einerseits darauf hinzuweisen, dass man die Multiplicatorgleichungen für $\sqrt[12]{\Delta}$ und die JACOBIschen Multiplicatorgleichungen von den $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgehend behandeln kann. In der That bestehen die Relationen:

$$(7.)\qquad \sqrt[12]{\Delta} = \frac{1 - e^{\frac{4i\pi}{3}}}{2e^{\frac{3i\pi}{4}}} \cdot \frac{\sigma_{01}\cdot\sigma_{10}\cdot\sigma_{11}\,(s=2)}{\sigma_{01}\cdot\sigma_{10}\cdot\sigma_{11}\cdot\sigma_{12}\,(s=3)}$$ und

$$(8.)\quad \left.\begin{aligned} \sigma_{01} &= \frac{e^{\frac{3i\pi}{2}}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\cdot\sqrt[4]{e_1-e_3}}, \qquad \sigma_{10} = \frac{-1}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\cdot\sqrt[4]{e_1-e_2}}, \\ \sigma_{11} &= \frac{e^{\frac{5i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\cdot\sqrt[4]{e_1-e_2}}, \\ \text{resp. } (8^b.)\quad \sqrt{e-e_2} &= e^{\frac{3i\pi}{4}}\cdot\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{10}\cdot\sigma_{11}}, \\ \sqrt{e_2-e_3} &= e^{\frac{7i\pi}{4}}\cdot\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{01}\cdot\sigma_{11}}, \qquad \sqrt{e_1-e_3} = e^{\frac{5i\pi}{4}}\cdot\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{01}\cdot\sigma_{10}}. \end{aligned}\right\}(s=2)$$

Andrerseits gestatten z. B. die Formeln:

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} k^2 &= -\frac{\sigma_{10}^4}{\sigma_{11}^4}\;(s=2) = -\left(\frac{\sigma_{10}\cdot\sigma_{12}}{\sigma_{11}\cdot\sigma_{31}}\right)^8 (s=4), \\ \xi &= -2\,\frac{\sigma_{10}^3}{\sigma_{10}^3 + i\sqrt{3}\cdot\sigma_{01}^3}\quad (s=3), \\ o &= -\frac{\sigma_{10}^2}{\sigma_{01}^2 + i\cdot\sigma_{11}^2}\;(s=2) = e^{\frac{8i\pi}{4}}\cdot\frac{\sigma_{10}^2}{\sigma_{12}^2}\;(s=4), \\ a &= e^{\frac{8i\pi}{5}}\cdot\frac{\sigma_{10}\cdot\sigma_{11}\cdot\sigma_{12}\cdot\sigma_{13}\cdot\sigma_{14}}{\sigma_{20}\cdot\sigma_{21}\cdot\sigma_{22}\cdot\sigma_{23}\cdot\sigma_{24}}\quad (s=5),\ ^{*}) \end{aligned}\right.$$

unter ξ, o, a eine bestimmt normirte Tetraeder-, Octaeder-, Ikosaeder- Irrationatität verstanden, die *Modular*gleichungen für $\sqrt[8]{k^2}$, $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt{k^2}$, k^2, ξ, $\sqrt{o}$, o, a auf Grund der $\sigma_{\lambda\mu}$ zu behandeln.

---

*) Man vergleiche § 7—9 des Textes, ferner die Resultate von Herrn Fricke in der Note des Herrn Klein vom 2. März 1885, »Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen« und schliesslich Bianchi, Math. Ann. Bd. XVII, pag. 244 und pag. 252. Jedoch sind in der genannten März-Note k^2, ξ, o in andrer Weise fixirt.

Wir beschränken uns nunmehr darauf, die Multiplicatorgleichungen für die Grössen $x_{\lambda\mu}{}^{(i)}$ selbst in das Auge zu fassen. Es mag jedoch bemerkt werden, dass die weitere Behandlungsweise im Princip auch dann zur Geltung kommt, wenn es sich um Combinationen der $x_{\lambda\mu}{}^{(i)}$ handelt.

§ 4. Allgemeines über Repräsentantenwahl und Darstellung der $x_{\lambda\mu}{}^{(i)}$ als Potenzreihen oder unendliche Producte in q.

Ueber die Form der Coëfficienten der erschlossenen Gleichungen kann uns die bisher benützte gruppentheoretische Methode nicht vollständig orientiren. Dazu wird eine functionentheoretische Discussion erforderlich.

Der erste Schritt in dieser Richtung ist es, die durch (5.) definirten Grössen $x_{\lambda\mu}{}^{(i)}$ als Potenzreihen oder unendliche Producte in q darzustellen. Für diesen Zweck müssen die in (5.) benützten Repräsentanten:

$$(10)\begin{cases} \bar{\omega}_1{}^{(i)} = \dfrac{(2s^2\cdot a'_i+1)\,\omega_1 + 2s^2\cdot b'_i\cdot\omega_2}{n}, & \bar{\omega}_2{}^{(i)} = \dfrac{2s^2\cdot c_i\cdot\omega_1 + (2s^2\cdot d'_i+1)\,\omega_2}{n} \\ \text{resp.}\ \bar{\omega}_1{}^{(i)} = \dfrac{(s^2\cdot a'_i+1)\,\omega_1 + s^2\cdot b'_i\,\omega_2}{n}, & \bar{\omega}_2{}^{(i)} = \dfrac{s^2\cdot c'_i\cdot\omega_1 + (s^2\cdot d'_i+1)\,\omega_2}{n} \end{cases}$$

durch lineare Substitutionen von $\bar{\omega}_1{}^{(i)}$, $\bar{\omega}_2{}^{(i)}$ modificirt werden.

Diese Umänderung der Repräsentanten wird bei der benützten gruppentheoretischen Methode *immer* erforderlich, gleichviel ob man Multiplicatorgleichungen oder Modulargleichungen oder Modularcorrespondenzen behandelt und gleichviel, mit welcher Stufe man operirt. Man vergleiche, was z. B. die Multiplicatorgleichungen für $\sqrt[12]{\varDelta}$ anlangt, HURWITZ, Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 571—574. Das Princip ist, dass man, spätere Modificationen vorbehalten, zu dem folgenden vollen Repräsentantensystem übergeht:

$$(11.)\qquad \frac{a_i\,\omega_1}{n},\quad \frac{c_i\,\omega_1 + d_i\,\omega_2}{n},$$

wo

$$a_i\cdot d_i = n,\quad c_i < a_i$$

ist und a_i, c_i, d_i nicht-negative ganze Zahlen ohne einen allen dreien gemeinsamen Theiler sind. Die genannte Aufgabe kommt dann lediglich darauf hinaus, für jeden der N Repräsentanten diejenige lineare Substitution A_i, B_i, C_i, D_i $(A_iD_i - B_iC_i = 1)$ anzugeben, welche von dem kanonischen Repräsentantensystem

(11.) zu dem beim Existenzbeweis der Gleichungen benützten Repräsentantensystem [in unserm Falle (10.)] überführt. Denn dann kann man die Wurzeln der Gleichungen unter Berücksichtigung vortretender Einheitswurzeln in den Repräsentanten (11.) angeben, welche unmittelbar Entwicklungen in q liefern.

Im vorliegenden Falle bestimmt sich die lineare Substitution A_i, B_i, C_i, $D_i (A_i \cdot D_i - B_i \cdot C_i = 1)$ durch den Ansatz:

$$\begin{cases} (2s^2 \cdot a'_i +)\,\omega_1 + 2s^2 \cdot b'_i \cdot \omega_2 = A_i \cdot a_i \omega_1 + B_i \cdot (c_i \omega_1 + d_i \omega_2), \\ 2s^2 \cdot c'_i \cdot \omega + (2s_2 \cdot d'_i + 1)\omega_2 = C_i \cdot a_i \omega_1 + D_i \cdot (c_i \omega_1 + d_i \omega_2), \end{cases}$$

$$\text{resp.} \begin{cases} (s^2 \cdot a'_i + 1)\,\omega_1 + s^2 \cdot b'_i \cdot \omega_2 = A_i \cdot a_i \omega_1 + B_i \cdot (c_i \omega_1 + d_i \omega_2), \\ s^2 \cdot c'_i \cdot \omega_1 + (s^2 d'_i + 1)\,\omega_2 = C_i \cdot a_i \omega_1 + D_i \cdot (c_i \omega_1 + d_i \omega_2). \end{cases}$$

Derselbe führt zu folgenden definitiven Bestimmungsgleichungen:

$$(12.) \quad \begin{cases} (2s^2 \cdot a'_i + 1) = A_i \cdot a_i + B_i \cdot c_i, & 2s^2 \cdot b'_i = B_i \cdot d_i, \\ 2s^2 \cdot c'_i = C_i \cdot a_i + D_i \cdot c_i, & (2s^2 \cdot d'_i + 1) = D_i \cdot d_i, \end{cases} (s \text{ gerade})$$

$$\text{resp.} \begin{cases} (s^2 \cdot a'_i + 1) = A_i \cdot a_i + B_i \cdot c_i, & s^2 \cdot b'_i = B_i \cdot d_i, \\ s^2 \cdot c'_i = C_i \cdot a_i + D_i \cdot c_i, & (s^2 \cdot d'_i + 1) = D_i \cdot d_i. \end{cases} (s \text{ ungerade}).$$

Nach Auflösung von (12.) nach A_i, B_i, C_i, D_i (mod. $2s^2$, resp. mod. s^2) erhält man dann mittels (3.) die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ in der gewünschten definitiven Form:

$$(13.) \qquad x_{\lambda\mu}^{(i)} = E_{\lambda\mu}^{(i)} \cdot \frac{\sigma_{\lambda'\mu'}\left\{\frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1\, \omega_2)},$$

unter $E_{\lambda\mu}^{(i)}$ eine bestimmte $2s^{\text{te}}$ Einheitswurzel verstanden. Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass nicht für jedes i $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$ zu sein braucht. In den später ausführlich behandeln Fällen $s = 2$ und $s = 3$ lässt sich dies jedoch erreichen, wenn c_i in (11.) etwas modificirt wird.

Die explicite Reihen- oder Productentwicklung ergiebt sich unter Anwendung von:

$$(14.) \qquad \sigma_{\lambda\mu} = i \cdot \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot e^{\frac{\lambda i \pi}{s}\left(1 + \frac{\mu}{s}\right)} \cdot q^{\left(\frac{\mu}{s} + \frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^k (-1)^k \cdot e^{k \cdot \frac{2\lambda i \pi}{s}} \cdot q^{\frac{2k\mu}{s} + k(k+1)}$$

oder

$$(15.)\quad \sigma_{\lambda\mu} = i \cdot \frac{\omega_1}{2\pi} \cdot e^{\frac{\lambda\mu}{s^2} \cdot i\pi} \cdot q^{\frac{\mu^2}{s^2}} \left\{ e^{\frac{\lambda}{s} \cdot i\pi} \cdot q^{\frac{\mu}{s}} - e^{-\frac{\lambda}{s} i\pi} \cdot q^{-\frac{\mu}{s}} \right\}$$

$$\cdot \prod_1^{\infty} \left\{ \frac{\left(1 - e^{+\frac{2\lambda}{s} \cdot i\pi} \cdot q^{2k + \frac{2\mu}{s}}\right)}{(1 - q^{2k})} \cdot \frac{\left(1 - e^{-\frac{2\lambda}{s} \cdot i\pi} \cdot q^{2k - \frac{2\mu}{s}}\right)}{(1 - q^{2k})} \right\}.$$

§ 5. Ueber Form und Aufstellung der Gleichungen.

An die Formeln (13.) bis (15.) knüpft die erwähnte functionen-theoretische Discussion einerseits an.

Es sei nach § 3 eine Multiplicatorgleichung t^{ter} Stufe für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ erschlossen. Dann construire man sich das Fundamentalpolygon für die t^{te} Stufe in der ω-Halbebene. Dasselbe sei kurzweg als das der Multiplicatorgleichung »zugehörige Fundamentalpolygon« bezeichnet. Für das Folgende kommen nur die Ecken desselben in Betracht, welche auf der reellen Axe der ω-Halbebene liegen (also die Puncte $\omega = i\infty$, 0, 1 etc.); sie seien kurzweg als »Ecken des zugehörigen Fundamentalpolygons« benannt.

Dies vorausgeschickt kann man auf Grund von (15.) und (6.) die Werthe sämmtlicher $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ in den Ecken des der Gleichung zugehörigen Fundamentalpolygons *in endlicher und geschlossener Form* angeben. Man kann sonach von vornherein die particulären Multiplicatorgleichungen angeben, auf welche sich die allgemeine, für beliebiges ω giltige Multiplicatorgleichung in den Ecken des zugehörigen Fundamentalpolygons reducirt.

Um hiervon ausgehend die für beliebiges ω giltige Multiplicatorgleichung zu bilden, um also die Gleichung von den Ecken des zugehörigen Fundamentalpolygons aus gewissermassen über das ganze Fundamentalpolygon fortzusetzen, hat man den gefundenen particulären Gleichungen geeignete Zusatzglieder zu geben, deren Coefficienten rationale Functionen eines vollen Modulsystems t^{ter} Stufe (die Kenntniss eines solchen wird postulirt) sind. Für die Form der weiteren Coëfficienten wird naturgemäss die specielle Auswahl und Werthevertheilung des vollen Modulsystems t^{ter} Stufe massgebend. Hier hat daher die *Einzel*-Untersuchung der Fälle $s = 2$, 3 etc. einzusetzen.

Die nunmehr folgenden, ausführlich behandelten Fälle

$s = 2$ und $s = 3$ sind in diesem Sinne durchaus nur als die ersten und einfachsten Beispiele zu betrachten. Zugleich wird aber das weitere Verfahren, die Form der Coëfficienten etc. zu bestimmen, durch diese Beispiele hinreichend charakterisirt werden.

§ 6. Allgemeines über den Fall $s = 2$.

Die drei hier existirenden $\sigma_{\lambda\mu}$ sind *Modulformen 8ter Stufe*. Ihr Zusammenhang mit den anderwärts verwendeten Modulformen 8ter Stufe $\sqrt[4]{e_i - e_k}$ ist in den Relationen (8.) angegeben worden.

Der Transformationsgrad n wird ungerade vorausgesetzt.

Wie bereits § 4 angedeutet wurde, empfiehlt es sich, das Repräsentantensystem (11.) in etwas modificirter Form zu verwenden. Nämlich wir nehmen als kanonisches Repräsentantensystem das folgende:

$$(16.)\quad \begin{gathered} \frac{2a_i + 1}{n} \cdot \omega_1 , \qquad \frac{2c_i \cdot \omega_1 + (2d_i + 1)\omega_2}{n} , \quad \text{wobei} \\ (2a_i + 1)(2d_i + 1) = n , \qquad 2c_i < 2(2a_i + 1) \end{gathered}$$

ist und wobei $(2a_i + 1)$, $2c_i$, $(2d_i + 1)$ nicht-negative ganze Zahlen ohne einen allen dreien gemeinsamen Theiler sind. Dadurch erreicht man in der That, dass in (13.) für den vorliegenden Fall bei beliebigem i $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$ wird, denn es findet sich:

$$(17.)\quad x_{\lambda\mu}^{(i)} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{\bar{\omega}_1^{(i)}, \bar{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2)} = (-1)^{\lambda d_i + \mu(c_i d_i + c_i + d_i) + \lambda\mu \cdot d_i} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2} \cdot \mu^2 \cdot c_i n} \cdot \frac{\sigma_{\lambda\mu}\left\{\frac{(2a_i + 1)\omega_1}{n}, \frac{2c_i \cdot \omega_1 + (2d_i + 1)\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2)} .$$

Um das Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei beliebigen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 angeben zu können, genügt es, das Verhalten derselben bei Ausübung von

$$\begin{aligned} S) \qquad & \omega'_1 = \omega_1 , \qquad && \omega'_2 = \omega_1 + \omega_2 \\ \text{und } T) \qquad & \omega'_1 = -\omega_2 , \qquad && \omega'_2 = \omega_1 \end{aligned}$$

zu kennen. Dies Verhalten ist folgendes:

$$
\text{(18.)}\quad \text{Es geht} \quad \text{bei Ausübung von}\left\{\begin{array}{llll}
 & x_{01}^{(i)} & x_{10}^{(i)} & x_{11}^{(i)} \\
S) & \left.\begin{array}{l} + \\ -i \\ - \\ +i \end{array}\right\} x_{11}^{(j)} & \left.\begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \end{array}\right\} x_{10}^{(j)} & \left.\begin{array}{l} + \\ -i \\ - \\ +i \end{array}\right\} x_{01}^{(j)} \\
 & \text{über in} & & \\
T) & \left.\begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array}\right\} x_{10}^{(j)} & \left.\begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array}\right\} x_{01}^{(j)} & \left.\begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array}\right\} x_{11}^{(j)}
\end{array}\right.
$$

$$
\text{je nachdem } n \equiv \left.\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array}\right\} \text{mod. 8 ist.}
$$

Die Benützung der Angaben von § 3 in der daselbst markirten Richtung führt zu dem Ergebniss:

Je N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2 \ldots N$, genügen einer Gleichung N^{ten} Grades, deren Coëfficienten rationale Functionen von k^2, resp. der Octaeder-Irrationalität o sind, je nachdem $n \equiv 1$, resp. $\equiv 3$ mod. 4 ist).*

Um die Form der Coëfficienten unserer Multiplicatorgleichungen zu erschliessen, studiren wir die Werthevertheilung einerseits der Wurzeln $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, andrerseits von k^2 und o. Dies macht die Trennung der beiden Fälle $n \equiv 1$ (mod. 4) und $n \equiv 3$ (mod. 4) erforderlich.

§ 7. $s = 2$, $n \equiv 1$ (mod. 4).

Im Puncte $\omega = i\infty$ ist, resp. in der Nähe des Punctes $\omega = i\infty$ ist in erster Annäherung:

$$
\text{(19.)}\left\{\begin{array}{l}
x_{10}^{(i)} = (-1)^{d_i} \cdot \dfrac{2a_i + 1}{n} \\[2ex]
x_{01}^{(i)} = x_{11}^{(i)} = (-1)^{c_i d_i + c_i + d_i} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2} \cdot c_i n - \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{c_i}{2a_i + 1}} \\[2ex]
\qquad\qquad \cdot \dfrac{2a_i + 1}{n} \cdot q^{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2d_i + 1}{2a_i + 1}\right)} .
\end{array}\right.
$$

Durch die Tabelle (18.) für die Aenderungen bei S) und T) sind wir in den Stand gesetzt, die Werthe der Wurzeln auch in

*) Betreffs der Einführung von o als Hauptmodul für die 4te Stufe vergleiche man etwa die citirte Note des Herrn KLEIN vom 2. März.

den Punkten $\omega = 0$ und $\omega = +1$ anzugeben. (Die Betrachtung weiterer rationaler Punkte der reellen Axe der ω-Halbebene wird überflüssig, da wir es mit einer Multiplicatorgleichung 2ter Stufe zu thun haben.)

Die Formel (15.) lehrt, dass die hiermit auf der reellen Axe gefundenen Null- und Unendlichkeitsstellen der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ die *einzigen* Null- und Unendlichkeitsstellen der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ sind (sofern wir uns wieder auf das Fundamentalpolygon 2ter Stufe beschränken).

Was andrerseits k^2 angeht, so legen wir als solches in Weierstrass'scher Bezeichnung zu Grunde $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}$. Dies festgesetzt geben die Formeln (8.) k^2 als Function der $\sigma_{\lambda\mu}$, nämlich:

$$\sigma_{01}^4 : \sigma_{10}^4 : \sigma_{11}^4 = (1 - k^2) : k^2 : -1 \,. \tag{20.}$$

Diese Relationen geben beiläufig folgende Identität für die $\sigma_{\lambda\mu}$:

$$\sigma_{01}^4 + \sigma_{10}^4 + \sigma_{11}^4 = 0 \,. \tag{21.}$$

Weiter entnimmt man aus (20.), dass

(22.) k^2 durch Ausübung von $\left\{\begin{matrix} S) \\ T) \end{matrix}\right.$ übergeht in $\begin{matrix} \frac{k^2}{k^2 - 1}, \\ 1 - k^2. \end{matrix}$

Da der Definition von k^2 zufolge $k^2(\omega = i\infty) = 0$ ist, finden wir mittels (22.)

$$k^2(\omega = o) = 1 \,, \qquad k^2(\omega = 1) = \infty \,.$$

Wir achten nunmehr, dies vorausgeschickt, auf die Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln. Dann findet sich, die Form der Coëfficienten anlangend, einerseits das Resultat: *Schreibt man die Gleichungen für die Grössen* $x_{01}^{(i)}$, $x_{10}^{(i)}$, $x_{11}^{(i)}$ *so an, dass die höchste Potenz dieser Grössen den Coëfficienten* 1 *hat, so sind die übrigen Coëfficienten ganze Functionen bez. der beiden Argumente* k^2 *und* $\frac{1}{k^2}$, k^2 *und* $\frac{1}{1-k^2}$, $\frac{1}{k^2}$ *und* $\frac{1}{1-k^2}$ *und das constante Glied jeder Gleichung ist unabhängig von* k^2, *kann also mit Hülfe von* (18.) *und* (19.) *sofort angegeben werden.*

Andrerseits können wir auf Grund von (18.) und (22.) *die Transformationen der Gleichungen in sich* angeben. Nämlich *es bleiben die Gleichungen für die Grössen* $x_{01}^{(i)}$, $x_{10}^{(i)}$, $x_{11}^{(i)}$ *ungeändert, wenn man darin* k^2 *durch* $\frac{1}{k^2}$, $\frac{k^2}{k^2-1}$, $1 - k^2$ *ersetzt.*

Beides combinirt führt zu dem Endresultate, dass *die Coëf-*

ficienten ganze Functionen von $X_{01} = k^2 + \frac{1}{k^2} - 2$, $X_{10} = k^2 + \frac{k^2}{k^2-1}$, $X_{11} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{1-k^2}$ *sind.* Der Grad jedes Coëfficienten in $X_{\lambda\mu}$ lässt sich angeben, wenn man die Formeln (19.) zu Hilfe nimmt.

Um schliesslich auch das Verhalten der eben definirten $X_{\lambda\mu}$ bei beliebiger linearer Transformation von ω_1, ω_2 angeben zu können, stellen wir folgende Tabelle zusammen:

Es geht		X_{01}	X_{10}	X_{11}
(23.) bei Anwendung von	$S)$ über in	$-X_{11}$	$+X_{10}$	$-X_{01}$
	$T)$ über in	$-X_{10}$	$-X_{01}$	$+X_{11}$

Diese Tabelle dient dazu, um in Verbindung mit (18.) von irgend einer der drei simultanen Gleichungen zu den beiden andern übergehen zu können. *Es giebt also eigentlich nur eine Multiplicatorgleichung der betrachteten Art, welche aber diese drei gleichberechtigten Formen annehmen kann*)*.

Unter Benützung aller der im Vorhergehenden berührten Eigenschaften der Multiplicatorgleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ ist man im Stande, jederzeit die Gleichungen mit unbestimmten Constanten anzuschreiben. Diese Constanten müssen dann durch Einsetzung der durch (17.) vermittelten Reihenentwicklungen der Wurzeln nach q bestimmt werden.

Wie schon früher bemerkt, kommt dieser letztere Process darauf hinaus, jede Gleichung von den Puncten $\omega = i\infty$, $\omega = 0$, $\omega = 1$ aus über das Fundamentalpolygon 2ter Stufe hinweg fortzusetzen.

In den angegebenen Beispielen ist zur Orientirung die Zahl jener zunächst unbestimmten Constanten angemerkt und die numerischen Werthe derselben sind stets dadurch verificirt worden, dass noch ein weiteres Glied in den Reihenentwick-

*) Die JACOBI'schen Multiplicatorgleichungen, welche als Multiplicatorgleichungen 2ter Stufe den hier behandelten von vornherein nahe verwandt sind, haben genau analoge Eigenschaften. So hat man stets drei simultane JACOBI'sche Multiplicatorgleichungen, von denen die zwei andern aber aus der einen durch ähnliche Operationen wie die oben angegebenen hervorgehen.

ungen hinzugenommen wurde, welches bei der Bestimmung der Constanten selbst nicht betheiligt ist.

Beispiele:

$$n = 5. \quad \left(x_{01} - \frac{1}{5}\right)(x_{01} - 1)^5 - \frac{2^4}{5} \cdot X_{01} \cdot x_{01}^5 = 0\,,$$

$$\left(x_{10} - \frac{1}{5}\right)(x_{10} - 1)^5 + \frac{2^4}{5} \cdot X_{10} \cdot x_{10}^5 = 0\,,$$

$$\left(x_{11} + \frac{1}{5}\right)(x_{11} + 1)^5 - \frac{2^4}{5} \cdot X_{11} \cdot x_{11}^5 = 0\,,$$

(1 unbestimmte Constante).

$$n = 9. \quad \left(x_{01} - \frac{1}{3^2}\right)\left(x_{01} + \frac{1}{3}\right)^2 (x_{01} - 1)^9$$
$$- \frac{2^8}{3^2} \cdot X_{01}^2 \cdot x_{01}^9 \left(x_{01}^2 - \frac{1}{3} x_{01} + \frac{1}{9}\right) - \frac{2^5}{3^4} \cdot X_{01} \cdot x_{01}^5 \{3^2 \cdot 5^2 \cdot x_{01}^6$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 283 x_{01}^5 + 1783 x_{01}^4 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot x_{01}^3 + 3^2 \cdot 7 \cdot x_{01}^2$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 11 x_{01} + 3^2\} = 0\,,$$

$$\left(x_{10} - \frac{1}{3^2}\right)\left(x_{10} + \frac{1}{3}\right)^2 (x_{10} - 1)^9$$
$$- \frac{2^8}{3^2} \cdot X_{10}^2 \cdot x_{10}^9 \left(x_{10}^2 - \frac{1}{3} x_{10} + \frac{1}{9}\right) + \frac{2^5}{3^4} \cdot X_{10} \cdot x_{10}^5 \{3^2 \cdot 5^2 \cdot x_{10}^6$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 283 \cdot x_{10}^5 + 1783 x_{10}^4 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot x_{10}^3 + 3^2 \cdot 7 \cdot x_{10}^2$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 11 x_{10} + 3^2\} = 0\,,$$

$$\left(x_{11} - \frac{1}{3^2}\right)\left(x_{11} + \frac{1}{3}\right)^2 (x_{11} - 1)^9$$
$$- \frac{2^8}{3^2} \cdot X_{11}^2 \cdot x_{11}^9 \left(x_{11}^2 - \frac{1}{3} x_{11} + \frac{1}{9}\right) + \frac{2^5}{3^4} \cdot X_{11} \cdot x_{11}^5 \{3^2 \cdot 5^2 \cdot x_{11}^6$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 283 \cdot x_{11}^5 + 1783 x_{11}^4 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot x_{11}^3 + 3^2 \cdot 7 \cdot x_{11}^2$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 11 x_{11} + 3^2\} = 0\,,$$

(8 unbestimmte Constante).

Wir haben die Gleichungen in Modul-*Functionen* geschrieben. Will man ihren Charakter als Multiplicatorgleichungen auch in der Schreibweise zum Ausdruck bringen, so schreibe man die Gleichungen mittels (17.) und (20.) in den Modul-*Formen* $\sigma_{\lambda\mu}$.

§ 8. $s = 2$, $n \equiv 3$ (mod. 4).

Für die Werthe der Wurzeln im Punkte $\omega = i\infty$ gelten wie im Falle $n \equiv 1$ (mod. 4) die Formeln (19.). Wir benützen die

Tabelle (18.) zunächst dazu, die Werthe der Wurzeln auch in den andern Ecken des Fundamentalpolygons 4ter Stufe anzugeben, d. h. bei geeigneter Wahl des Fundamentalpolygons in den Puncten $\omega = 0,\ +1,\ -1,\ +2,\ +\frac{1}{2}$.

Die hiermit auf der reellen Axe der ω-Halbebene gefundenen Null- und Unendlichkeitspuncte der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ sind die *einzigen* Null- und Unendlichkeitspuncte derselben, sofern wir uns, wie es genügt, auf das Fundamentalpolygon 4ter Stufe beschränken.

Wir legen als Octaeder-Irrationalität zu Grunde

$$(24.)\qquad o = q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{2k^2+2k}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{2k^2}} = \frac{k}{1+k'} = -\frac{\sigma_{10}^2}{\sigma_{10}^2 + i\sigma_{11}^2}\,. \text{*)}$$

Die Zusammenhänge in (24.) lehren uns das Verhalten von o bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2; es zeigt sich, dass

$$(25.)\qquad o \text{ durch Ausübung von } \begin{cases} S) \text{ in } +i\cdot o \\ T) \text{ in } \dfrac{1-o}{1+o} \end{cases} \text{ übergeht.}$$

Da der Definition von o zufolge $o(\omega = i\infty) = 0$ ist, finden wir auf Grund von (25.) für die weiteren Ecken des Fundamentalpolygons

$$o(0) = +1\,,\quad o(+1) = +i\,,\quad o(-1) = -i\,,$$
$$o(+2) = -1\,,\quad o(+\tfrac{1}{2}) = \infty\,.$$

Aus der Lage der Null- und Unendlichkeitspuncte der Wurzeln schliesst man, dass *die Coëfficienten der Gleichungen für die Grössen $x_{01}^{(i)}$, $x_{10}^{(i)}$, $x_{11}^{(i)}$ (die Gleichungen mit dem 1ten Coëfficienten 1 vorausgesetzt) ganze Functionen bez. der vier Argumente* o, $\frac{1}{o}$, $\frac{1+io}{1-io}$, $\frac{1-io}{1+io}$; $\frac{1+o}{1-o}$, $\frac{1-o}{1+o}$, $\frac{1+io}{1-io}$, $\frac{1-io}{1+io}$; o, $\frac{1}{o}$, $\frac{1+o}{1-o}$, $\frac{1-o}{1+o}$ *sind und dass das constante Glied jeder*

---

*) Man vergleiche KLEIN, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884, pag. 132 und die Note vom 2. März.

lungen hinzugenomm… nach (18.) und (19.)
der Constanten selbst … ungen nach (18.) und (25.)

… $x_{11}^{(i)}$ bleiben ungeändert, wenn

$n = 5.$ (x … $\frac{1+io}{1-io}$, $\frac{1}{o}$; $+io$, $-o$, $-io$;

…tauscht.

… $x_{10}^{(i)}$, $x_{11}^{(i)}$ ändern ihr Vorzeichen,

… $\frac{1}{o}$, $-o$ vertauscht.

… Folge, dass die Coëfficienten der Gleichungen

$n =$ … resp. von $X_{01}^{I} = \frac{(o-1)^4}{o(o^2+1)}$ oder $X_{01}^{II} = \frac{(o+1)^4}{o(o^2+1)}$,

— … oder $X_{10}^{II} = \frac{2}{1-o^4}$, $X_{11}^{I} = \frac{(o-i)^4}{o(o^2-1)}$ oder $X_{11}^{II} =$

… sind. Der Grad der ganzen Functionen in diesen Argumenten lässt sich wieder auf Grund von (19.) angeben. Mittels (18.) und der weiteren Tabelle

	X_{01}^{I}	X_{01}^{II}	X_{10}^{I}	X_{10}^{II}	X_{11}^{I}	X_{11}^{II}
S	$+iX_{11}^{II}$	$+iX_{11}^{I}$	X_{10}^{I}	X_{10}^{II}	$+iX_{01}^{I}$	$+iX_{01}^{II}$
T	$+2^2\cdot X_{10}^{I}$	$+2^2 X_{10}^{II}$	$+\frac{1}{2^2}X_{01}^{I}$	$+\frac{1}{2^2}X_{01}^{II}$	$-X_{11}^{II}$	$-X_{11}^{I}$

geht man von einer beliebigen der drei simultanen Gleichungen zu den beiden andern über. *Es gilt daher in dieser Beziehung dieselbe Bemerkung wie in* § 7.

Auch betreffs der numerischen Aufstellung der Gleichungen ist dasselbe zu bemerken, wie im Falle $n \equiv 1 \pmod{4}$. Nur tritt jetzt zur Vereinfachung noch dies hinzu, dass man zwei Ansatzgleichungen mit unbestimmten Constanten hat, nämlich sowohl in $X_{\lambda\mu}^{I}$ als in $X_{\lambda\mu}^{II}$, dem Umstande entsprechend, dass es jetzt nicht mehr eine Ecke im Fundamentalpolygon giebt, wo sämmtliche Wurzeln endlich und von Null verschieden sind, sondern zwei. Die Identificirung beider Ansatzgleichungen führt nun unter Berücksichtigung der Relationen

$$X_{01}^{I}-X_{01}^{II}+2^3=0,\quad X_{10}^{I}-X_{10}^{II}+2=0,\quad X_{11}^{I}-X_{11}^{II}+2^3\cdot i=0$$

noch eine Reduction der ursprünglichen Anzahl von unbestimmten Constanten herbei.

Beispiele:

$$n = 3.$$

$$\left(x_{01} - \frac{1}{3}\right)(x_{01} + 1)^3 + \frac{2}{3} \cdot X_{01}^{\mathrm{I}} \cdot x_{01}^3$$
$$= \left(x_{01} + \frac{1}{3}\right)(x_{01} - 1)^3 + \frac{2}{3} \cdot X_{01}^{\mathrm{II}} \cdot x_{01}^3 = 0\,,$$

$$\left(x_{10} + \frac{1}{3}\right)(x_{10} - 1)^3 - \frac{2^3}{3} \cdot X_{10}^{\mathrm{I}} \cdot x_{10}^3$$
$$= \left(x_{10} - \frac{1}{3}\right)(x_{10} + 1)^3 - \frac{2^3}{3} \cdot X_{10}^{\mathrm{II}} \cdot x_{10}^3 = 0\,,$$

$$\left(x_{11} + \frac{i}{3}\right)(x_{11} - i)^3 - \frac{2}{3} \cdot X_{11}^{\mathrm{I}} \cdot x_{11}^3$$
$$= \left(x_{11} - \frac{i}{3}\right)(x_{11} + i)^3 - \frac{2}{3} \cdot X_{11}^{\mathrm{II}} \cdot x_{11}^3 = 0\,,$$

(0 unbestimmte Constante).

$$n = 7.$$

$$\left(x_{01} - \frac{1}{7}\right)(x_{01}+1)^7 + \frac{2^2}{7} \cdot X_{01}^{\mathrm{I}} \cdot x_{01}^7 \{67 + 2^3 \cdot 3 \cdot X_{01}^{\mathrm{I}} + 2 \cdot (X_{01}^{\mathrm{I}})^2\}$$
$$+ 2^2 \cdot X_{01}^{\mathrm{I}} \cdot x_{01}^5 \{-3\,(2^3 + X_{01}^{\mathrm{I}})\,x_{01} + 2\} + 2^2 \cdot X_{01}^{\mathrm{I}} \cdot x_{01}^3$$
$$= \left(x_{01} + \frac{1}{7}\right)(x_{01} - 1)^7 + \frac{2^2}{7} \cdot X_{01}^{\mathrm{II}} \cdot x_{01}^7 \{67 - 2^3 \cdot 3 \cdot X_{01}^{\mathrm{II}} + 2(X_{01}^{\mathrm{II}})^2\}$$
$$+ 2^2 \cdot X_{01}^{\mathrm{II}} \cdot x_{01}^5 \{+3\,(2^3 - X_{01}^{\mathrm{II}})\,x_{01} + 2\} + 2^2 \cdot X_{01}^{\mathrm{II}} \cdot x_{01}^3 = 0\,,$$

$$\left(x_{10} + \frac{1}{7}\right)(x_{10} - 1)^7 - \frac{2^4}{7} \cdot X_{10}^{\mathrm{I}} \cdot x_{10}^7 \{67 + 2^5 \cdot 3 \cdot X_{10}^{\mathrm{I}} + 2^5 \cdot (X_{10}^{\mathrm{I}})^2\}$$
$$- 2^5 \cdot X_{10}^{\mathrm{I}} \cdot x_{10}^5 \{+2 \cdot 3\,(2 + X_{10}^{\mathrm{I}})\,x_{10} + 1\} - 2^4 \cdot X_{10}^{\mathrm{I}} \cdot x_{10}^3$$
$$= \left(x_{10} - \frac{1}{7}\right)(x_{10} + 1)^7 - \frac{2^4}{7} \cdot X_{10}^{\mathrm{II}} \cdot x_{10}^7 \{67 - 2^5 \cdot 3 \cdot X_{10}^{\mathrm{II}} + 2^5 \cdot (X_{10}^{\mathrm{II}})^2\}$$
$$- 2^5 \cdot X_{10}^{\mathrm{II}} \cdot x_{10}^5 \{-2 \cdot 3\,(2 - X_{10}^{\mathrm{II}})\,x_{10} + 1\} - 2^4 \cdot X_{10}^{\mathrm{II}} \cdot x_{10}^3 = 0\,,$$

$$\left(x_{11} - \frac{i}{7}\right)(x_{11} + i)^7 + \frac{2^2}{7} \cdot X_{11}^{\mathrm{I}} \cdot x_{11}^7 \{67 - 2^3 \cdot 3 \cdot i X_{11}^{\mathrm{I}} - 2 \cdot (X_{11}^{\mathrm{I}})^2\}$$
$$- 2^2 \cdot X_{11}^{\mathrm{I}} \cdot x_{11}^5 \{+3\,(2^3 - i X_{11}^{\mathrm{I}})\, i x_{11} + 2\} + 2^2 \cdot X_{11}^{\mathrm{I}} \cdot x_{11}^3$$
$$= \left(x_{11} + \frac{i}{7}\right)(x_{11} - i)^7 + \frac{2^2}{7} \cdot X_{11}^{\mathrm{II}} \cdot x_{11}^7 \{67 + 2^3 \cdot 3 \cdot i X_{11}^{\mathrm{II}} - 2 \cdot (X_{11}^{\mathrm{II}})^2\}$$
$$- 2^2 \cdot X_{11}^{\mathrm{II}} \cdot x_{11}^5 \{-3\,(2^3 + i \cdot X_{11}^{\mathrm{II}})\, i x_{11} + 2\} + 2^2 \cdot X_{11}^{\mathrm{II}} \cdot x_{11}^3 = 0\,,$$

(4 unbestimmte Constante).

Gleichung unabhängig von o ist, sodass es nach (18.) *und* (19.) *unmittelbar angegeben werden kann.*

Andrerseits besitzen die Gleichungen nach (18.) und (25.) folgende *Transformationen in sich:*

1) *Die Wurzeln* $x_{01}^{(i)}$, $x_{10}^{(i)}$, $x_{11}^{(i)}$ *bleiben ungeändert, wenn man o mit* $+i\frac{1-io}{1+io}$, $-i\frac{1+io}{1-io}$, $\frac{1}{o}$; $+io$, $-o$, $-io$; $-\frac{1-o}{1+o}$, $\frac{1+o}{1-o}$, $-\frac{1}{o}$ *vertauscht.*

2) *Die Wurzeln* $x_{01}^{(i)}$, $x_{10}^{(i)}$, $x_{11}^{(i)}$ *ändern ihr Vorzeichen, wenn man o mit* $-o$, $\frac{1}{o}$, $-o$ *vertauscht.*

Dies hat zur Folge, dass *die Coefficienten der Gleichungen ganze Functionen resp. von* $X_{01}^{\mathrm{I}}=\frac{(o-1)^4}{o(o^2+1)}$ *oder* $X_{01}^{\mathrm{II}}=\frac{(o+1)^4}{o(o^2+1)}$, $X_{10}^{\mathrm{I}}=\frac{2o^4}{1-o^4}$ *oder* $X_{10}^{\mathrm{II}}=\frac{2}{1-o^4}$, $X_{11}^{\mathrm{I}}=\frac{(o-i)^4}{o(o^2-1)}$ *oder* $X_{11}^{\mathrm{II}}=\frac{(o+i)^4}{o(o^2-1)}$ sind. Der Grad der ganzen Functionen in diesen Argumenten lässt sich wieder auf Grund von (19.) angeben. Mittels (18.) und der weiteren Tabelle

	X_{01}^{I}	X_{01}^{II}	X_{10}^{I}	X_{10}^{II}	X_{11}^{I}	X_{11}^{II}
(26.) $S)$	$+iX_{11}^{\mathrm{II}}$	$+iX_{11}^{\mathrm{I}}$	X_{10}^{I}	X_{10}^{II}	$+iX_{01}^{\mathrm{I}}$	$+iX_{01}^{\mathrm{II}}$
$T)$	$+2^2\cdot X_{10}^{\mathrm{I}}$	$+2^2X_{10}^{\mathrm{II}}$	$+\frac{1}{2^2}X_{01}^{\mathrm{I}}$	$+\frac{1}{2^2}X_{01}^{\mathrm{II}}$	$-X_{11}^{\mathrm{II}}$	$-X_{11}^{\mathrm{I}}$

geht man von einer beliebigen der drei simultanen Gleichungen zu den beiden andern über. *Es gilt daher in dieser Beziehung dieselbe Bemerkung wie in* § 7.

Auch betreffs der numerischen Aufstellung der Gleichungen ist dasselbe zu bemerken, wie im Falle $n\equiv 1$ (mod. 4). Nur tritt jetzt zur Vereinfachung noch dies hinzu, dass man zwei Ansatzgleichungen mit unbestimmten Constanten hat, nämlich sowohl in $X_{\lambda\mu}^{\mathrm{I}}$ als in $X_{\lambda\mu}^{\mathrm{II}}$, dem Umstande entsprechend, dass es jetzt nicht mehr eine Ecke im Fundamentalpolygon giebt, wo sämmtliche Wurzeln endlich und von Null verschieden sind, sondern zwei. Die Identificirung beider Ansatzgleichungen führt nun unter Berücksichtigung der Relationen

$$X_{01}^{\mathrm{I}}-X_{01}^{\mathrm{II}}+2^3=0,\quad X_{10}^{\mathrm{I}}-X_{10}^{\mathrm{II}}+2=0,\quad X_{11}^{\mathrm{I}}-X_{11}^{\mathrm{II}}+2^3\cdot i=0$$

noch eine Reduction der ursprünglichen Anzahl von unbestimmten Constanten herbei.

Beispiele:

$n = 3.$

$$\left(x_{01}-\frac{1}{3}\right)(x_{01}+1)^3+\frac{2}{3}\cdot X_{01}^{\mathrm{I}}\cdot x_{01}^3$$
$$=\left(x_{01}+\frac{1}{3}\right)(x_{01}-1)^3+\frac{2}{3}\cdot X_{01}^{\mathrm{II}}\cdot x_{01}^3=0\,,$$

$$\left(x_{10}+\frac{1}{3}\right)(x_{10}-1)^3-\frac{2^3}{3}\cdot X_{10}^{\mathrm{I}}\cdot x_{10}^3$$
$$=\left(x_{10}-\frac{1}{3}\right)(x_{10}+1)^3-\frac{2^3}{3}\cdot X_{10}^{\mathrm{II}}\cdot x_{10}^3=0\,,$$

$$\left(x_{11}+\frac{i}{3}\right)(x_{11}-i)^3-\frac{2}{3}\cdot X_{11}^{\mathrm{I}}\cdot x_{11}^3$$
$$=\left(x_{11}-\frac{i}{3}\right)(x_{11}+i)^3-\frac{2}{3}\cdot X_{11}^{\mathrm{II}}\cdot x_{11}^3=0\,,$$

(0 unbestimmte Constante).

$n = 7.$

$$\left(x_{01}-\frac{1}{7}\right)(x_{01}+1)^7+\frac{2^2}{7}\cdot X_{01}^{\mathrm{I}}\cdot x_{01}^7\{67+2^3\cdot 3\cdot X_{01}^{\mathrm{I}}+2\cdot(X_{01}^{\mathrm{I}})^2\}$$
$$+2^2\cdot X_{01}^{\mathrm{I}}\cdot x_{01}^5\{-3\,(2^3+X_{01}^{\mathrm{I}})\,x_{01}+2\}+2^2\cdot X_{01}^{\mathrm{I}}\cdot x_{01}^3$$
$$=\left(x_{01}+\frac{1}{7}\right)(x_{01}-1)^7+\frac{2^2}{7}\cdot X_{01}^{\mathrm{II}}\cdot x_{01}^7\{67-2^3\cdot 3\cdot X_{01}^{\mathrm{II}}+2(X_{01}^{\mathrm{II}})^2\}$$
$$+2^2\cdot X_{01}^{\mathrm{II}}\cdot x_{01}^5\{+3\,(2^3-X_{01}^{\mathrm{II}})\,x_{01}+2\}+2^2\cdot X_{01}^{\mathrm{II}}\cdot x_{01}^3=0\,,$$

$$\left(x_{10}+\frac{1}{7}\right)(x_{10}-1)^7-\frac{2^4}{7}\cdot X_{10}^{\mathrm{I}}\cdot x_{10}^7\{67+2^5\cdot 3\cdot X_{10}^{\mathrm{I}}+2^5\cdot(X_{10}^{\mathrm{I}})^2\}$$
$$-2^5\cdot X_{10}^{\mathrm{I}}\cdot x_{10}^5\{+2\cdot 3\,(2+X_{10}^{\mathrm{I}})x_{10}+1\}-2^4\cdot X_{10}^{\mathrm{I}}\cdot x_{10}^3$$
$$=\left(x_{10}-\frac{1}{7}\right)(x_{10}+1)^7-\frac{2^4}{7}\cdot X_{10}^{\mathrm{II}}\cdot x_{10}^7\{67-2^5\cdot 3\cdot X_{10}^{\mathrm{II}}+2^5\cdot(X_{10}^{\mathrm{II}})^2\}$$
$$-2^5\cdot X_{10}^{\mathrm{II}}\cdot x_{10}^5\{-2\cdot 3\,(2-X_{10}^{\mathrm{II}})x_{10}+1\}-2^4\cdot X_{10}^{\mathrm{II}}\cdot x_{10}^3=0\,,$$

$$\left(x_{11}-\frac{i}{7}\right)(x_{11}+i)^7+\frac{2^2}{7}\cdot X_{11}^{\mathrm{I}}\cdot x_{11}^7\{67-2^3\cdot 3\cdot iX_{11}^{\mathrm{I}}-2\cdot(X_{11}^{\mathrm{I}})^2\}$$
$$-2^2\cdot X_{11}^{\mathrm{I}}\cdot x_{11}^5\{+3\,(2^3-iX_{11}^{\mathrm{I}})\,ix_{11}+2\}+2^2\cdot X_{11}^{\mathrm{I}}\cdot x_{11}^3$$
$$=\left(x_{11}+\frac{i}{7}\right)(x_{11}-i)^7+\frac{2^2}{7}\cdot X_{11}^{\mathrm{II}}\cdot x_{11}^7\{67+2^3\cdot 3\cdot iX_{11}^{\mathrm{II}}-2\cdot(X_{11}^{\mathrm{II}})^2\}$$
$$-2^2\cdot X_{11}^{\mathrm{II}}\cdot x_{11}^5\{-3\,(2^3+i\cdot X_{11}^{\mathrm{II}})\,ix_{11}+2\}+2^2\cdot X_{11}^{\mathrm{II}}\cdot x_{11}^3=0\,,$$

(4 unbestimmte Constante).

§ 9. $s = 3,\ n \equiv 1$ (mod. 3).

Der Transformationsgrad n wird als nicht durch 3 theilbar vorausgesetzt. Auch bei $s = 3$ kann man noch die Vereinfachung $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$ in (13.) für beliebiges i erzielen. Dies geschieht, wenn man von dem anfänglichen vollen Repräsentantensystem, welches mod. 9 zur Identität congruent ist, zu dem folgenden kanonischen Repräsentantensystem übergeht:

$$(27.)\qquad \frac{a_i \cdot \omega_1}{n},\quad \frac{3c_i \cdot \omega_1 + d_i \cdot \omega_2}{n},\qquad \text{wobei}\quad a_i \cdot d_i = n,\quad 3c_i < 3a_i$$

ist und a_i, $3c_i$, d_i nicht-negative ganze Zahlen ohne einen allen dreien gemeinsamen Theiler sind. Dann wird in der That:

$$(28.)\ x_{\lambda\mu}^{(i)} = \frac{\sigma\lambda_\mu\{\bar{\omega}_1^{(i)}, \bar{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma\lambda_\mu(\omega_1, \omega_2)} = E_{\lambda\mu}^{(i)} \cdot \frac{\sigma\lambda_\mu\left\{\frac{a_i\omega_1}{n}, \frac{3c_i \cdot \omega_1 + d_i \cdot \omega_2}{n}\right\}}{\sigma\lambda_\mu(\omega_1, \omega_2)},$$

unter $E_{\lambda\mu}^{(i)}$ eine bestimmte 6te Einheitswurzel verstanden.

Auf Grund von § 3 erschliesst man Multiplicatorgleichungen von folgender Beschaffenheit:

Je N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2 \cdots N$, genügen einer Gleichung N^{ten} Grades, deren Coëfficienten

1) *wenn $n \equiv$ mod. 3 ist, rationale Functionen der Tetraederirrationalität sind,*

2) *wenn $n \equiv 2$ mod. 3 ist, rationale Functionen eines vollen Modulsystems 9ter Stufe*) sind.*

Wir discutiren nur den einfacheren Fall $n \equiv 1$ mod. 3, der sonach auf *Multiplicatorgleichungen 3ter Stufe* führt.

Die Werthevertheilung der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ anlangend gilt Folgendes: Im Puncte $\omega = i\infty$ ist, resp. in der Nähe dieses Punktes ist in erster Annäherung:

$$x_{10}^{(i)} = E_{10}^{(i)} \cdot \frac{a_i}{n},$$

$$(29.)\ \left.\begin{matrix} x_{01}^{(i)} \\ x_{11}^{(i)} \\ x_{12}^{(i)} \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} E_{01}^{(i)} \\ E_{11}^{(i)} \\ E_{12}^{(i)} \end{matrix}\right\} \cdot \frac{a_i}{n} \cdot e^{-\frac{2}{9} \cdot i\pi \cdot \frac{3c_i}{a_i}} \cdot q^{-\frac{2}{9}\left(\frac{d_i}{a_i} - 1\right)}.$$

---

*) Man vergleiche betreffs der Einführung eines vollen Modulsystems 9ter Stufe und überhaupt betreffs voller Modulsysteme höherer Stufe (deren Kenntniss hier postulirt wurde) die Resultate von Herrn Fricke in der citirten Note vom 2. März.

Das Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei den linearen Substitutionen S und T der Perioden ω_1, ω_2 stellen wir in folgender Tabelle zusammen, welche je nach den 3 Fällen $n \equiv 1, 4, 7 \bmod. 9$ unterschieden ist:

$$(30.)\quad \begin{array}{lcccc} & x_{01}^{(i)} & x_{10}^{(i)} & x_{11}^{(i)} & x_{12}^{(i)} \\ S) & \left.\begin{matrix}+\\ \varepsilon\\ \varepsilon^2\end{matrix}\right\} x_{11}^{(j)} & \left.\begin{matrix}+\\ +\\ +\end{matrix}\right\} x_{10}^{(j)} & \left.\begin{matrix}+\\ \varepsilon\\ \varepsilon^2\end{matrix}\right\} x_{12}^{(j)} & \left.\begin{matrix}+\\ \varepsilon\\ \varepsilon^2\end{matrix}\right\} x_{01}^{(j)} \\ T) & \left.\begin{matrix}+\\ +\\ +\end{matrix}\right\} x_{10}^{(j)} & \left.\begin{matrix}+\\ +\\ +\end{matrix}\right\} x_{01}^{(j)} & \left.\begin{matrix}+\\ \varepsilon\\ \varepsilon^3\end{matrix}\right\} x_{12}^{(j)} & \left.\begin{matrix}+\\ \varepsilon^2\\ \varepsilon\end{matrix}\right\} x_{11}^{(j)} . \end{array}$$

Sie dient zuvörderst dazu, die Werthe der Wurzeln auch in den andern Ecken des Fundamentalpolygons 3ter Stufe, also etwa in den Puncten $\omega = 0, +1, -1$ anzugeben. Die hiermit gefundenen Null- und Unendlichkeitspuncte der Wurzeln sind die *einzigen* Null- und Unendlichkeitspuncte der Wurzeln $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, wenn wir uns auf das Fundamentalpolygon 3ter Stufe beschränken.

Als Tetraederirrationalität legen wir zu Grunde*):

$$(31.)\qquad \xi = -6q^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^k \cdot (2k+1)\, q^{3k^2+3k}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k \cdot (6k+1) \cdot q^{3k^2+k}} .$$

Mit den $\sigma_{\lambda\mu}$ ist dieselbe durch folgende Relationen verbunden**):

$$(32.)\quad \sigma_{01}^3 : \sigma_{10}^3 : \sigma_{11}^3 : \sigma_{12}^3 = (\xi+2) : -i\sqrt{3}\cdot\xi : (\xi+2\varepsilon^2) : -(\xi+2\varepsilon).$$

Diese liefern beiläufig die beiden Identitäten, welche für die vier $\sigma_{\lambda\mu}$ bestehen, nämlich:

$$+i\sqrt{3}\cdot\frac{\sigma_{01}^3}{\sigma_{10}^3}+1 = \varepsilon\cdot\left\{+i\sqrt{3}\cdot\frac{\sigma_{11}^3}{\sigma_{10}^3}+1\right\} = \varepsilon^2\cdot\left\{+i\sqrt{3}\cdot\frac{\sigma_{21}^3}{\sigma_{10}^3}+1\right\}.$$

Aus (31.) entnimmt man das Verhalten von ξ bei linearer Substitution von ω_1 und ω_2; man findet, dass:

---

*) Man vergleiche KLEIN, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884, pag. 188.

**) Man vergleiche BIANCHI, Math. Ann. Bd. XVII, pag. 244 und die mehrfach citirte Note vom 2. März.

(34.) ξ durch Ausübung von $\begin{cases} S) \\ \\ T) \end{cases}$ übergeht in $\begin{matrix} \varepsilon \cdot \xi \\ \xi + 2 \\ \hline \xi - 1 \end{matrix}$.

Da der Definition von ξ zufolge $\xi(i\infty) = 0$ ist, giebt (34.) für die Werthe von ξ in den übrigen Ecken des Fundamentalpolygons:

$$\xi(0) = -2, \quad \xi(1) = -2\varepsilon, \quad \xi(-1) = -2\varepsilon^2 .$$

Setzen wir (29.) und (30.) damit in Verbindung, so erfahren wir: *Schreibt man die Gleichungen für die*

$$x_{01}^{(i)}, \; x_{10}^{(i)}, \; x_{11}^{(i)}, \; x_{12}^{(i)}$$

mit dem ersten Coëfficienten 1 an, so sind die übrigen Coefficienten ganze Functionen bez. der 3 Argumente

$$\frac{1}{\xi}, \; \frac{\varepsilon^2\xi - 1}{\varepsilon^2\xi + 2}, \; \frac{\varepsilon\xi - 1}{\varepsilon\xi + 2}; \; \frac{\xi - 1}{\xi + 2}, \; \frac{\varepsilon^2\xi - 1}{\varepsilon^2\xi + 2}, \; \frac{\varepsilon\xi - 1}{\varepsilon\xi + 2};$$

$$\frac{1}{\xi}, \; \frac{\xi - 1}{\xi + 2}, \; \frac{\varepsilon^2\xi - 1}{\varepsilon^2\xi + 2}; \quad \frac{1}{\xi}, \; \frac{\xi - 1}{\xi + 2}, \; \frac{\varepsilon\xi - 1}{\varepsilon\xi + 2}$$

und das constante Glied jeder Gleichung ist unabhängig von ξ, kann also mittels (29.) und (30.) sofort angegeben werden.

Andrerseits suchen wir mit (30.) und (34.) die *Transformationen der Gleichungen in sich* auf. Wir finden:

Die Gleichungen für die Grössen

$$x_{01}^{(i)}, \; x_{10}^{(i)}, \; x_{11}^{(i)}, \; x_{12}^{(i)}$$

bleiben ungeändert, wenn man ξ resp. durch

$$\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon\xi + 1}{\varepsilon\xi - 1}, \; \varepsilon^2 \cdot \frac{\varepsilon^2\xi + 2}{\varepsilon^2\xi - 1}; \; \varepsilon\xi, \; \varepsilon^2\xi; \; \varepsilon^2 \cdot \frac{\xi + 2}{\xi - 1}, \; \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^2\xi + 2}{\varepsilon^2\xi - 1};$$

$$\varepsilon \cdot \frac{\xi + 2}{\xi - 1}, \; \varepsilon^2 \cdot \frac{\varepsilon\xi + 2}{\varepsilon\xi - 1}$$

ersetzt.

Combinirt man die beiden letzten Angaben, so führt dies zu dem Schlussresultate betreffs der Form der Coëfficienten der Gleichungen: *Die Coëfficienten sind ganze Functionen resp. von:*

$$X_{01} = \frac{(\xi + 2)^3}{\xi(\varepsilon\xi + 2)(\varepsilon^2\xi + 2)}, \quad X_{10} = 9 \cdot \frac{\xi^3}{\xi^3 + 8},$$

$$X_{11} = \frac{(\varepsilon\xi + 2)^3}{\varepsilon\xi(\varepsilon^2\xi + 2)(\xi + 2)}, \quad X_{12} = \frac{(\varepsilon^2\xi + 2)^3}{\varepsilon^2\xi(\xi + 2)(\varepsilon\xi + 2)} .$$

Für das Weitere gelten wieder dieselben Bemerkungen wie in § 7. Wir stellen daher schliesslich noch das Verhalten der $X_{\lambda\mu}$ bei linearen Substitutionen der Perioden tabellarisch zusammen. Es ist dies das folgende:

$$(35.)\qquad \begin{array}{lcccc} & X_{01} & X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ S) & X_{11} & X_{10} & X_{12} & X_{01} \\ T) & X_{10} & X_{01} & X_{12} & X_{11}\,. \end{array}$$

Diese Tabelle vermittelt in Verbindung mit (30.) den Uebergang von irgend einer der vier simultanen Gleichungen zu den drei andern.

Beispiele:

$$n = 4.\quad \left(x_{01}-\frac{1}{2^2}\right)\left(x_{01}+\frac{1}{2}\right)(x_{01}-1)^4+\frac{8}{2^2}X_{01}x_{01}{}^4\left(x_{01}-\frac{1}{2}\right) = 0\,,$$

$$\left(x_{10}-\frac{1}{2^2}\right)\left(x_{10}+\frac{1}{2}\right)(x_{10}-1)^4+\frac{8}{2^2}X_{10}x_{10}{}^4\left(x_{10}-\frac{1}{2}\right) = 0\,,$$

$$\left(x_{11}-\frac{\varepsilon^2}{2^2}\right)\left(x_{11}+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)(x_{11}-\varepsilon^2)^4+\frac{8}{2^2}\varepsilon^2 X_{11}x_{11}{}^4\left(x_{11}-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)=0,$$

$$\left(x_{12}-\frac{\varepsilon}{2^2}\right)\left(x_{12}+\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{12}-\varepsilon)^4+\frac{8}{2^2}\varepsilon X_{12}x_{12}{}^4\left(x_{12}-\frac{\varepsilon}{2}\right) =0\,,$$

(1 unbestimmte Constante).

$$n = 7.\quad (x_{01}-1)^7\left(x_{01}-\frac{1}{7}\right)+\frac{8}{7}X_{01}x_{01}{}^7\,(5^2-3X_{01})$$
$$+\,3X_{01}x_{01}{}^4\,(2x_{01}{}^2-2^2x_{01}+1) = 0\,,$$

$$(x_{10}-1)^7\left(x_{10}-\frac{1}{7}\right)+\frac{8}{7}X_{10}x_{10}{}^7\,(5^2-3X_{10})$$
$$+\,3X_{10}x_{10}{}^4\,(2x_{10}{}^2-2^2x_{10}+1) = 0\,,$$

$$(x_{11}-\varepsilon)^7\left(x_{11}-\frac{\varepsilon}{7}\right)+\frac{8}{7}\varepsilon X_{11}x_{11}{}^7\,(5^2-3X_{11})$$
$$+\,3\varepsilon^2X_{11}x_{11}{}^4\,(2x_{11}{}^2-2^2\varepsilon x_{11}+\varepsilon^2) = 0\,,$$

$$(x_{12}-\varepsilon^2)^7\left(x_{12}-\frac{\varepsilon^2}{7}\right)+\frac{8}{7}\varepsilon^2X_{12}x_{12}{}^7\,(5^2-3X_{12})$$
$$+\,3\varepsilon X_{12}x_{12}{}^4\,(2x_{12}{}^2-2^2\varepsilon^2x_{12}+\varepsilon) = 0\,,$$

(5 unbestimmte Constante).

Wir haben auch diese Multiplicatorgleichungen wieder nur in Modul*functionen* geschrieben. Auf Grund von (28.) und (32.) kann man sie unmittelbar in den Modul*formen* $\sigma_{\lambda\mu}$ schreiben.

A. **Hurwitz**, *Ueber die Klassenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe.*

Bei meinen Untersuchungen über die Klassenzahlrelationen der 7ten und 11ten Stufe*) hat sich herausgestellt, dass die auf der rechten Seite dieser Relationen ausser Theilersummen noch auftretenden zahlentheoretischen Functionen nichts Anderes sind, als die Entwicklungscoëfficienten der überall endlichen Integrale der betreffenden Stufe. Dasselbe gilt, wie man sich leicht überzeugt, für die 6te und 8te Stufe**), und man kann, wenn man will, Gleiches auch für die ersten fünf Stufen vom Geschlechte Null behaupten, wo es dann so viel heisst, dass zu den Theilersummen keine weiteren zahlentheoretischen Functionen hinzutreten. Haben wir es hier mit einem allgemeinen, d. h. für alle Stufen gültigen Gesetze zu thun? Das ist die Frage, deren Entscheidung das nächste Ziel meiner weiteren Untersuchungen bildete. Es zeigte sich, dass die Entscheidung im bejahenden Sinne zu treffen ist, und ich möchte das hiermit bezeichnete Resultat in den nachfolgenden Zeilen begründen und näher präcisiren. Dabei beschränke ich mich jedoch auf den Fall *primzahliger* Stufen; man wird leicht erkennen, dass dieselben Betrachtungen mutatis mutandis auch für beliebige Stufen gelten.

Da sich die Herstellung der Klassenzahlrelationen auf die

---

*) Siehe: »Ueber Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante«. Mathem. Annalen Bd. 25. pag. 157 ff. und die unter gleichem Titel erschienene Note, diese Berichte, Sitzung vom 15. December 1884. Citate ohne nähere Angabe des Ortes beziehen sich auf die erstere Abhandlung.

**) Wegen der 8ten Stufe vgl. die Note »Zur Theorie der Modulargleichungen«, Göttinger Nachrichten vom 21. November 1883.

Untersuchung der Modularcorrespondenzen stützt, so wird gleichzeitig im Folgenden eine Theorie dieser Correspondenzen angebahnt: die Darstellung der Modularcorrespondenzen, wie sie sich im Laufe unserer Untersuchung ergiebt, wird die Grundlage für diese Theorie bilden müssen *).

Uebrigens habe ich in dieser Note nur solche Dinge zur Sprache gebracht, welche zur Erreichung des oben bezeichneten Zieles nothwendig berührt werden mussten. Eine eingehendere Darstellung, bei welcher dann auch alle Entwicklungen von einem höheren Gesichtspunkte aus beleuchtet werden sollen, denke ich demnächst zu veröffentlichen.

§ 1. Die überall endlichen Integrale der q^{ten} Stufe **).

Die überall endlichen Integrale der q^{ten} Stufe, wo q eine ungerade Primzahl bezeichnet, lassen sich als diejenigen eindeutigen überall endlichen Functionen $J(\omega)$ eines Argumentes ω definiren, welche der Functionalgleichung

$$J\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = J(\omega) + \text{const.}$$

genügen; dabei bedeutet $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ eine der Identität (mod. q) congruente ganzzahlige Substitution der Determinante 1. Diese Functionen kann man aus irgend

$$p = \frac{(q+2)(q-3)(q-5)}{24}$$

derselben, zwischen denen keine lineare Abhängigkeit stattfindet, zusammensetzen. Wir legen nun unseren Untersuchungen ein specielles System von solchen p unabhängigen Integralen zu Grunde, die wir am zweckmässigsten in folgender Weise bezeichnen:

$$\begin{array}{llll} J_1(\omega|o), & J_2(\omega|o), & \ldots & J_\lambda(\omega|o), \\ J_1(\omega|a), & J_2(\omega|a), & \ldots & J_\mu(\omega|a), \\ J_1(\omega|b), & J_2(\omega|b), & \ldots & J_\nu(\omega|b). \end{array}$$

*) Man sehe die vorbenannte Note, sowie namentlich die von Herrn KLEIN gegebene Darstellung der auf die Modularcorrespondenzen der 8ten Stufe bezüglichen Untersuchungen des Herrn FIEDLER, diese Berichte, Sitzung vom 2. März 1883, pag. 86 ff.

**) Zum besseren Verständniss dieses Paragraphen ziehe man die a. a. O. pag. 167—170 gegebenen Entwicklungen zu Rathe.

Hier soll a ein vollständiges System quadratischer Reste, b ein vollständiges System quadratischer Nichtreste (mod. q) durchlaufen, so dass also in dem vorstehenden Schema

$$\lambda + (\mu + \nu) \cdot \frac{q-1}{2}$$

Integrale enthalten sind*). Diese Integrale besitzen nun die nachstehenden besonderen Eigenschaften.

Es ist erstens:

$$(1) \qquad J_\varkappa(S(\omega)\,|\,r) = e^{\frac{2i\pi r}{q}} \,.\, J_\varkappa(\omega\,|\,r) + \text{const.},$$

wenn $S(\omega)$ eine der Congruenz

$$S(\omega) \equiv \omega + 1 \quad (\text{mod. } q)$$

genügende Substitution bezeichnet. Ferner hat man:

$$(2) \qquad J_\varkappa(U(\omega)\,|\,r) = J_\varkappa(\omega\,|\,ar) + \text{const.},$$

wenn die Substitution $U(\omega)$ die Congruenz

$$U(\omega) \equiv a\omega \quad (\text{mod. } q)$$

erfüllt. Dabei bezeichnet der Buchstabe r in der Gleichung (1) eine beliebige, in der Gleichung (2) eine nicht durch q theilbare Zahl, a bedeutet irgend einen quadratischen Rest von q, und es ist

$$J_\varkappa(\omega\,|\,r) = J_\varkappa(\omega\,|\,r')$$

zu setzen, falls $r \equiv r'$ (mod. q) ist.

In Folge einer dritten Eigenschaft unserer Integrale dürfen wir uns später auf die Untersuchung der Integrale $J(\omega\,|\,a)$ und $J(\omega\,|\,b)$ beschränken. Es ist nämlich stets möglich, aus den letzteren Integralen ein anderes $J(\omega)$ zusammenzusetzen, welches der Gleichung

---

*) Was die Zahlen λ, μ, ν angeht, so ist selbstverständlich $\lambda + (\mu + \nu) \cdot \frac{q-1}{2}$ als Gesammtzahl der Integrale gleich p. Es ergiebt sich auch ohne Schwierigkeit $\lambda = \frac{(q-5)(q-7)}{24}$ und also $\mu + \nu = \frac{(q-1)(q-5)}{12}$. Dagegen muss die Einzelbestimmung der Zahlen μ und ν einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

$$(3)\qquad J\left(-\frac{1}{\omega}\right)+J\left(-\frac{1}{\omega+1}\right)+J\left(-\frac{1}{\omega+2}\right)+\cdots$$
$$+J\left(-\frac{1}{\omega+q-1}\right)=J(\omega\,|\,o)$$

genügt, wo $J(\omega|o)$ irgend eines der Integrale $J_1(\omega|o)$, $J_2(\omega|o)$, ..., $J_\lambda(\omega|o)$ bezeichnet.

Betrachten wir endlich die Entwicklungen der Integrale $J(\omega|a)$ und $J(\omega|b)$ nach Potenzen der Grösse

$$h = e^{2i\pi\omega}!$$

Wir können dieselben jedenfalls in folgender Gestalt annehmen:

$$(4)\begin{cases} J_1(\omega|a)=\sum\limits_{m\equiv a}\frac{\psi_1(m)}{m}\,h^{\frac{m}{q}}\,,\quad J_2(\omega|a)=\sum\limits_{m\equiv a}\frac{\psi_2(m)}{m}\,h^{\frac{m}{q}}\,,\;\ldots\ldots, \\ J_1(\omega|b)=\sum\limits_{m\equiv b}\frac{\chi_1(m)}{m}\,h^{\frac{m}{q}}\,,\quad J_2(\omega|b)=\sum\limits_{m\equiv b}\frac{\chi_2(m)}{m}\,h^{\frac{m}{q}}\,,\;\ldots\ldots, \end{cases}$$

wo das Zeichen $\sum\limits_{m\equiv r}$ andeutet, dass der Summationsbuchstabe m alle (mod. q) zu r congruenten positiven Zahlen durchlaufen soll.

Durch diese Ansätze sind im Ganzen $(\mu+\nu)$ zahlentheoretische Functionen definirt; nämlich erstens μ Functionen

$$\psi_1(m)\,,\qquad \psi_2(m)\,,\quad \ldots,\quad \psi_\mu(m)\,,$$

bei welchen das Argument m irgend ein positiver quadratischer Rest von q, und zweitens ν Functionen

$$\chi_1(m)\,,\qquad \chi_2(m)\,,\quad \ldots,\quad \chi_\nu(m)\,,$$

bei welchen das Argument m irgend ein positiver quadratischer Nichtrest von q sein kann. Es ist nun eine letzte hier in Betracht kommende Eigenschaft unserer Integrale, dass *die Functionen ψ und χ für jeden Werth des Argumentes m ganzzahlige reelle Werthe besitzen**).

§ 2. Transformation n^{ter} Ordnung der überall endlichen Integrale q^{ter} Stufe.

Es bedeute nun n eine positive zu q theilerfremde Zahl und es mögen

$$R_1(\omega)\,,\qquad R_2(\omega)\,,\quad \ldots\ldots$$

*) Es giebt, beiläufig bemerkt, noch unzählig viele Systeme von p unabhängigen Integralen, welche die angegebenen Eigenschaften besitzen.

ein zum Schema

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{q}$$

gehöriges Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung bilden*), so dass

$$R_1(\omega) \equiv R_2(\omega) \equiv \ldots \equiv n\omega \pmod{q} \text{ ist.}$$

Dann wird gleichzeitig mit $J(\omega)$ auch die Summe

$$\sum_1^{\Phi(n)} {}^i\, J(R_i(\omega))^{**})$$

ein überall endliches Integral der q^{ten} Stufe vorstellen. Wenden wir diese Bemerkung auf die Integrale des § 1 an, so erhalten wir, unter Berücksichtigung der besonderen Eigenschaften (1) und (2) dieser Integrale, die folgenden Relationen:

$$\sum_1^{\Phi(n)} {}^i\, J_h(R_i(\omega)\,|\,a) = \sum_1^{\mu} {}^\alpha\, c_\alpha^h(n) \cdot J_\alpha(\omega\,|\,na) + \text{const.}\,,$$

$$\sum_1^{\Phi(n)} {}^i\, J_k(R_i(\omega)\,|\,b) = \sum_1^{\nu} {}^\beta\, d_\beta^k(n)\,.\, J_\beta(\omega\,|\,nb) + \text{const.}\,,$$

wenn n quadratischer Rest von q ist; dagegen

$$\sum_1^{\Phi(n)} {}^i\, J_h(R_i(\omega)\,|\,a) = \sum_1^{\nu} {}^\beta\, e_\beta^h(n)\,.\, J_\beta(\omega\,|\,na) + \text{const.}\,,$$

$$\sum_1^{\Phi(n)} {}^i\, J_k(R_i(\omega)\,|\,b) = \sum_1^{\mu} {}^\alpha\, f_\alpha^k(n)\,.\, J_\alpha(\omega\,|\,nb) + \text{const.}\,,$$

wenn n quadratischer Nichtrest von q ist. Dabei sind dem Buchstaben h successive die Werthe 1, 2, 3, ... μ, dem Buchstaben k successive die Werthe 1, 2, 3, ... ν beizulegen und es bedeuten

$$c_\alpha^h(n)\,,\qquad d_\beta^k(n)\,,\qquad e_\beta^h(n)\,,\qquad f_\alpha^k(n)$$

Zahlenfactoren, welche ausser von ihren Indices nur noch von n abhängen.

---

*) A. a. O. pag. 172.

**) Die Anzahl $\Phi(n)$ der Repräsentanten $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$, ... ist bekanntlich gleich der Summe der Divisoren der Zahl n.

Zur Bestimmung dieser Factoren tragen wir in die obigen Relationen die Entwicklungen [(4) in § 1] der Integrale nach Potenzen von h ein. Der Vergleich der hierbei auf beiden Seiten auftretenden Coëfficienten von $h^{\frac{m}{q}}$ ergiebt die Gleichungen:

$$\sum \delta\psi_h\left(\frac{nm}{\delta^2}\right) = \sum_1^{\mu} {}_{\alpha}\, c_\alpha{}^h(n)\,\psi_\alpha(m)\,, \quad \left[\left(\frac{n}{q}\right) = +1,\ \left(\frac{m}{q}\right) = +1\right],$$

$$\sum \delta\chi_k\left(\frac{nm}{\delta^2}\right) = \sum_1^{\nu} {}_{\beta}\, d_\beta{}^k(n)\,\chi_\beta(m)\,, \quad \left[\left(\frac{n}{q}\right) = +1,\ \left(\frac{m}{q}\right) = -1\right],$$

$$\sum \delta\psi_h\left(\frac{nm}{\delta^2}\right) = \sum_1^{\nu} {}_{\beta}\, e_\beta{}^h(n)\,\chi_\beta(m)\,. \quad \left[\left(\frac{n}{q}\right) = -1,\ \left(\frac{m}{q}\right) = -1\right],$$

$$\sum \delta\chi_k\left(\frac{nm}{\delta^2}\right) = \sum_1^{\mu} {}_{\alpha}\, f_\alpha{}^k(n)\,\psi_\alpha(m)\,, \quad \left[\left(\frac{n}{q}\right) = -1,\ \left(\frac{m}{q}\right) = +1\right],$$

wobei die Summen auf der linken Seite über alle gemeinsamen Divisoren δ von n und m zu erstrecken sind. Die Zahlen n und m sind nur den bei jeder Gleichung mit Hülfe des LEGENDRE-schen Zeichens angedeuteten Bedingungen zu unterwerfen.

Jetzt bemerke man, dass n und m in den linker Hand auftretenden Summen *symmetrisch* vorkommen; es folgt daraus, dass nothwendig

$$\sum_1^{\mu} {}_{\alpha}\, c_\alpha{}^h(n)\,\psi_\alpha(m) = \sum_1^{\mu} {}_{\alpha}\, c_\alpha{}^h(m)\,\psi_\alpha(n), \quad \left[\left(\frac{n}{q}\right) = +1,\ \left(\frac{m}{q}\right) = +1\right],$$

$$\sum_1^{\nu} {}_{\beta}\, d_\beta{}^k(n)\,\chi_\beta(m) = \sum_1^{\mu} {}_{\alpha}\, f_\alpha{}^k(m)\,\psi_\alpha(n), \quad \left[\left(\frac{n}{q}\right) = +1,\ \left(\frac{m}{q}\right) = -1\right],$$

$$\sum_1^{\nu} {}_{\beta}\, e_\beta{}^h(n)\,\chi_\beta(m) = \sum_1^{\nu} {}_{\beta}\, e_\beta{}^h(m)\,\chi_\beta(n), \quad \left[\left(\frac{n}{q}\right) = -1,\ \left(\frac{m}{q}\right) = -1\right]$$

ist. Nunmehr mögen in der ersten der vorstehenden Gleichungen für m successive μ specielle quadratische Reste von q

$$m_1\,, \quad m_2\,, \quad \ldots \quad m_\mu$$

eingetragen werden, welche der Bedingung genügen, dass die Determinante

$$|\,\psi_\alpha(m_{\alpha'})\,| \qquad (\alpha,\ \alpha' = 1, 2, 3, \ldots \mu)$$

nicht verschwindet. Diese Bedingung lässt sich stets erfüllen, da die Integrale $J_1(\omega|a)$, $J_2(\omega|a)$, ... $J_\mu(\omega|a)$ von einander unabhängig sind. Aus den μ so entstehenden Gleichungen können nun die Grössen $c_\alpha{}^h(n)$ berechnet werden. *Offenbar ergeben sich die Grössen $c_\alpha{}^h(n)$ als homogene lineare Functionen von*

$$\psi_1(n), \quad \psi_2(n), \quad \dots \quad \psi_\mu(n)$$

mit von n unabhängigen Coëfficienten.

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass auch *die Grössen $d_\beta{}^k(n)$ homogene lineare Functionen mit von n unabhängigen Coëfficienten von*

$$\psi_1(n), \quad \psi_2(n), \quad \dots \quad \psi_\mu(n),$$

und dass die Grössen $e_\beta{}^h(n)$, $f_\alpha{}^k(n)$ ebensolche Functionen von

$$\chi_1(n), \quad \chi_2(n), \quad \dots \quad \chi_\nu(n)$$

*sind**).

§ 3. Der Transformationsgrad ist quadratischer Rest von q.

Indem wir uns nun zunächst auf den Fall beschränken, dass der Transformationsgrad quadratischer Rest von q ist, knüpfen wir an die zu Anfang des vorigen Paragraphen aufgestellten Relationen an, bezeichnen jedoch für einen Augenblick den Transformationsgrad mit n' statt mit n. Wir gehen also von den Gleichungen

$$\sum_1^{\Phi(n')} {}_i\, J_h(R'_i(\omega)\,|\,a) = \sum_1^{\mu} {}_\alpha\, c_\alpha{}^h(n')\, J_\alpha(\omega\,|\,n'a) + \text{const.},$$

$$\sum_1^{\Phi(n')} {}_i\, J_k(R'_i(\omega)\,|\,b) = \sum_1^{\nu} {}_\beta\, d_\beta{}^k(n')\, J_\beta(\omega\,|\,n'b) + \text{const.}$$

aus, wobei

$$R'_1(\omega) \equiv R'_2(\omega) \equiv \dots \equiv n'\omega \pmod{q}$$

die Glieder eines Repräsentantensystems der Transformation

---

*) Beiläufig erhält man die Summen $\Sigma\, \delta\, \psi_h\left(\frac{nm}{\delta^2}\right)$, etc., ausgedrückt durch bilineare Functionen der $\psi_\alpha(n)$, $\psi_\alpha(m)$ etc. mit von n und m unabhängigen Coëfficienten.

n'^{ter} Ordnung bezeichnen. Führen wir hier $U(\omega)$ an Stelle von ω ein, wo $U(\omega)$ eine zu

$$\frac{n}{n'}\,\omega \pmod{q}$$

congruente lineare Substitution bedeutet, so gehen unsere Gleichungen in die folgenden über:

$$\sum_1^{\Phi(n')} {}_i\, J_h(\overline{R}_i(\omega)\,|\,a) = \sum_1^{\mu} {}_\alpha\, c_\alpha{}^h(n')\, J_\alpha(\omega\,|\,n a) + \text{const.}\,,$$

$$\sum_1^{\Phi(n')} {}_i\, J_k(\overline{R}_i(\omega)\,|\,b) = \sum_1^{\nu} {}_\beta\, d_\beta{}^k(n')\, J_\beta(\omega\,|\,n b) + \text{const.}\,,$$

wo nun die Repräsentanten $\overline{R}_i(\omega)$ der Congruenz

$$\overline{R}_i(\omega) \equiv n\omega \pmod{q}$$

genügen. Es sollen jetzt für n' successive μ bestimmte Reste

$$n_1\,, \quad n_2\,, \quad \ldots \quad n_\mu$$

gewählt und die entsprechenden Relationen mit unbestimmten Coëfficienten

$$l_1\,, \quad l_2\,, \quad \ldots \quad l_\mu$$

versehen zu den für n gültigen Relationen addirt werden.

Bezeichnen wir die Repräsentanten für den Transformationsgrad $n_\varkappa$ mit

$$R_i^\varkappa(\omega) \equiv n\omega \pmod{q}\,,$$

so erhalten wir auf die angegebene Weise die Summen

$$\sum_1^{\Phi(n')} {}_i\, J_h(R_i(\omega)|a) + l_1 \sum_1^{\Phi(n_1)} {}_i\, J_h(R_i^1(\omega)\,|\,a) + \ldots + l_\mu \sum_1^{\Phi(n_\mu)} {}_i\, J_h(R_i^\mu(\omega)|a)$$

und

$$\sum_1^{\Phi(n)} {}_i\, J_k(R_i(\omega)|b) + l_1 \sum_1^{\Phi(n_1)} {}_i\, J_k(R_i^1(\omega)\,|\,b) + \ldots + l_\mu \sum_1^{\Phi(n_\mu)} {}_i\, J_k(R_i^\mu(\omega)|b)$$

ausgedrückt durch die Integrale $J_\alpha(\omega\,|\,n a)$ und $J_\beta(\omega\,|\,n b)$, wobei die Coëfficienten dieser Integrale bezüglich

$$c_\alpha{}^h(n) + l_1 c_\alpha{}^h(n_1) + \ldots + l_\mu c_\alpha{}^h(n_\mu)$$

und

$$d_\beta{}^k(n) + l_1 d_\beta{}^k(n_1) + \ldots + l_\mu d_\beta{}^k(n_\mu)$$

lauten. Diese Coëfficienten werden aber, da die Grössen $c_\alpha{}^h(n)$ und $d_\beta{}^k(n)$ sich aus $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, $\ldots$ $\psi_\mu(n)$ wie im vorigen

Paragraphen angegeben zusammensetzen, sämmtlich verschwinden, falls nur $l_1, l_2, \dots l_\mu$ aus den Gleichungen:

$$\begin{gathered}\psi_1(n) + l_1\psi_1(n_1) + \dots + l_\mu\psi_1(n_\mu) = 0\,,\\ \psi_2(n) + l_1\psi_2(n_1) + \dots + l_\mu\psi_2(n_\mu) = 0\,,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \psi_\mu(n) + l_1\psi_\mu(n_1) + \dots + l_\mu\psi_\mu(n_\mu) = 0\end{gathered}$$

bestimmt werden. Wählen wir nun, was stets möglich ist, die Zahlen $n_\varkappa$ so, dass die Determinante

$$D = |\psi_\alpha(n_{\alpha'})| \quad (\alpha, \alpha' = 1, 2, \dots \mu)$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so ergeben sich $l_1, l_2, \dots l_\mu$ als lineare homogene Functionen von $\psi_1(n), \psi_2(n), \dots \psi_\mu(n)$ mit von n unabhängigen Coëfficienten. Diese Coëfficienten sind rationale Zahlen (mit dem gemeinsamen Nenner D), da die Grössen ψ nach § 1 sämmtlich reelle ganzzahlige Werthe besitzen.

Sind nun auf diese Weise die Factoren $l_1, l_2, \dots l_\mu$ bestimmt, so besteht für jedes Integral $J(\omega)$, welches aus den Integralen $J(\omega\,|\,a)$ und $J(\omega\,|\,b)$ zusammengesetzt ist, die Relation:

$$\sum_1^{\Phi(n)}{}_i J(R_i(\omega)) + l_1\sum_1^{\Phi(n_1)}{}_i J(R_i^1(\omega)) + \dots + l_\mu\sum_1^{\Phi(n_\mu)}{}_i J(R_i^\mu(\omega)) = \text{const.}$$

Hier ersetze man ω durch $S(\omega)$, wo $S(\omega)$ eine beliebige lineare Substitution bedeutet; so zeigt sich, dass man in der vorstehenden Relation unter

$$R_i(\omega)\,,\ R_i^1(\omega)\,,\ \dots\ R_i^\mu(\omega)$$

irgend welche, unter einander (mod q) congruente Repräsentanten der Transformation

$$n^{\text{ter}},\ n_1^{\text{ter}},\ \dots\ n_\mu^{\text{ter}}$$

Ordnung verstehen darf. Daher wird auch

$$\begin{aligned}\sum_1^{\Phi(n)}{}_i J\left(-\frac{1}{R_i(\omega)+r}\right) &+ l_1\sum_1^{\Phi(n_1)}{}_i J\left(-\frac{1}{R_i^1(\omega)+r}\right) + \dots\\ &+ l_\mu\sum_1^{\Phi(n_\mu)}{}_i J\left(-\frac{1}{R_i^\mu(\omega)+r}\right) = \text{const.}\end{aligned}$$

sein, wenn r eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Wir nehmen

r successive gleich 0, 1, 2, ..., $q-1$, an und addiren alle entstehenden Gleichungen, so ergiebt sich zufolge der Gleichung (3) in § 1, dass die obige Relation auch noch statt hat, wenn unter $J(\omega)$ irgend eines der Integrale $J_1(\omega|o)$, $J_2(\omega|o) \ldots J_\lambda(\omega|o)$ verstanden wird.

Hieraus folgt dann endlich, dass in jener Relation $J(\omega)$ ein *ganz beliebiges* Integral q^{ter} Stufe sein darf. Wir haben also das Resultat:

Es mögen $n_1, n_2, \ldots n_\mu$ μ *positive quadratische Reste von* q *bezeichnen, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Determinante*

$$D = |\psi_\alpha(n_{\alpha'})| \quad (\alpha, \alpha' = 1, 2, \ldots \mu)$$

von Null verschieden ist. Ferner bedeute n *irgend einen positiven quadratischen Rest von* q *und es seien* $R_i(\omega)$, $R_i^1(\omega)$, ... $R_i^\mu(\omega)$ *unter einander (mod. q) congruente, übrigens beliebige Repräsentanten der Transformation* n^{ter}, n_1^{ter}, ... n_μ^{ter} *Ordnung. Dann besteht für jedes überall endliche Integral* q^{ter} *Stufe* $J(\omega)$ *die Relation:*

$$\sum_1^{\Phi(n)} {}_i J(R_i(\omega)) + l_1 \sum_1^{\Phi(n_1)} {}_i J(R_i^1(\omega)) + \cdots + l_\mu \sum_1^{\Phi(n_\mu)} {}_i J(R_i^\mu(\omega)) = \text{const.}$$

wo $l_1, l_2, \ldots l_\mu$ *lineare homogene Functionen von* $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, ... $\psi_\mu(n)$ *mit von* n *unabhängigen Coëfficienten bezeichnen. Diese Coëfficienten stellen sich als rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner* D *dar.*

Man kann, wie hier beiläufig bemerkt werde, die Integrale $J(\omega|a)$ so annehmen, dass

$$\psi_\alpha(n_{\alpha'}) = 0 \text{ oder } -D$$

wird, je nachdem $\alpha \gtrless \alpha'$ oder $\alpha = \alpha'$ ist; dann kommt einfach:

$$l_1 = \frac{1}{D}\psi_1(n), \quad l_2 = \frac{1}{D}\psi_2(n), \quad \ldots \quad l_\mu = \frac{1}{D}\psi_\mu(n) \; .$$

Was die Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_\mu$ angeht, so lässt sich leicht zeigen, dass dieselben auf unzählig viele Weisen der Bedingung $|\psi_\alpha(n_\alpha')| \gtrless 0$ gemäss gewählt werden können.

§ 4. Der Transformationsgrad ist quadratischer Nichtrest von q.

Durch ähnliche Betrachtungen, wie sie im vorigen Paragraphen angestellt wurden, finden wir für den Fall, dass der Transformationsgrad quadratischer Nichtrest von q ist, folgenden Satz:

Es mögen $n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots n^{(\nu)}$ ν positive quadratische Nichtreste von q bezeichnen, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Determinante

$$E = |\chi_\beta(n^{(\beta')})| \quad (\beta, \beta' = 1, 2, \ldots \nu)$$

von Null verschieden ist. Ferner bedeute n irgend einen positiven quadratischen Nichtrest von q, und es seien $R_i(\omega)$, $R_i^1(\omega)$, $\ldots R_i^\nu(\omega)$ unter einander (mod. q) congruente, übrigens beliebige Repräsentanten der Transformation n^{ter}, $n^{(1)\text{ter}}$, $\ldots n^{(\nu)\text{ter}}$ Ordnung. Dann besteht für jedes überall endliche Integral $J(\omega)$ q^{ter} Stufe die Relation:

$$\sum_1^{\Phi(n)} {}^i J(R_i(\omega)) + m_1 \sum_1^{\Phi(n^{(1)})} {}^i J(R_i^1(\omega)) + \cdots + m_\nu \sum_1^{\Phi(n^{(\nu)})} {}^i J(R_i^\nu(\omega)) = \text{const.},$$

wo $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ lineare homogene Functionen von $\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots \chi_\nu(n)$ mit von n unabhängigen Coëfficienten bezeichnen. Diese Coëfficienten stellen sich als rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner E dar.

Es können die Integrale $J(\omega|b)$ so angenommen werden, dass einfach

$$m_1 = \frac{1}{E}\chi_1(n), \quad m_2 = \frac{1}{E}\chi_2(n), \quad \ldots \quad m_\nu = \frac{1}{E}\chi_\nu(n)$$

wird, und die Zahlen $n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots n^{(\nu)}$ lassen sich auf unzählig viele Weisen der Bedingung $|\chi_\beta(n^{(\beta')})| \gtreqless 0$ gemäss wählen.

§ 5. Die Modularcorrespondenzen der q^{ten} Stufe.

Nunmehr sollen, wie a. a. O. pag. 170, mit

$$j_1(\omega), \; j_2(\omega), \; \ldots \; j_p(\omega)$$

p Normalintegrale der q^{ten} Stufe und mit $\vartheta[u_1, u_2, \ldots u_p]$ oder kürzer $\vartheta[u_r]$ die zugehörige ϑ-Function bezeichnet werden;

ferner mögen $c_1, c_2, \ldots c_p$ die a. a. O. pag. 171 angegebene Bedeutung haben. Zur Abkürzung setzen wir weiter:

$$\Phi_n(\omega', \omega) = \prod_{1}^{\Phi(n)} \vartheta[j_r(\omega') - j_r(R_i(\omega)) - c_r]$$

und

$$F_n(\omega', \omega) = \frac{\Phi_n(\omega', \omega)}{\Phi_n(\omega'_0, \omega) \cdot \Phi_n(\omega', \omega_0)};$$

wo ω'_0, ω_0 willkürliche aber feste Werthe bedeuten. Schliesslich sei:

$$f_n(\omega', \omega) = \begin{cases} [F_n(\omega', \omega)]^D \cdot [F_{n_1}(\omega', \omega)]^{Dl_1} \ldots\ldots [F_{n_\mu}(\omega', \omega)]^{Dl_\mu}, \text{ oder} \\ [F_n(\omega', \omega)]^E \cdot [F_{n^{(1)}}(\omega', \omega)]^{Em_1} \ldots\ldots [F_{n^{(\nu)}}(\omega', \omega)]^{Em_\nu}, \end{cases}$$

je nachdem n quadratischer Rest oder Nichtrest von q ist.

Diese Function $f_n(\omega', \omega)$ ist nun in Folge der in den letzten Paragraphen begründeten Relationen eine *algebraische* Function auf der RIEMANN'schen Fläche q^{ter} Stufe*), mögen wir nun $f_n(\omega', \omega)$ als Function der Stelle ω', oder als Function der Stelle ω betrachten. Gemäss ihrer Zusammensetzung verschwindet $f_n(\omega', \omega)$ als Function von ω', abgesehen von festen, durch die Wahl von ω_0 bedingten Nullstellen, an denjenigen Stellen, welche in den Modularcorrespondenzen der Transformationsgrade $n, n_1, n_2, \ldots n_\mu$ bez. $n, n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots n^{(\nu)}$ der Stelle ω correspondiren, wobei eine Unendlichkeitsstelle als eine Nullstelle von negativer Ordnungszahl anzusehen ist. Die Ordnungszahlen der Nullstellen sind durch die Exponenten $D, Dl_1, \ldots$ bez. $E, Em_1, \ldots$ angegeben.

Nehmen wir an Stelle der Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_\mu$ irgend μ andere: $n'_1, n'_2, \ldots n'_\mu$, für welche $D' = |\psi_\alpha(n'_{\alpha'})| \gtreqless 0$ ist, so gehört zu diesen eine Function $f'_n(\omega', \omega)$ genau in derselben Weise, wie $f_n(\omega', \omega)$ zu den Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_\mu$ gehört. Nun lassen sich die Zahlen n'_k stets so wählen, dass D und D' relative Primzahlen werden und folglich die Gleichung

$$Dd + D'd' = 1$$

durch ganze Zahlen d, d' befriedigt werden kann. Die Function

$$\varphi_n(\omega', \omega) = [f_n(\omega', \omega)]^d \cdot [f'_n(\omega', \omega)]^{d'}$$

*) A. a. O. pag. 168.

verschwindet dann, als Function von ω' betrachtet, an denjenigen Stellen, welche in der Modularcorrespondenz des n^{ten} Transformationsgrades der Stelle ω entsprechen, einfach. *Vereinigt man also die Modularcorrespondenz eines beliebigen Transformationsgrades n, welcher quadratischer Rest von q ist, mit gewissen festen Modularcorrespondenzen (der Transformationsgrade n_1, n_2, .. n'_1, n'_2, ..), letztere je in bestimmter Multiplicität genommen, so lassen sich diese Correspondenzen zusammen durch die* e i n e *Gleichung:*

$$\varphi_n(\omega', \omega) = 0$$

definiren, deren linke Seite eine algebraische Function der beiden Stellen ω', ω auf der Riemann'schen Fläche q^{ter} Stufe vorstellt.

Ein entsprechender Satz gilt für die Transformationsgrade, welche quadratische Nichtreste von q sind; die dann hinzuzunehmenden festen Modularcorrespondenzen gehören zu 2ν Transformationsgraden $n^{(1)}$, $n^{(2)}$, .. $n^{(\nu)}$, $n'^{(1)}$, $n'^{(2)}$, .. $n'^{(\nu)}$, welche nur der Bedingung genügen müssen, dass die Determinanten $E = |\chi_\beta(n^{\beta'})|$ und $E' = |\chi_\beta(n'^{\beta'})|$ relative Primzahlen sind.

§ 6. Die Klassenzahlrelationen der q^{ten} Stufe.

Es mögen nun vier ganze Zahlen α, β, γ, δ, welche nur der Einschränkung unterworfen sind, dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = n_0$$

quadratischer Rest von q sei, fest angenommen werden. Wir können dann für jeden Transformationsgrad n, welcher quadratischer Rest von q ist, ein Repräsentantensystem $R_i(\omega)$ durch die Congruenz

$$R_i(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \pmod{q}$$

unzweideutig definiren. Die Glieder der auf diese Weise für die verschiedenen Transformationsgrade definirten Repräsentantensysteme werden sämmtlich unter einander (mod. q) congruent sein, und es dürfen daher — was jetzt geschehen soll — diese Repräsentanten bei der Bildung der Function $f_n(\omega', \omega)$ verwendet werden. Wir betrachten nun die Function

$$f_n^*(\omega, \omega),$$

welche aus $f_n(\omega', \omega)$ durch die Substitution $\omega' = \omega$ entsteht. Dabei ist jedoch im Falle, dass n ein Quadrat und $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \equiv \omega \pmod{q}$ ist, der zu ω äquivalente Repräsentant im Zähler von $F_n(\omega', \omega)$ auszuscheiden, bevor $\omega' = \omega$ gesetzt wird. Dieses soll der an f_n gesetzte Stern andeuten. Abgesehen von diesem Falle, ist $f_n^*(\omega, \omega)$ offenbar eine algebraische Function der Stelle ω auf der Riemann'schen Fläche q^{ter} Stufe, während in jenem Ausnahmefalle die Function $f_n^*(\omega, \omega)$ sich bis auf einen von ω unabhängigen Factor reproducirt, wenn die Stelle ω einen geschlossenen Weg auf der Riemann'schen Fläche beschreibt. Jedenfalls wird daher $f_n^*(\omega, \omega)$, auf der durch zweckmässige Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelten Fläche, ebenso oft Null wie unendlich werden.

Nun werde die a. a. O. pag. 181 mit σ bezeichnete Zahl der Nullstellen von

$$\Pi' \vartheta\left[j_r(\omega) - j_r(R_i(\omega)) - c_r\right],$$

da sie von n abhängig ist, hier der Deutlichkeit halber mit $\sigma(n)$ bezeichnet. Dann findet sich die Gesammtordnung der Null- und Unendlichkeitsstellen von $f_n^*(\omega, \omega)$ gleich

$$D(\sigma(n) - 2\Phi(n) - \eta) + D l_1(\sigma(n_1) - 2\Phi(n_1)) + \cdots + D l_\mu(\sigma(n_\mu) - 2\Phi(n_\mu))$$

und dieser Ausdruck muss, wie soeben bemerkt, gleich Null sein. Dabei haben wir η nur dann von Null verschieden und zwar gleich $2(p-1)$ zu nehmen, wenn der durch den Stern angedeutete Fall vorliegt.

In der so gewonnenen Gleichung

$$\sigma(n) - 2\Phi(n) - \eta = -l_1(\sigma(n_1) - 2\Phi(n_1)) - \cdots - l_\mu(\sigma(n_\mu) - 2\Phi(n_\mu))$$

ist die rechte Seite eine homogene lineare Function von $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, ... $\psi_\mu(n)$ mit von n unabhängigen Coëfficienten, also etwa

$$\sigma(n) - 2\Phi(n) - \eta = h_1\psi_1(n) + h_2\psi_2(n) + \cdots + h_\mu\psi_\mu(n).$$

In dieser Formel sind nun die sämmtlichen Klassenzahlrelationen für quadratische Reste n enthalten. Wollen wir diese Relationen explicite angeben, so müssen wir für die verschiedenen Werthsysteme α, β, γ, δ die Ausdrücke von $\sigma(n)$ der a. a. O. pag. 182 aufgestellten Tabelle entnehmen, wobei die

dort mit a, b, c, d bezeichneten Zahlen bezüglich gleich $\varrho\alpha$, $\varrho\beta$, $\varrho\gamma$, $\varrho\delta$ zu setzen sind, unter ϱ eine die Congruenz

$$\varrho^2(\alpha\delta - \beta\gamma) = \varrho^2 n_0 \equiv n \pmod{q}$$

befriedigende Zahl verstanden. Die verschiedenen Systeme α, β, γ, δ sind zunächst nach der durch die Congruenz

$$(\alpha + \delta)^2 \equiv r n_0 \pmod{q}$$

definirten Zahl r zu unterscheiden. Da sich nämlich

$$(a + d)^2 - 4n \equiv \varrho^2(\alpha + \delta)^2 - 4n \equiv (r - 4)\, n \pmod{q}$$

ergiebt, so liegt der Fall I, 1, oder I, 2, oder II der genannten Tabelle vor, je nachdem $r - 4$ quadratischer Nichtrest, oder Rest von q oder durch q theilbar ist. Im letzteren Falle hat man weiter die Werthe β, γ zu beachten: ist $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{q}$, so handelt es sich um den Fall II, 2, ist mindestens eine der beiden Zahlen β, γ nicht durch q theilbar um den Fall II, 1 der Tabelle. Hiernach stellen sich nun die Klassenzahlrelationen einzeln folgendermassen dar:

Man nehme eine durch q theilbare Zahl und ein vollständiges System quadratischer Reste (mod. q), also im Ganzen $\frac{q+1}{2}$ Zahlen, an und bezeichne mit r_1 diejenigen unter diesen Zahlen, für welche $r_1 - 4$ quadratischer Nichtrest, mit r_2 diejenigen, für welche $r_2 - 4$ quadratischer Rest von q wird; dann ist:

$$1)\ (q + 1)\sum_{r_1 n}{}' H(4n - x^2)$$
$$= 2\Phi(n) + h_1^{(r_1)}\psi_1(n) + h_2^{(r_1)}\psi_2(n) + \cdots + h_\mu^{(r_1)}\psi_\mu(n);$$

$$2)\ (q - 1)\sum_{r_2 n}{}' H(4n^2 - x^2)$$
$$= 2\Phi(n) + h_1^{(r_2)}\psi_1(n) + h_2^{(r_2)}\psi_2(n) + \cdots + h_\mu^{(r_2)}\psi_\mu(n)$$
$$- (q - 1)\, U_{\frac{1}{2}\sqrt{(r_2-4)n} + \frac{1}{2}\sqrt{r_2 n}} - (q-1)\, U_{\frac{1}{2}\sqrt{(r_2-4)n} - \frac{1}{2}\sqrt{r_2 n}};$$

$$3)\ q(q^2 - 1)\sum_{4n}{}' H\left(\frac{4n - x^2}{q^2}\right)$$
$$= 2\Phi(n) + h_1^{(4)}\psi_1(n) + h_2^{(4)}\psi_2(n) + \cdots + h_\mu^{(4)}\psi_\mu(n)$$
$$- (q^2 - 1)\, U_{\sqrt{n}};$$

4) $q \cdot \sum\limits_{4n} \left[H(4n - x^2) - H\left(\frac{4n - x^2}{q^2}\right) \right]$

$= 2\Phi(n) + i_1 \psi_1(n) + i_2 \psi_2(n) + \cdots + i_\mu \psi_\mu(n) - (q-1) U_{\sqrt{n}}$;

4ᵃ) $2q \cdot \sum\limits_{4n} H_{+1}(4n - x^2)$

$= 2\Phi(n) + i'_1 \psi_1(n) + i'_2 \psi_2(n) + \cdots + i'_\mu \psi_\mu(n) - (q-1) U_{\sqrt{n}}$;

4ᵇ) $2q \cdot \sum\limits_{4n} H_{-1}(4n - x^2)$

$= 2\Phi(n) + i''_1 \psi_1(n) + i''_2 \psi_2(n) + \cdots + i''_\mu \psi_\mu(n) - (q-1) U_{\sqrt{n}}$.

Die Zeichen $H(m)$, $H_{\pm 1}(m)$ und $U_\varkappa$ haben die a. a. O. pag. 181 angegebene Bedeutung; dagegen sind hier die linker Hand auftretenden Summen

$$\sum_k f(\varkappa)\,,$$

falls k nicht $\equiv 0$ (mod. q) ist, zu erstrecken über alle positiven ganzen Zahlen $\varkappa$, welche $2\sqrt{n}$ nicht übertreffen und deren Quadrat congruent k (mod. q) ist, wenn aber $k \equiv 0$ (mod. q) ist, über alle positiven und negativen durch q theilbaren Zahlen k, welche absolut genommen $2\sqrt{n}$ nicht übertreffen. Was die Factoren h und i angeht, so sind dieselben lediglich von der Stufenzahl q, nicht aber von n abhängig.

Die Gleichungen (1), (2) und (3), welche im Ganzen $\frac{1}{2}(q+1)$ Relationen repräsentiren, sind für jede Primzahl q gültig, dagegen gilt die Gleichung (4) nur, wenn $q \equiv 3$ (mod. 4) ist, und die Gleichungen (4ᵃ) und (4ᵇ) setzen $q \equiv 1$ (mod. 4) voraus. Endlich ist noch zu bemerken, dass die Factoren $i'_\varkappa$ den entsprechenden $i''_\varkappa$ gleich sein müssen, da $H_{+1}(m) = H_{-1}(m)$ ist; umgekehrt wird man die letztere Beziehung aus den Gleichungen $i'_\varkappa = i''_\varkappa$ folgern können.

Auf ähnlichem Wege ergeben sich die Klassenzahlrelationen für quadratische Nichtreste n von q. Dieselben stellen sich folgendermassen dar:

Man nehme eine durch q theilbare Zahl und ein vollständiges System quadratischer Nichtreste (mod. q), also im Ganzen $\frac{q+1}{2}$ Zahlen, an und bezeichne mit s_1 diejenigen unter diesen Zahlen,

für welche $s_1 - 4$ *quadratischer Rest, mit* s_2 *diejenigen, für welche* $s_2 - 4$ *quadratischer Nichtrest von* q *wird; dann ist:*

$$\left\{\begin{array}{l} 1)\ (q+1)\sum_{s_1 n}' H(4n-\varkappa^2) \\ \qquad = 2\Phi(n) + k_1^{(s_1)}\chi_1(n) + k_2^{(s_1)}\chi_2(n) + \ldots + k_\nu^{(s_1)}\chi_\nu(n), \\ 2)\ (q-1)\sum_{s_2 n}' H(4n-\varkappa^2) \\ \qquad = 2\Phi(n) + k_1^{(s_2)}\chi_1(n) + k_2^{(s_2)}\chi_2(n) + \ldots + k_\nu^{(s_2)}\chi_\nu(n) \\ -(q-1).U_{\frac{1}{2}\sqrt{(s_2-4)n}+\frac{1}{2}\sqrt{s_2 n}} - (q-1)U_{\frac{1}{2}\sqrt{(s_2-4)n}-\frac{1}{2}\sqrt{s_2 n}}. \end{array}\right.$$

In diesen beiden Gleichungen, welche im Ganzen $\frac{1}{2}(q+1)$ verschiedene Relationen repräsentiren, haben die Zeichen $H(m)$, $U_\varkappa$, $\sum\limits_k$ dieselbe Bedeutung, wie oben. Die Factoren k sind lediglich von der Stufenzahl q, nicht aber von n abhängige Zahlen.

§ 7. Bemerkungen zu den vorstehenden Relationen.

Die auf der rechten Seite der Klassenzahlrelationen auftretenden Functionen sind oben als Entwicklungscoëfficienten gewisser überall endlicher Integrale der q^{ten} Stufe definirt worden. Man wird verlangen, diese Functionen $\psi(n)$ und $\chi(n)$ auch rein zahlentheoretisch zu erklären, eine Forderung, welche für die 7te Stufe noch leicht zu befriedigen ist, aber schon für die 11te Stufe Schwierigkeiten darbietet.

Vergleicht man die für diese Stufe in der Sitzung vom 15. December 1884 mitgetheilten Relationen mit den hier gegebenen allgemeinen Relationen, so springt sofort ein Unterschied ins Auge. In den Formeln für quadratische Nichtreste von 11 sind nämlich dieselben Functionszeichen $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$ verwendet, welche in den Formeln für quadratische Reste von 11 auftreten. Diese Abweichung findet in Folgendem ihre Erklärung. Für $q = 11$ existiren drei Functionen $\psi(n)$ und zwei Functionen $\chi(n)$; diese lassen sich jedoch, wie selbstverständlich, auf nur drei Functionen $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$ zusammenziehen, indem man festsetzt, dass für einen quadratischen Nichtrest n von 11, $\psi_1(n) = 0$, $\psi_2(n) = \chi_1(n)$ und $\psi_3(n) = \chi_2(n)$ sein soll.

Dabei stellt sich denn heraus, falls man die genannte Festsetzung zweckmässig trifft, dass nunmehr die drei Functionen $\psi(n)$ für alle zu 11 theilerfremde Zahlen n in gleichmässiger Weise zahlentheoretisch definirt werden können. Auch im allgemeinen Falle dürften sich durch analoge Festsetzungen die $\mu + \nu$ Functionen $\psi(n)$, $\chi(n)$ auf eine geringere Zahl von Functionen naturgemäss zusammenziehen lassen.

Es drängt sich nun ferner die Frage auf, in welcher Weise die Factoren h, i, k von der Stufenzahl q abhängen. Die besonderen Fälle $q = 7$ und $q = 11$ können hier selbstverständlich keinen Anhaltspunkt bieten; denn für jeden speciellen Werth von q erhalten jene Factoren numerische Werthe, deren Abhängigkeit von der Stufenzahl nicht mehr zu erkennen ist. Uebrigens gewinnt die Frage erst dann eine präcise Bedeutung, falls die Integrale $J(\omega \,|\, a)$ und $J(\omega \,|\, b)$ und also die Functionen $\psi(n)$ und $\chi(n)$ in eindeutiger Weise festgelegt sind*).

Endlich will ich hier noch eine andere Formulirung der im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate erwähnen, wobei ich mich jedoch Kürze halber auf die Relation 1) daselbst beschränke. Der Inhalt dieser Relation lässt sich folgendermassen aussprechen:

Es bedeute r_1 einen quadratischen Rest von q, für welchen $r_1 - 4$ quadratischer Nichtrest von q wird, und man setze

$$c(n) = (q+1)\sum_{r_1 n} H(4n - \varkappa^2) - 2\Phi(n),$$

so stellt die Function

$$J(\omega) = \sum{}^{n} \frac{c(n)}{n} h^{\frac{n}{q}}, \qquad \left(h = e^{2i\pi\omega}\right),$$

die Summe erstreckt über alle positiven quadratischen Reste von q, ein überall endliches Integral der q^{ten} Stufe vor, welches die Eigenschaft

$$J(U(\omega)) = J(\omega) + \text{const.}$$

besitzt, unter $U(\omega)$ eine die Congruenz

$$U(\omega) \equiv a\omega \pmod{q}$$

befriedigende Substitution verstanden.

---

*) Vgl. die Anmerkung auf pag. 225.

Umgekehrt ist die Relation 1) eine unmittelbare Folge dieses Satzes. Es bietet sich somit die Möglichkeit, die Klassenzahlrelationen auf einem neuen und, wie es scheint, sehr einfachen Wege zu beweisen. Beispielsweise ist zur Begründung der Relation 1) nur der Nachweis erforderlich, dass die vorstehend definirte Function $J(\omega)$ für alle Werthe des Argumentes ω endlich ist und die in der Gleichung $J(U(\omega)) = J(\omega) + \text{const.}$ ausgesprochene Eigenschaft besitzt.

Königsberg i. Pr., den 1. Mai 1885.

Dr. W. von Bechterew, *Untersuchungen über die Schleifenschicht.* Mitgetheilt von dem ord. Mitglied Prof. P. Flechsig.

Die Untersuchung fötaler menschlicher Gehirne (mittelst Zerlegung in lückenlose Querschnittreihen und Hämatoxylinfärbung nach Weigert's Methode) ergiebt, dass die Schleifenschicht der Brücke in eine Anzahl successiv sich entwickelnder, d. h. in das Stadium der Markscheidenbildung eintretender Fasersysteme sich gliedert. Im mittleren Theil der Brücke unterscheidet man zweckmässig jederseits drei grössere Abtheilungen: 1) eine laterale, 2) eine mediale und 3) eine zwischen beiden gelegene centrale; die letztere übertrifft die ersteren beträchtlich an Querschnitt und wird deshalb am besten als Hauptheil der Schleifenschicht bezeichnet. Auf Grund der successiven Markumhüllung sowie der verschiedenen Verknüpfungsweisen seiner Elemente gliedert sich der Hauptheil überdies in etwa fünf Theilsysteme.

Von den genannten Abtheilungen wurde zuerst markhaltig gefunden die *laterale*, und zwar bei einem 26 cm langen Fötus. Sie enthält Fasern, welche von dem Ganglion des unteren Vierhügels gegen die obere Olive und das Corpus trapezoideum verlaufen, welch letzteres gleichfalls bei dem 26 cm langen Fötus markhaltig zu werden begann. Der in Rede stehende Theil der Schleifenschicht, den ich »*laterale*« Schleife nennen will, ist offenbar identisch mit der »unteren« Schleife Meynert's, Forel's u. A. Doch umfasst er *nicht alle* aus dem unteren Vierhügelganglion gegen Brücke und Oblongata ziehenden Fasern, sondern nur einen Theil. Die von genanntem Ganglion zur Formatio reticularis ziehenden Faserbündel (soweit sie nicht dem Corpus trapezoideum sich beigesellen) werden erst weit später markhaltig (zur Zeit bez. nach Erlangung der völligen Reife) und stellen somit ein besonderes System dar. Die Untersuchung von Gehirnen 26—30 cm langer Fötus nöthigt zu der Annahme, dass das untere Vierhügelganglion durch die *laterale* Schleife (die

streng genommen ganz allein die Bezeichnung Schleife verdient) mit der oberen Olive und dem Corpus trapezoideum (und hierdurch mit dem *achten* Hirnnerven) zusammenhängt. Ein Uebergang der lateralen Schleife in das verlängerte und Rückenmark hingegen ist nicht zu erweisen. Zwar trifft man spinalwärts von der oberen Olive ein schmächtiges, an Querschnitt kaum $^1/_4$ der lateralen Schleife messendes Faserbündel, welches sehr frühzeitig (schon vor der lateralen Schleife) Markscheiden zeigt und in die Seitenstränge des Rückenmarkes sich fortsetzt; indess ist es unwahrscheinlich, dass dieses Bündel und die laterale Schleife *unmittelbar* zusammenhängen bez. gleichsinnig leiten.

Bei ca. 28—30 cm langen Fötus wurden einzelne Faserzüge des *Haupttheils* der Schleifenschicht markhaltig gefunden. Nach unten lassen sie sich bis in die Oliven-Zwischenschicht und von da unter Kreuzung zu den Kernen der (Burdach'schen) Keilstränge verfolgen. Ein Theil dieser offenbar mit den Hintersträngen (Grundbündel) zusammenhängenden Bündel (zu denen sich übrigens auch Fasern aus dem fünften und neunten bez. zehnten Hirnnerven zu gesellen scheinen) tritt noch im Bereich der Brücke in die Formatio reticularis über und zwar in die Gegend jener grauen Masse, die Verf. früher als Nucleus reticularis tegmenti pontis bezeichnet hat. Die übrigen, in den Grosshirnschenkel weiter ziehenden markhaltigen Fasern des Haupttheils schlagen zwei verschiedene Richtungen ein; ein Theil legt sich der lateralen Schleife an, gelangt so an die Aussenseite der Grosshirnschenkelhaube und tritt in ein bisher noch nicht beschriebenes Ganglion ein, welches seitlich der Vierhügelplatte entsprechend der Grenze von vorderem und hinterem Hügelpaar gelegen ist und welches ich der Kürze halber Nucleus lemnisci lateralis nennen will. Ein zweiter Theil verliert sich in die Formatio reticularis nach aussen vom rothen Kern der Haube. — In das Grosshirn lassen sich bei 30 cm langen Fötus markhaltige Schleifenfasern nicht verfolgen. Schon in der Gegend des oberen Vierhügels sind nur unmittelbar nach aussen vom rothen Kern einzelne markhaltige Schleifenfasern sichtbar; der in dieser Gegend mehr dorsal bez. lateral gelegene Theil der Schleife (»obere Schleife«, Forel) ist noch völlig marklos.

Bei einem ca. 33 cm langen Fötus wurden beträchtlich mehr markhaltige Fasern im Haupttheil der Schleifenschicht gefunden. Dem entsprechend war auch die Olivenzwischenschicht

viel markreicher und liessen sich noch deutlicher markhaltige Züge von da zu den Kernen der (Burdach'schen) Keilstränge verfolgen. Der Uebergang eines Theils der in dem unteren Drittel der Brücke im Haupttheil enthaltenen Fasern in die Formatio reticularis (Gegend des Nucleus reticularis) war wesentlich deutlicher. Im oberen Theil der Brücke zerfällt der Haupttheil jetzt in zwei wohlgesonderte Abschnitte, einen mehr nach aussen und ventral gelegenen markhaltigen und einen dorsal und nach innen gelegenen marklosen. Die markhaltigen Elemente des ersteren setzen sich theils wie bei den 28—30 cm langen Fötus fort in den Nucleus lemnisci later. etc., ein anderer Theil lässt sich nach oben *bis in das Grosshirn* verfolgen. Die letzteren Fasern dringen zunächst in die äusseren Abschnitte der Substantia nigra Sömmeringii ein, steigen empor zu dem äusseren Rand des Luys'schen Körpers, durchsetzen von da aus quer die innere Kapsel und dringen so radiär in den Linsenkern ein, in dessen erstem und zweitem Glied sie sich vertheilen, ohne die Grenze dieser Glieder zu überschreiten. In der inneren Kapsel, im Stabkranz u. s. w. finden sich bei dem fraglichen Fötus nirgends markhaltige Fasern. Dagegen ist die Meynert-sche Commissur markhaltig, deren Fasern mit den aus der Schleife kommenden zusammenzuhängen scheinen und andererseits in den Linsenkern eindringen.

Bei einem ca. 38 cm langen Fötus zeigte der Haupttheil der Schleife einen weiteren mächtigen Zuwachs an markhaltigen Fasern. Die vorher noch zahlreiche marklose Bündel führende Olivenzwischenschicht erscheint fast vollständig markhaltig; und es lassen sich jetzt auch markhaltige Bündel aus derselben in die *Kerne der zarten* (Goll'schen) *Stränge* verfolgen, so dass offenbar der Zuwachs an markhaltigen Fasern im Haupttheil der Schleifenschicht auf Rechnung von Fasern aus den Kernen der Goll'schen Stränge zu setzen ist. Im oberen Theil der Brücke ist jetzt auch die innere dorsale Abtheilung des Haupttheils markhaltig (die »mediale Schleife« noch völlig marklos). In der oberen Vierhügelgegend ist auch der lateral-dorsale Abschnitt der Schleife (»obere S.«) markhaltig geworden; nach hinten legt sich ihm ein (bereits bei 33 cm langen Fötus markhaltiges) Bündel an, welches vom unteren Vierhügelganglion gegen das Grosshirn zieht (nicht identisch mit dem brachium conjunct. posticum, welches erst gegen die Zeit der Reife markhaltig

wird). Der dorsale Abschnitt der Schleife in der oberen Vierhügelgegend (»obere S.«) setzt sich in Verbindung mit einzelnen Fasern des dem rothen Kern benachbarten Schleifentheils fort gegen das Corpus geniculatum externum und weiter an die Basis des *Sehhügels*. Hier entzieht er sich dem weiteren Nachweis. Einzelne Fasern scheinen direct bis in die innere Kapsel vorzudringen und hier an der Aussenseite des Thalamus gegen den Stabkranz emporzusteigen. Bei 45—46 cm langen Fötus sind in der That schon zahlreiche markhaltige Fasern im Linsenkern, im hinteren Abschnitt der inneren Kapsel und im Stabkranz der Scheitellappen markhaltig, welche man als Fortsetzung der vorerwähnten Schleifenbündel ansehen kann; indess bleibt doch fraglich, ob sie nicht im Sehhügel (und inneren Kniehöcker?) zunächst durch graue Massen unterbrochen werden.

Bei ca. 40 cm langen Fötus legt sich dem Hauptheil der Schleifenschicht im unteren Drittel der Brücke noch ein weiteres markhaltiges Bündel an, welches in die Grenzregion von Olivenzwischenschicht und Nucleus centralis (Formatio reticularis) übergeht, dessen Bedeutung vorläufig noch nicht klar gelegt werden konnte (Fasern aus den »Kernen der zarten Stränge?«).

Die *mediale* Schleife wurde noch bei einmonatlichen Kindern marklos gefunden, wird also erst *längere Zeit nach der Geburt* markhaltig. Sie verläuft nur zwischen Grosshirn und Brücke, geht also nicht in die Oblongata über. Sie verliert sich nach oben in der Gegend der Subst. nigra bez. des Corpus mammillare, dessen Faserzüge (Fornix, Vicq d'Azyr'sches Bündel) gleichfalls erst sehr spät markhaltig werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich in anatomischer Hinsicht u. A.: Der Hauptheil der Schleife enthält überwiegend Fasern, welche als indirecte Fortsetzungen von Fasern der Hinterstränge des Rückenmarkes anzusehen sind. Die aus den Burdach'schen Keilsträngen hervorgehenden Fasern der Schleife enden in gewissen Bezirken der Formatio reticularis von (Oblongata,) Pons und Vierhügelgegend, im Nucleus lemnisci lateral. und Linsenkern; die von den Goll'schen Strängen kommenden Fasern enden entweder im Thalamus opticus (bez. inneren Kniehöcker?) oder gehen (nur theilweise?) ununterbrochen durch die innere Kapsel in den Stabkranz und von da zur Rinde der Scheitellappen.

Dr. **Alfred Fischer,** *Studien über die Siebröhren der Dicotylenblätter.*

Bei allen Angiospermen, deren Siebröhren genauer untersucht worden sind, haben sich als constante Begleiter derselben jene schmalen, mit dichtem Protoplasma erfüllten Zellen nachweisen lassen, welche WILHELM*) zuerst als verschieden von dem Cambiform erkannt und als Geleitzellen bezeichnet hat. JANCZEWSKI**) und RUSSOW***), welche in neuerer Zeit eingehende Studien über den Bau und die Entwicklung der Siebröhren veröffentlicht haben, stimmen darin überein, dass die Geleitzellen bei den Gymnospermen regelmässig fehlen, bei den Angiospermen dagegen immer vorhanden sind. Ich habe bei allen den am Schlusse dieser Abhandlung genannten Dicotylen stets deutlich die Geleitzellen von dem Cambiform unterscheiden können, nicht nur durch ihr engeres Lumen, sondern besonders durch ihren Reichthum an feinkörnigem Protoplasma und durch ihren schön ausgebildeten, verhältnissmässig grossen Zellkern.

Andere geformte Inhaltsbestandtheile habe ich nicht aufgefunden; Stärkekörner und Krystalle, von denen besonders die ersteren sehr häufig im Cambiform vorkommen, wurden

---

*) Beiträge zur Kenntniss des Siebröhrenapparates dicotyler Pflanzen. Leipzig 1880. pag. 4.

**) Études comparées sur les tubes cribreux, Mémoires de la société des sciences naturelles de Cherbourg XXIII. 1882; ein sehr ausführlicher Auszug dieser Arbeit findet sich in den Annales des sciences naturelles, 6. Serie, XIV. Ich werde nur diese letzteren citiren.

***) Sur la structure et le développement des tubes cribreux, Annales des sciences naturelles, 6. Serie, XIV. Wörtliche Uebersetzung einer in den Sitzungsberichten der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft 1882 erschienenen Abhandlung. Meine Citate beziehen sich auf die französische Uebersetzung.

niemals unter normalen Verhältnissen in den Geleitzellen beobachtet*). Dieselben enthalten aber, wie Russow**) für Sorbus angiebt und ich bei den Cucurbitaceen nicht selten gesehen habe, kleinere oder grössere Mengen jenes glänzenden, eiweissartigen Schleimes, welcher die bekannten Schlauchköpfe in den Siebröhren bildet. Seinem Vorhandensein ist nach Russow***) die tiefe Färbung zuzuschreiben, welche der Geleitzellinhalt mit Anilinblau annimmt. Der genannte Forscher sucht sogar wahrscheinlich zu machen, dass dieser Schleim durch die offenen Tüpfel der die Geleitzelle und Siebröhre trennenden Wand unbehindert aus der einen in die andere übertreten kann†). Damit sind wir zu einem neuen Merkmale gelangt, welches den Cambiformzellen fehlt, die Wandung zwischen diesen und den Siebröhren besitzt keine Tüpfel. Russow hat bei einer grösseren Anzahl von Pflanzen, ich nenne nur Acer, Epilobium, Evonymus, Humulus und Sorbus, die »äusserst seichten und zarten Geleitzelltüpfel« beobachtet††). Wilhelm beschreibt dieselben bei Vitis, Cucurbita und Lagenaria†††).

Auch die Entwicklungsgeschichte liefert wichtige Unterschiede zwischen den Geleit- und den Cambiformzellen. Während die letzteren theilungsunfähig gewordenen, alten Cambium- oder Procambiumzellen entsprechen, welche hier und da durch Querwände in kürzere Glieder zerfallen, gelegentlich auch durch eine Längstheilung in gleichwerthige Tochterzellen zerlegt worden sind, gehen die Geleitzellen und das zugehörige Siebröhrenglied stets gemeinschaftlich aus einer cambialen Zelle hervor. Gewöhnlich theilt sich diese durch eine Längswand in zwei ungleich weite, aber gleich lange Theile, von denen der weitere zum Siebröhrenglied, der andere zur Geleitzellinitiale wird§). Je nachdem die Theilungswand in radialer oder tan-

*) Man vergleiche auch: Russow, l. c. Annales des sciences, 6. Série XIV. pag. 197, und meine Untersuchungen über das Siebröhrensystem der Cucurbitaceen, pag. 99.

**) l. c. pag. 197.

***) Ueber die Perforation der Zellwand und den Zusammenhang der Protoplasmakörper benachbarter Zellen. Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft. 1882. pag. 572.

†) Russow, Perforation der Zellwand. pag. 570.

††) l. c. Perforation. pag. 570.

†††) l. c. pag. 74. Taf. III, Fig. 26; Taf. IV, Fig. 35.

§) Conf. Janczewski, l. c. pag. 129 (Aristolochia Sipho), pag. 136—137 (Tilia parvifolia).

gentialer Richtung die cambiale Zelle durchsetzt, ist auch die Anordnung der Geleitzellen und Siebröhren auf dem Querschnitt eine verschiedene. Diese Einzelheiten, welche für unseren Gegenstand nur untergeordnetes Interesse haben, den regelmässigen Aufbau der Siebtheile aber wesentlich bedingen, wolle man bei Janczewski nachlesen*). Gelegentlich scheidet das junge Siebröhrenglied nochmals eine Geleitzellinitiale ab, dann würde später der Querschnitt uns das Bild einer Siebröhre mit zwei Geleitzellen darbieten. In grösserer Anzahl treten sie nur ausnahmsweise auf und niemals scheinen die Initialen selbst durch Längstheilungen sich zu verdoppeln, immer geht die Vermehrung der Geleitzellen von dem jungen Siebröhrengliede aus. Dasselbe besitzt in der Regel nur eine einzige Geleitzellinitiale.

Nach dem späteren Verhalten derselben unterscheiden Janczewski und Russow, deren Ansicht ich mich anschliesse, zwei Fälle. In dem einen, zu welchem Aesculus, Physalis, Prunus, Sorbus, Tecoma und Tilia zu rechnen sind, bleibt die Geleitzellinitiale unverändert, man bezeichnet sie nun schlechthin als Geleitzelle. Dieselbe ist zeitlebens ebenso lang, wie das zugehörige Siebröhrenglied. Der zweite Fall, zu welchem nach Russow die Amentaceen, nach Wilhelm's und meinen Beobachtungen die Cucurbitaceen gehören, ist dadurch gekennzeichnet, dass die Initiale durch Querwände in einige kurze Glieder zerfällt und eine Geleitzellreihe bildet, deren Länge der des Siebröhrengliedes entspricht. Dieses Verhalten hat uns dazu veranlasst, die Bezeichnung Geleitzellinitiale einzuführen.

Nach Wilhelm's Darstellung scheinen die Geleitzellen bei Vitis in der Regel auf andere Weise sich zu entwickeln, auch bei Lagenaria scheint ein solches abweichendes Verhalten hier und da vorzukommen. Wie aus den Zeichnungen Wilhelm's auf Taf. II (Fig. 16, 19 und 20) und Taf. VIII (Fig. 102) zu ersehen, sind die Geleitzellen im secundären Siebtheil von Vitis regelmässig, bei Lagenaria ausnahmsweise kürzer als die zugehörigen Siebröhrenglieder und scheinen aus diesen durch uhrglasähnliche Wände herausgeschnitten. Bei den Cucurbitaceen dürfte wohl eine solche Entstehung der Geleitzellen nur als seltener Ausnahmefall zu betrachten sein, wie Wilhelm für seine Fig. 102 Taf. VIII selbst zugiebt. Ueber die Verhältnisse bei Vitis stehen mir nicht genügende eigene Untersuchungen zu Gebote, die Beschreibungen Wilhelm's sprechen aber mit Bestimmtheit dafür, dass hier eine abweichende Theilungsweise der Cambiumzellen zur Abscheidung kleiner, kurzer Geleitzellen führt. Im primären Sieb-

*) l. c. pag. 150.

theil scheinen dieselben nach Fig. 13 Taf. II bei Wilhelm ebenso lang zu sein, wie die Siebröhrenglieder.

Nachträgliche Grössenveränderungen und Verschiebungen werden bei allen Pflanzen Platz greifen, so dass man den Fragen, ob die Geleitzellen ebenso lang oder kürzer als die Siebröhrenglieder sind, ob die Initialen einfach bleiben oder in kürzere Tochterzellen zerfallen, nicht allzuviel Bedeutung beimessen darf. Wichtiger und durch alle bisher untersuchten Pflanzen bestätigt ist dagegen die Thatsache, dass die Geleitzellen stets Schwesterzellen der zugehörigen Siebröhrenglieder sind und mit diesen inniger als mit den anderen benachbarten Gewebeelementen durch correspondirende Tüpfel in Verbindung stehen.

Schon aus diesem Umstande lässt sich schliessen, dass die Function der Geleitzellen mit derjenigen der Siebröhren zusammenhängt. Die letzteren betrachtet man wohl allgemein als die Leitungsbahnen der Eiweisssubstanzen; andere Ansichten habe ich in meiner Cucurbitaceenarbeit aufgeführt, worauf ich wohl hier verweisen kann*). Während Wilhelm gar nicht über die Function der Geleitzellen sich ausgesprochen hat, möchte Russow**) annehmen, dass in ihnen die in den Siebröhren erzeugten Eiweissstoffe zeitweilig aufgespeichert werden. Auch Haberlandt***) vertritt die Ansicht, »dass die Geleitzellen in einer noch unbekannten Weise die Siebröhren in ihrer Function unterstützen«. In meiner Abhandlung über die Cucurbitaceen habe ich mich dahin ausgesprochen, dass die Geleitzellen als die Bildungstätten der in den Siebröhren fortgeführten Eiweisssubstanzen anzusehen sind. Neben der Inhaltsbeschaffenheit und der Lagerung der fraglichen Elemente diente mir noch besonders ihre überraschende Aehnlichkeit mit den Uebergangszellen als Stütze für meine Annahme. Mit diesem Namen belegte ich langgestreckte, weitlumige, mit feinkörnigem Protoplasma und grossem Zellkern ausgestattete Zellen, welche in den feineren und feinsten Blattnerven der Cucurbitaceen den unteren Siebtheil begleiten und in den blinden Enden schliesslich ganz allein

---

*) l. c. pag. 97. Siehe auch Haberlandt, Physiologische Pflanzenanatomie pag. 222.

**) l. c. Perforation etc. pag. 570.

***) Physiologische Anatomie pag. 221.

bilden. Auch diese Zellen glaubte ich als Bildungsherde der Eiweisssubstanzen betrachten zu sollen.

Dieselbe Vermuthung sprach auch A. Koch*) in einer Arbeit aus, welche erschien, als das Manuscript der meinigen bereits zum Druck abgeschickt war, so dass ich nur in einer nachträglichen Anmerkung auf die Koch'sche Abhandlung kurz hinweisen konnte. Der Genannte hat seine Studien an Bryonia, Cucumis, Cucurbita, Ecballium und einigen anderen Pflanzen gemacht und bei allen den genannten Cucurbitaceen die von mir als Uebergangszellen bezeichneten Elemente aufgefunden. Er nennt sie peripherische Zellen und beschreibt, wie dieselben in den feinsten Maschenbündeln den aus sehr englumigen Elementen aufgebauten unteren Siebtheil umsäumen und in den freien Nervenenden allein übrig bleiben. Nach Koch treten in die letzten, im Inneren des Mesophylls frei endigenden Nervenbündel meist keine Siebröhren mehr ein, so dass nur die zu Maschen zusammenschliessenden Gefässbündel Siebröhren nebst Geleitzellen enthalten. Die letzteren konnte Koch nicht mehr mit Bestimmtheit in dem unteren Siebtheile der feinsten Maschenbündel unterscheiden; auch die dort verlaufenden Siebröhren scheint er nicht sicher gesehen zu haben**). Diesen Angaben gegenüber muss ich meine von Neuem wiederholten Beobachtungen hervorheben, nach welchen auch in die freien Nervenenden sehr englumige Siebröhren eintreten, um kurz vor den Tracheïden zwischen den übrig bleibenden Uebergangszellen blind zu enden.

Diese beschreibt Koch in voller Uebereinstimmung mit meinen Befunden als weite, in der Richtung des Bündelverlaufes gestreckte Zellen mit feinkörnigem, schaumigem Inhalte, der sowohl seinem äusseren Ansehen nach, als auch nach den Färbungen, die er auf Zusatz von Jod oder von Zucker und Schwefelsäure annimmt, »dem oft beschriebenen schleimigen Inhalte der Stengelsiebröhren ähnlich zusammengesetzt zu sein scheint«. Ferner hebt Koch hervor, dass sehr häufig, wir möchten verbessern immer, ein grosser Zellkern in den Uebergangszellen vorhanden ist. Weiterhin berichtet Koch, dass dieselben »im Sommer mit dichtem Inhalt erfüllt sind, in schwächlichen Früh-

*) Ueber den Verlauf und die Endigungen der Siebröhren in den Blättern. Botanische Zeitung. 1884.

**) Conf. Bot. Zeit. 1884. pag. 410.

jahrsblättern dagegen und in verdunkelten Blättern nur wässerigen, substanzarmen Saft umschliessen. Aus allen diesen Thatsachen zieht endlich Koch den Schluss, dass auch wahrscheinlich in den Uebergangszellen, ebenso wie in den Siebröhren, Eiweisssubstanzen erzeugt werden. Auf einen Vergleich mit den Geleitzellen geht Koch nicht ein. Seine Beobachtungen über die oberen Siebtheile der feineren und feinsten Nervenbündel werden besser im Zusammenhang mit unseren neuen Untersuchungen besprochen.

Eine Frage von hoher Bedeutung hat weder Koch's, noch meine Arbeit gelöst, wir haben beide den Geleitzellen zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Koch erwähnt wohl ausdrücklich *), dass alle Siebröhren der Blätter noch Geleitzellen besitzen und mit diesen durch zahlreiche Poren verbunden sind, seine publicirten Beobachtungen dürften aber kaum die Aufstellung einer solchen Regel rechtfertigen. Im unteren Siebtheile der feinsten Maschenbündel konnte ja Koch die Geleitzellen nicht mehr sicher erkennen **). Ich habe das Verhalten derselben in den feineren und feinsten Nerven ganz vernachlässigt. Diese Lücke auszufüllen, ist die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung. Sie hat die Frage zu beantworten, ob die Geleitzellen in demselben Masse sich verkleinern, wie die Siebröhren der successiven Nervenzweige, ob das Grössenverhältniss zwischen beiden dasselbe bleibt, wie im Stamm und Blattstiel. Sollte es gelingen nachzuweisen, dass die Geleitzellen in den feineren Nerven zu Uebergangszellen sich erweitern, dann würden sich auch neue Wahrscheinlichkeitsgründe für unsere Ansicht über die Bildungsstätten der Eiweisssubstanzen ergeben.

Meine Untersuchungen habe ich an 62 verschiedenen Dicotylen aus 47 Familien ausgeführt; milchende Pflanzen, deren Siebröhrensystem ich in einer neuen Arbeit zu behandeln gedenke, wurden nicht berücksichtigt. Bei allen den am Schlusse genannten Formen habe ich zunächst die Zusammensetzung des Siebtheiles im Blattstiel, wenn das Material es gestattete, auch desjenigen im Stamm, fernerhin den Bündelbau des Haupt- und der stärkeren Seitennerven auf Quer- und Längsschnitten studirt. Hierauf folgte dann die Untersuchung der feineren und feinsten Nerven, welche zunächst auf Querschnitten durch die

*) No. 4 der Zusammenfassung.

**) l. c. pag. 410.

Lamina betrachtet wurden. Auf diese Weise überzeugte ich mich davon, ob Uebergangszellen vorhanden waren, ob die Nervenbündel bis in die letzten Verzweigungen bicollateralen Bau besassen, ob zuletzt nur noch tracheale Elemente übrig und die Siebtheile vollkommen geschwunden waren. Zur sicheren Beantwortung dieser Frage sind aber unbedingt Schnitte parallel der Blattfläche, Flächenschnitte, heranzuziehen. Erst an diesen kann neben dem Verlauf der feineren Nerven das Vorhandensein und die Beschaffenheit der blinden Enden festgestellt werden. Nur ein fleissiger Vergleich der durch Quer- und Flächenschnitte gewonnenen Bilder kann zu einer richtigen Vorstellung von dem Schicksal der Siebröhren und ihrer Geleitzellen führen.

I. Das allgemeine Verhalten der Sieb- und Gefässtheile in den freien Nervenenden.

Keineswegs darf man, wie allgemein üblich, annehmen, dass alle blinden Nervenenden eines Blattes gleichartig gebaut sind, dass aus einer einzigen Beobachtung ein Schluss auf alle anderen Fälle zulässig ist. Die verschiedene Zusammensetzung der freien Nervenenden wird durch das Verhalten der Siebtheile bestimmt, die Gefässtheile sind immer bis zum Abschluss des Bündels vorhanden.

Bei den meisten der von mir untersuchten Dicotylen, gleichviel ob dieselben collaterale oder bicollaterale Gefässbündel besitzen, kommen regelmässig zwei Arten freier Nervenendigungen vor. Einmal kurze, von allen parenchymlosen Nerven der verschiedensten Ordnung abzweigende Aestchen, welche gewöhnlich nur aus einem einzigen Gliede bestehen und zuweilen nicht einmal die Länge einer Tracheïde erreichen. Diese *Nebenenden*, wie ich sie nennen möchte, werden wie alle parenchymlosen Nerven von einer Parenchymscheide umgeben und enthalten gewöhnlich keinen Siebtheil mehr, bestehen also nur aus Tracheïden (Taf. II. Fig. 8). Der Querschnitt durch solche Bündelchen würde demnach das in der Fig. 9 Taf. II dargestellte Bild gewähren. Sehr deutlich treten diese Nebenenden in der von Sachs*) gegebenen Abbildung der Nervatur bei Anthyllis vul-

*) Vorlesungen, pag. 59.

neraria hervor. Die andere Art der blinden Nervenenden wird ebenfalls durch die citirte Figur veranschaulicht. Man sieht, dass von den die engsten Maschen umschliessenden Nerven längere Aeste abzweigen, welche bis in die Mitte des vom Mesophyll erfüllten Raumes vordringen und hier blind endigen. Schon aus dem Gesagten folgt, dass die *Hauptenden* gewöhnlich aus mehreren hinter einander liegenden Gliedern bestehen, mit deren Länge die der einzelnen Gefässbündelelemente übereinstimmt. Den Nebenenden gegenüber zeichnen sich diese Hauptenden schon bei schwacher Vergrösserung dadurch aus, dass sie nicht, wie die ersteren, unverzweigt bleiben, sondern sich meistens in einen Büschel kurzer divergirender Aestchen, welche dann blind endigen, auflösen. Die Frage, ob die Hauptenden noch einen Siebtheil enthalten oder nicht, müssen wir für die Pflanzen mit collateralen und diejenigen mit bicollateralen Gefässbündeln gesondert behandeln.

Bei zahlreichen collateralen Dicotylen führen die Hauptenden an ihrer Basis noch einen Siebtheil, welcher nach aufwärts nach und nach aufhört, so dass das letzte oder einige der letzten Glieder nur noch aus trachealen Elementen bestehen. In die kurzen blinden Aeste, welche gewöhnlich in der Mitte der Masche von dem Hauptende ausstrahlen, treten Siebtheile meist nicht ein. Als Beispiele für dies Verhalten führen wir an: Evonymus, Fraxinus, Ribes, Rumex und viele andere. Ihnen steht eine Minderzahl anderer collateraler Dicotylen gegenüber, deren Hauptenden auch in ihren letzten Verzweigungen bis mit zum letzten Gliede einen Siebtheil enthalten. Hierher gehören: Cerinthe, Lycopsis, Dahlia, Saxifraga. Ich lege auf die Unterscheidung dieser beiden Gruppen kein grosses Gewicht, einmal, weil Ausnahmen sehr häufig vorkommen und die Siebtheile bald früher, bald erst mit den Tracheïden, aber niemals später als diese aufhören, zweitens besonders deshalb, weil in beiden Fällen jedenfalls blind endigende Siebtheile vorhanden sind.

Wenn wir berücksichtigen, dass bei allen untersuchten bicollateralen Dicotylen Siebtheile in den Hauptenden nachgewiesen werden konnten, so ergiebt sich, dass unter 62 verschiedenen Dicotylen nur fünf sich fanden, bei denen aller Wahrscheinlichkeit nach keine freien Siebtheilenden mitten im Mesophyll vorhanden sind. Diese Ausnahme wurde bei Aristo-

lochia, Fagus, Juglans, Quercus*) und Buxus festgestellt. Auf letztere Pflanze werde ich bei der Besprechung von Areschoug's Blattanatomie zurückkommen; die anderen vier zeichnen sich durch eine sehr engmaschige Nervatur aus, welche nur in Nebenenden ausläuft. Die feinen Bündel, welche bei anderen Dicotylen die Hauptenden bilden, schliessen hier noch zu Maschen zusammen.

Die Pflanzen mit bicollateralen Gefässbündeln zerfallen in zwei Gruppen, welche beide darin übereinstimmen, dass die *unteren* Siebtheile in den Hauptenden blind auslaufen, welche sich aber durch das Verhalten der *oberen* Siebtheile gegenüberstehen. In dem einen Falle, zu welchem nur die Cucurbitaceen gehören, sind nicht nur die feinsten Maschenbündel noch bicollateral gebaut (Taf. I Fig. 7 und 9), sondern auch die Hauptenden. Ueber ihre oberen Siebtheile werden wir im nächsten Abschnitte zu sprechen haben. Alle anderen bicollateralen Dicotylen, welche ich untersucht habe, folgen der von Koch für Gentiana lutea und Asclepias Cornuti aufgestellten Regel**), nach welcher nur die von farblosem Nervenparenchym umgebenen Gefässbündel bicollateralen Bau besitzen, alle anderen dagegen, welche als zartere Nerven das Mesophyll durchziehen, dem collateralen Typus angehören. Demzufolge haben alle Hauptenden nur *einen* (unteren) Siebtheil, welcher sich so wie bei den collateralen Dicotylen verhält. Im Einzelnen erleidet die Koch'sche Regel, wie zu erwarten, mancherlei Ausnahmen: bald ist nur der Hauptnerv bicollateral, alle anderen Nervenbündel dagegen sind collateral gebaut (Cestrum, Lopezia), bald erhält sich der obere Siebtheil bis in die Seitennerven vierter Ordnung, welche nicht mehr von farblosem Parenchym, sondern von grünem Gewebe umgeben werden (Lythrum, Nolana, Oenothera, Physalis, Taf. I, Fig. 19). Bei anderen Solaneen dagegen (Nicotiana) wird die Koch'sche Regel ungefähr eingehalten. Ausnahmslos gilt aber für alle bicollateralen Dicotylen der zweiten Gruppe, dass die feinsten Maschen und alle Hauptenden *collateral* gebaute Gefässbündel enthalten (Taf. I Fig. 20 und 21).

---

*) Für Quercus vergleiche auch A. Frank: Ein Beitrag zur Kenntniss der Gefässbündel; Botanische Zeitung 1864. pag. 399—400.

**) l. c. Bot. Zeitung 1884. pag. 423.

Schon vor einigen Jahren hat Haberlandt*) einen solchen Wechsel im Bau der Nervenbündel bei den Farnen geschildert, bei welchen die concentrischen Gefässbündel allmählich in der Lamina in collaterale mit bekannter Orientirung des Sieb- und Gefässtheiles übergehen. In demselben Sinne verändern sich auch bei Hippuris die von dem concentrisch gebauten Mittelnerven abzweigenden Bündel. Auch bei dieser Pflanze bestehen die zahlreichen blinden Nervenenden (Hauptenden) aus einem Gefässtheil und einem unter ihm liegenden Siebtheil, welcher gewöhnlich erst mit den ersteren aufhört. Nebenenden scheinen zu fehlen.

Obgleich bei den meisten Dicotylen der Gegensatz zwischen den beiden Formen der Nervenenden scharf hervortritt, so giebt es doch auch viele andere, bei denen die Unterschiede durch Uebergänge verwischt sind. Es kommt hier und da vor, dass in ein kurzes Nebenende ein mehr oder weniger vollständiger Siebtheil eintritt, dass ein solcher bald früher, bald später als die oben aufgestellten Regeln es erwarten lassen, in den Hauptenden aufhört. Diese bleiben nicht selten, anstatt sich in einen Büschel kurzer Endäste aufzulösen, einfach. Wie auch immer im Einzelnen die Verhältnisse sich gestalten mögen, Hauptenden und Nebenenden sind immer vorhanden und bezeichnen mit ihren oben geschilderten Structuren die Grenzen, zwischen welchen die Abweichungen sich bewegen können.

II. Ueber die Siebröhren und Geleitzellen in den Blattnerven von Cucurbita und Ecballium.

Nachdem wir gesehen haben, dass in die grösseren blinden Nervenenden, in die Hauptenden, regelmässig Siebtheile eintreten, um hier eher oder später zu erlöschen, haben wir jetzt eine genauere anatomische Analyse derselben vorzunehmen. Unser Hauptaugenmerk richtet sich auf das Verhalten der Siebröhren und ihrer Geleitzellen. Es könnte ja sehr wohl möglich sein, dass der aus englumigen Elementen aufgebaute Siebtheil der Hauptenden keine Siebröhren mehr enthielte und nur noch aus langgestreckten Zellen bestünde. Andererseits könnte aber auch der

*) Haberlandt, Ueber collaterale Gefässbündel im Laube der Farne. Sitzungsber. d. Wiener Acad. 84. Bd. 1881.

Fall vorliegen, dass die Siebröhren der feinsten Nerven so sehr verkleinert und von dem Aussehen der im Stengel verlaufenden so sehr abgewichen wären, dass eine Identificirung beider unberechtigt erscheinen müsste. Auch die Geleitzellen könnten sich derart verändert haben, dass sie von cambiformartigen Bestandtheilen nicht mehr zu unterscheiden wären.

Alle diese Schwierigkeiten werden wir am Sichersten überwinden, wenn wir die Veränderungen, welche die Siebtheile der Gefässbündel auf ihrem Wege durch alle die successiven Nervenzweige bis zu den Hauptenden erleiden, Schritt für Schritt verfolgen. Es dürfte sich empfehlen, eine einzelne, besonders günstige Pflanze als Beispiel zu beschreiben und dann eine allgemeine Uebersicht über die anderen untersuchten Blätter folgen zu lassen. Ich wähle Cucurbita, nicht etwa weil hier allein die Verhältnisse klar zu überschauen sind, sondern um gleichzeitig einen Nachtrag zu meinen Untersuchungen über das Siebröhrensystem der Cucurbitaceen geben zu können.

Die folgende Tabelle und die Figuren 1—8 Taf. I, welche die den Messungen zu Grunde liegenden Querschnitte wiedergeben, veranschaulichen das Verhalten der Siebröhren und ihrer Geleitzellen in den *unteren* Siebtheilen; die oberen, welche mancherlei Besonderheiten zeigen, sollen am Schlusse dieses Abschnittes besprochen werden. Zu der Tabelle habe ich noch folgende Bemerkungen zu machen. Neben der Verzweigungsordnung, welche keineswegs immer für die Stärke der Nerven bezeichnend ist, habe ich noch den Durchmesser derselben senkrecht zur Blattfläche angegeben. Derselbe wurde bei den stärkeren, als mehr oder minder kräftige Rippen vorspringenden Nerven von Epidermis zu Epidermis gemessen; der Umfang der feineren und feinsten Gefässbündel, welche von der Pallisadenschicht bedeckt werden, ergiebt sich aus den Figuren 6 bis 8 Taf. I. Die Zahlen der dritten und vierten Längsreihe sind Durchschnittswerthe aus zehn, bei den feineren Nerven aus fünf Messungen, die Querschnitte der Siebröhren und Geleitzellen wurden als Rechtecke betrachtet. Es wird vielleicht Anstoss erregen, dass die Volumenänderungen der fraglichen Gewebeelemente nur aus ihren verschiedenen Querschnittsgrössen bestimmt und ihre Längendurchmesser gar nicht berücksichtigt wurden. Die Berechtigung zu einem solchen einfacheren Verfahren liegt darin, dass in den feineren und feinsten und in

allen mittelstarken Nerven die Siebröhrenglieder und ihre Geleitzellen gleichlang, Volumenverschiedenheiten also nur durch die verschiedene Weite beider bedingt sind, dass in den stärksten Blattrippen die Verhältnisse des Stengels sich wiederholen, in welchem die aus kurzen Elementen aufgebauten Geleitzellreihen ja auch ungefähr die Länge der zugehörigen Siebröhrenglieder erreichen. Endlich mag erwähnt werden, dass alle in der Tabelle aufgeführten Zahlen und Zeichnungen auf Präparate aus einem und demselben Blatte sich beziehen.

Verzweigungs-ordnung der Nerven.	Durchmesser der Nerven in Millimetern.	Flächeninhalt des Querschnittes in Quadrat-micromillim.		Verhältniss des Siebröhrenquerschnittes zu demjenigen der zugehörigen Geleitzelle = 1.	Verhältnisszahlen für die allmähliche Verkleinerung der Querschnittsfläche.	
		Siebröhre.	Geleitzelle.		Siebröhre.	Geleitzelle.
I (Fig. 1 Taf. I)	4	410	48	8,5	1	1
II (Fig. 2)	1	110	29	4	0,25	0,6
III (Fig. 3)	0,5	40	24	1,7	0,1	0,5
IV (Fig. 4)	0,3	15	11	1,4	0,04	0,2
V (Fig. 5)	0,2	8	11	0,7	0,02	0,2
VI (Fig. 6)	—	4	76	0,05	0,01	1,6
VII (Fig. 7 u. 8)	—	7	88	0,08	0,02	1,8

Lassen wir zunächst die feineren Nerven, welche farbloses Parenchym nicht mehr enthalten und nicht mehr als vorspringende Rippen sichtbar sind, unberücksichtigt und betrachten nur die für die Nerven I—IV gegebenen Zahlen. Aus diesen und den Figuren 1—4 Taf. I folgt die für die weitere Betrachtung ausserordentlich wichtige Regel, dass mit dem Durchmesser der Nerven und der Stärke ihrer Gefässbündel die Weite der Siebröhren schneller als die der Geleitzelle abnimmt. So kommt es, dass die Querschnittsgrösse der ersteren immer mehr sich der der letzteren nähert, so dass schon in den Nerven vierter Ordnung ungefähr Lumengleichheit erreicht wird. In den stärksten Blattrippen haben die Siebröhren eine 8,5 mal, in den Nerven IV nur noch eine 1,4 mal so grosse Querschnittsfläche wie die zugehörigen Geleitzellen. Diese haben sich auf $^1/_5$, jene auf $^1/_{25}$ ihrer ursprünglichen Weite verengert.

Bei der Betrachtung der Figur 4 Taf. I werden sich vielleicht Zweifel darüber erheben, ob die durch dunkle Umrisse

ausgezeichneten leeren Maschen (*si*), welche wir als Querschnitte der stark verengten Siebröhren gedeutet haben, wirklich solchen entsprechen. Auf Längsschnitten durch den Nerv III lassen sich noch deutliche Siebplatten mit und ohne Callusauflagerungen nachweisen, einseitige Schleimansammlungen, sogen. Schlauchköpfe, finden sich hier ebenso häufig, wie in den weiten Siebröhren des Stengels. Bei Nerv IV dagegen gelingt es auch mit starken Systemen nicht mehr, die bekannte Structur der Siebplatten an den die einzelnen Siebröhrenglieder trennenden Querwänden zu erkennen. Hieraus folgt aber noch nicht, dass diese vollständig geschlossen sind, es ist vielmehr zu vermuthen, dass sie von ausserordentlich feinen Poren durchsetzt werden, welche den von dünnen Protoplasmafäden ausgefüllten Canälchen in den Wandungen anderer Pflanzenzellen entsprechen. Es ist mir nicht möglich gewesen, an den in Rede stehenden Querwänden solche feine Poren nachzuweisen, ich möchte aber annehmen, dass sie vorhanden sind.

Alle anderen Eigenschaften der engen, von uns als Siebröhrenglieder betrachteten Zellen sprechen für diese Deutung. Sie besitzen im ausgewachsenen Zustande niemals einen Zellkern und enthalten ausser wässriger Flüssigkeit nicht selten grössere oder kleinere Mengen des bekannten Siebröhrenschleimes, welcher bald einseitige Ansammlungen an den scheinbar geschlossenen Querwänden bildet, bald die ganze Zelle prall erfüllt. Ein protoplasmatischer Wandbeleg ist gewöhnlich nicht mehr zu erkennen und höchstens in äusserster Feinheit vorhanden. Die aus reiner Cellulose bestehende Membran zeichnet sich durch den für die Wandung der echten Siebröhren charakteristischen Glanz aus, ich versuchte denselben in den Figuren durch die dunklere Färbung der Maschenumrisse anzudeuten. Das Mitgetheilte dürfte hinreichend beweisen, dass in den unteren Siebtheilen der Nerven 4. Ordnung noch Siebröhren, allerdings ohne deutliche Siebplatten, regelmässig vorkommen. Diese *unvollkommenen Siebröhren*, wie ich sie nennen will, verhalten sich zu den vollständig ausgebildeten ebenso wie die Tracheïden zu den Gefässen. In beiden Fällen haben wir analoge Bildungen vor uns.

Die Geleitzellen (*ge*), welche durch ihren Protoplasmareichthum sich leicht von dem inhaltsarmen Cambiform (*ca*) unterscheiden, haben in den Nerven IV (Fig. 4) ungefähr dieselbe Weite

wie die zugehörigen, unvollkommenen Siebröhren, mit deren Gliedern sie gemeinschaftlich aus einer Procambiumzelle des jungen Nervenbündels hervorgegangen sind. Diese entwicklungsgeschichtlichen Beziehungen treten in den ausgewachsenen Nerven IV nicht mehr so deutlich hervor, wie in den stärkeren Blattrippen und im Stengel und zwar deshalb, weil die beiden schon anfangs gleichgrossen Theile der Procambiumzelle während ihrer Umbildung zur Geleitzelle oder zum Siebröhrengliede ungefähr die gleiche Erweiterung erfahren und deshalb in der Regel ihre Schwesterzellennatur nur undeutlich zum Ausdruck kommt. Wenn sich dagegen ausnahmsweise schon in Nerv IV eine Geleitzelle so ansehnlich erweitert, dass wir sie als Uebergangzelle zu bezeichnen hätten (Fig. 4 links *ge*), dann erkennt man mit Bestimmtheit die gemeinsame Abstammung der engen Siebröhre und ihrer weiten Geleitzellen aus *einer* procambialen Zelle. Das Bild, welches sich uns darbietet, ist das Gegenstück zu dem aus dem Stengel und den starken Nerven bekannten. Hier erscheint die schmale Geleitzelle gleichsam aus der weiten Siebröhre herausgeschnitten (Fig. 1 Taf. I), dort scheint der umgekehrte Vorgang stattgefunden zu haben (Fig. 4 links).

In den feineren Maschenbündeln (V—VII), welche nicht mehr von farblosem Nervenparenchym, sondern von einer chlorophyllarmen Parenchymscheide umgeben werden und im Mesophyll verlaufen, nimmt, wie aus unserer Tabelle und den Figuren 5—7 Taf. I ersichtlich, die Weite der unvollkommenen Siebröhren (*si*) immer noch mehr oder weniger ab. Die Geleitzellen dagegen bleiben zunächst auf ihren im Nerv IV erreichten Dimensionen ungefähr stehen (Fig. 5) und erweitern sich in den feinsten Maschenbündeln zu beträchtlichem Umfang. Die von Koch als peripherische Zellen, von mir als Uebergangszellen bezeichneten Elemente sind eben weiter nichts als die erweiterten Geleitzellen. Anfangs werden nur einige von diesen in der angegebenen Weise verändert (Fig. 5 und 6), in den feinsten Maschenbündeln dagegen haben sich alle Geleitzellen zu Uebergangszellen erweitert (Fig. 7). Nehmen wir die Grössenverhältnisse im Nerv I als Einheit an, so berechnet sich das Lumen der Siebröhren im Nerv VII auf 0,02, das der Geleitzellen auf 1,8. Der Querdurchschnittsinhalt der letzteren hat sich nahezu verdoppelt, der der ersteren um das 50fache verkleinert (Fig. 1 und 7).

Aus den für die Nerven V—VII angegebenen Werthen möchte man vielleicht folgern, dass in den letzten Maschenbündeln wiederum eine geringe Erweiterung des Siebröhrenlumens eintritt, ich möchte dagegen die eine solche Regel andeutenden Zahlen auf individuelle Schwankungen zurückführen. Diese kommen, wie zu erwarten, nicht gerade selten vor, können aber die allgemeine Giltigkeit unserer Resultate nicht erschüttern. Für die Nerven IV und V wurden die Querschnittsflächen der Geleitzellen ohne Rücksicht auf die schon hier vereinzelt vorkommenden Uebergangszellen berechnet. Hätte ich diese berücksichtigt, dann würde sich eine kleinere, durchschnittliche Verengerung der Geleitzellen ergeben haben. Die so gewonnenen Zahlen würden aber dem regulären Verlaufe des Vorganges nicht entsprechen, denn die meisten der genannten Zellen haben im Nerv V noch keine Erweiterung erfahren.

Das Cambiform lässt sich bei Cucurbita auch noch in den feinsten Nerven deutlich von den Geleitzellen unterscheiden. Gewöhnlich findet man in den unteren Siebtheilen der letzten Maschenbündel nur noch eine einzige Cambiformzelle (*ca*), welche unter der Tracheïde (*t*) liegt und mit zwei erweiterten Geleitzellen die einzige, sehr enge Siebröhre (*si*) umschliesst (Fig. 7 Taf. I). Es kommt auch vor, dass das Cambiform ganz fehlt. Wir werden über dasselbe bei der Betrachtung der oberen Siebtheile nochmals zu sprechen haben.

Die unvollkommenen Siebröhren, welche in allen feineren und feinsten Maschenbündeln sich vorfinden, verhalten sich, abgesehen von ihrem engeren Lumen, genau so wie die oben ausführlich geschilderten, gleichnamigen Elemente in den Nerven vierter Ordnung. Alles, was wir dort für die Deutung des in Fig. 4 wiedergegebenen Querschnittsbildes anführten, gilt ausnahmslos auch für die Maschenbündel V—VII. Ebenso lässt sich auch für diese der Nachweis erbringen, dass die Geleitzellen, welche hier ebenso lang wie die zugehörigen Siebröhrenglieder sind, mit diesen gemeinschaftlich aus *einer* Procambiumzelle sich entwickelt haben. Der untere Siebtheil der feinsten Maschennerven, welcher gewöhnlich neben einer einzigen Siebröhre eine Cambiform- und zwei Geleitzellen enthält, geht in der Regel aus einer einzigen Zellreihe des jungen Blattes hervor. Die einzelnen, langgestreckten Glieder derselben zerfallen durch eine Horizontalwand in zwei über einander liegende

wie die z[…] Theile, von denen der obere zur Cambiformzelle, der untere Gliedern […] durch neue Theilungen zu dem Siebröhrengliede mit seinen Ge- jungen […] leitzellen sich ausbildet. *Ich* lege auf die Feststellung dieser lungs[…] entwicklungsgeschichtlichen Beziehungen besonderes Gewicht, Ner[…] da dieselben bei umfassenderen Kenntnissen über das Sieb- Bl[…] röhrensystem der Blätter, besonders auch der Farnblätter, einen s[…] Aufschluss über die Phylogenie der Siebröhren und ihrer Geleitzellen zu geben vermögen. Die Ausführung dieser Betrachtungen muss ich auf spätere Zeit verschieben.

Bei meinen früheren Untersuchungen der Cucurbitaceen bin ich leider noch nicht zu den hier vorgetragenen klaren Anschauungen über das Verhalten der Siebröhren in der Blattlamina gelangt, die unvollkommenen Siebröhren in den feineren Nerven habe ich, ebenso wie Koch, nicht sorgfältig genug studirt. Der Letztere sagt*), dass in den von peripherischen Zellen (Uebergangszellen) umgebenen, unteren Siebtheilen der feinsten Maschenbündel wahrscheinlich noch Siebröhren vorhanden sind, dass er dieselben aber nicht mit Sicherheit erkennen konnte. Auch ihm sind also die engen, durch stark glänzende Umrisse ausgezeichneten Querschnitte der unvollkommenen Siebröhren entgangen. Ferner hat Koch, ebenso wie ich, die wahre Natur der peripherischen Zellen nicht erkannt; dass sie erweiterte Geleitzellen sind, dürfte durch die vorliegende Abhandlung erwiesen sein.

Die unteren Siebtheile der Hauptenden sollen nach Koch's**) Angaben in der Regel keine Siebröhren mehr enthalten und nur noch aus peripherischen Zellen bestehen. Ich habe bereits in meiner Cucurbitaceenarbeit hervorgehoben und auch durch eine Zeichnung (l. c. Fig. 10 Taf. V) dargelegt, dass in den unteren Siebtheilen der feineren Nervenbündel, wie ich dort in ungehöriger Weise die Hauptenden bezeichnet habe, freie Siebröhrenenden an solchen Stellen vorhanden sind, an welchen die Uebergangszellen allein übrig bleiben***). Da die letzteren damals meine Aufmerksamkeit in erster Linie auf sich zogen, so habe ich eine genauere Untersuchung der unvollkommen, blind endigenden Siebröhren, welche ich richtig gesehen und gedeutet

*) Bot. Zeitung 1844. pag. 410.

**) l. c. pag. 418.

***) Cucurbitaceen, pag. 67 Anmerk.; Erklärung der Fig 10 Taf. V auf pag. 107.

habe, versäumt. Neue Beobachtungen an Cucurbita und Ecballium haben meine frühere Darstellung grössten Theils bestätigt und in einigen Punkten berichtigt.

Alle Hauptenden der beiden genannten Cucurbitaceen besitzen an der Basis noch einen vollständigen unteren Siebtheil, welcher in der Regel aus einer einzigen Siebröhre, einigen, gewöhnlich zwei zu Uebergangszellen erweiterten Geleitzellen und einer an den Gefässtheil angrenzenden Cambiformzelle besteht. Dieselbe Zusammensetzung beobachtet man meistens auch an den unteren Siebtheilen der feinsten Maschenbündel (Fig. 7 Taf. I), von denen aus die unvollkommenen Siebröhren mit ihren Geleitzellen ohne Dimensionsänderungen in die Hauptenden eintreten. Nicht erst in diesen, sondern schon in denjenigen feineren Nerven, welche in dem assimilirenden Gewebe verlaufen, vollziehen sich die Veränderungen der Siebröhren und der Geleitzellen.

Der oben geschilderte Bau des unteren Siebtheiles erhält sich gewöhnlich bis mit zum vorletzten Gliede des Hauptendes oder, falls dasselbe in einen Büschel eingliedriger Aeste sich auflöst, bis zu der Ansatzstelle der letzteren. Die unvollkommene Siebröhre, welche bis zuletzt die beim Nerv IV beschriebenen Eigenschaften bewahrt, endet blind zwischen den allein übrig bleibenden Uebergangszellen (Fig. 10 Taf. I dieser Abhandlung, Fig. 10 Taf. V meiner Cucurbitaceenarbeit). Diese bilden allein den unteren Siebtheil des letzten Gliedes oder der kurzen Aestchen, welche von dem Hauptende ausstrahlen. Gelegentlich treten auch in diese Siebröhren ein und nun wiederholen sich hier die soeben geschilderten Verhältnisse. Auch die Cambiformzelle, welche zuweilen schon von Anfang an fehlt, ist in den letzten Gliedern des Hauptendes verschwunden.

Die Nebenenden, welche bei allen collateralen Dicotylen nur noch aus Tracheïden bestehen, besitzen bei Cucurbita und Ecballium, denen sich die anderen Cucurbitaceen jedenfalls anschliessen, gewöhnlich einen unvollständigen unteren Siebtheil. In denselben treten Siebröhren nicht ein, er besteht auf dem Querschnitt aus einer einzigen oder einigen wenigen Uebergangszellen. Diese sind hier ebenso wie in den letzten siebröhrenfreien Gliedern der Hauptenden als Analoga der Geleitzellen aufzufassen. Man kann daher mit voller Berechtigung den Satz aufstellen, dass in allen blinden Nervenenden der Cucur-

bitaceenblätter zuletzt nur noch stark erweiterte Geleitzellen (Uebergangszellen, peripherische Zellen) den unteren Siebtheil bilden. Auch diese Thatsache wird bei einer Betrachtung über die Phylogenie des Siebröhrensystemes zu berücksichtigen sein.

Die oberen Siebtheile. Nach Koch's und meinen eigenen Untersuchungen sind auch die feinsten Nervenbündel, welche noch zu Maschen sich vereinigen, bicollateral gebaut, ihr oberer Siebtheil besteht gewöhnlich aus *einer* Siebröhre nebst Geleitzelle und aus Cambiform. Auf das letztere entfallen zwei, zuweilen auch nur eine Masche des Querschnittes (Fig. 6—8). Bei Ecballium erweitern sich, wie Fig. 9 Taf. I zeigt, die Cambiformzellen ausserordentlich, sie bilden einige wenige Chlorophyllkörner, so dass man, wie auch Koch gethan, gewöhnliche Mesophyllzellen vor sich zu haben glaubt. Einzelheiten über die Anordnung der grossen Cambiformzellen wolle man bei Koch*) nachlesen. Ihre Entwicklungsgeschichte habe ich nicht lückenlos verfolgt, es genügt aber schon ein Vergleich unserer Figuren 6—9, um zu erkennen, dass bei Ecballium die weiten chlorophyllarmen Zellen im obern Siebtheile der feinsten Maschenbündel als Cambiform aufzufassen sind. Die Siebröhren, welche oberhalb der Tracheïden verlaufen, haben sich in den feinen Nerven nicht so bedeutend verengert, wie diejenigen in den unteren Siebtheilen, und sind bis in die letzten Maschenbündel durch deutliche Siebplatten ausgezeichnet. Auch die Geleitzellen haben sich nur wenig verändert, ihre Querschnittsgrösse ist nahezu derjenigen der zugehörigen Siebröhren gleich, typische Uebergangszellen sind nicht entstanden (Fig. 7—9).

Ueber die oberen Siebtheile der blinden Enden spricht sich Koch nicht bestimmt aus, er scheint aber anzunehmen, dass in diese keine Siebröhren eintreten. Auch ich habe meinen ersten Mittheilungen über diesen Gegenstand nicht die gewünschte Klarheit geben können, da ich die feinsten Maschenbündel und die blinden Enden nicht mit der gehörigen Sorgfalt von einander unterschied. So erklärt es sich, dass ich für die oberen Siebtheile der Nervenendigungen bald Siebröhren mit Geleitzellen angab, bald nur noch langgestreckte, inhaltsarme Zellen, welche ich bald als Vertreter der Siebröhren ansah, bald als Reste solcher, welche während der Formung des Blattes normal

*) l. c. pag. 410 und Fig. 1—3, 5 und 7.

ausgebildet und in Function gewesen waren. Neue Untersuchungen haben zu dem Resultate geführt, dass in allen Haupt- und Nebenenden von Cucurbita und Ecballium niemals Siebröhren im *oberen* Siebtheile vorkommen. Derselbe hört stets erst mit den Tracheïden auf und besteht in der Regel nur noch aus einer einzigen, gelegentlich auch aus zwei Reihen langgestreckter, protoplasmaarmer und kernloser Zellen (Fig. 11 Taf. I), welche etwas enger als die benachbarten Tracheïden und ebenso lang wie diese sind. Andere Elemente, welche man mit den Geleitzellen identificiren könnte, fehlen gänzlich. Schon wegen dieses Umstandes können diese eigenthümlichen Zellen nicht als Glieder unvollkommener Siebröhren, mit welchen sie ja sonst viele Aehnlichkeit haben, gedeutet werden. Gleichwohl möchte ich annehmen, dass die in Rede stehenden Elemente analog den Siebröhren functioniren und die Leitung der eiweissartigen Baustoffe während der Formung des Mesophylles bewirken. Nach vollendeter Ausbildung desselben wird ihre Thätigkeit wahrscheinlich sehr abgeschwächt, da sie an der Fortleitung und Verarbeitung der Assimilationsproducte sich nur in untergeordneter Weise betheiligen werden. Da mir eingehende vergleichende Beobachtungen an jungen und alten Blättern aus neuerer Zeit nicht vorliegen, muss ich von einer weiteren Behandlung dieser Frage absehen.

III. Vergleichende Beobachtungen über die Siebröhren und Geleitzellen in den Blattnerven der Dicotylen.

Einige wenige der genauer untersuchten Dicotylen enthalten in *allen* blinden Nervenenden überhaupt keine Siebtheile mehr. Diese Pflanzen (Quercus, Juglans, Carpinus, Aristolochia und Buxus), denen sich vielleicht noch andere Laubbäume mit engmaschiger Nervatur anschliessen, besitzen demnach gar keine blinden Siebröhrenenden im Mesophyll. Ob solche in den Blattzähnen, überhaupt im Blattrande vorkommen, wurde nicht untersucht. Auch scheint mir dem Fehlen freier Siebröhrenenden keine grosse Bedeutung beizumessen zu sein, da das viel häufigere Vorkommen derselben die früher bevorzugte Annahme einer ununterbrochenen Circulationsbahn für den Siebröhrensaft als unrichtig erscheinen lässt. Bei den fünf genannten Dicotylen enthalten in der Regel die feinsten Maschenbündel

noch einen vollständigen Siebtheil, es kommt aber bei Juglans nicht selten vor, dass auch diese schon ausschliesslich aus Tracheïden bestehen. Auch bei den uns vorliegenden Pflanzen nimmt mit der Stärke der Nerven das Lumen der Siebröhren schneller als das ihrer Geleitzellen ab, so dass in den letzten Maschenbündeln beide ungefähr gleich weit sind (Fig. 15 Taf. II). Es kommt hier zwar nicht zur Bildung von Uebergangszellen, immerhin erreichen aber auch die Geleitzellen der feinsten Nerven im Vergleich mit den zugehörigen Siebröhren ihre grösste, relative Weite. Die letzteren nehmen alle Eigenschaften der im vorigen Abschnitte ausführlich geschilderten unvollkommenen Siebröhren an. Günstige Untersuchungsobjecte bieten übrigens, wie ich hervorheben will, die eben besprochenen Pflanzen nicht dar; ohne Kenntniss der Cucurbitaceenblätter würde man sich in dem engmaschigen Querschnitte der feineren Nervenbündel, besonders ihrer Siebtheile, kaum zurecht finden können.

In den Blättern aller anderen Dicotylen kommen blinde Siebröhrenenden regelmässig vor, sie liegen in den von uns als Hauptenden bezeichneten Ausläufern der Nervatur. Ausser diesen hat man noch Nebenenden zu unterscheiden, welche viel kürzer als die ersteren sind und bei allen collateralen Dicotylen nur aus Tracheïden bestehen. Bei den bicollateralen werden dieselben gewöhnlich von einem Rest des unteren Siebtheiles in Form einer oder zweier Uebergangszellen begleitet, welche, stark erweitert, gleichzeitig mit den Tracheïden endigen (Nicotiana Fig. 10 und 11 Taf. II, Physalis Fig. 21 Taf. I). Der obere Siebtheil, welcher bei Cucurbita in *allen* blinden Enden durch Reihen langgestreckter und protoplasmaarmer, kernloser Zellen vertreten war, fehlt bei den anderen bicollateralen Pflanzen nicht nur in allen Haupt- und Nebenenden, sondern auch schon in den feinsten Maschenbündeln. Während bei den Cucurbitaceen, abgesehen von Abnormitäten (Fig. 13 und 14 Taf. I) immer Reste der beiden Siebtheile in den Nebenenden vorkommen, führen dieselben bei den anderen bicollateralen Dicotylen nicht selten nur noch Tracheïden (Nicotiana Fig. 8 und 9 Taf. II). Solchen Schwankungen im anatomischen Bau der blinden Nervenenden wird man sehr oft begegnen; Uebergangsbildungen, welche man ebensowohl als Hauptenden als auch als Nebenenden bezeichnen könnte, werden dagegen selten vorkommen. Bei

einiger Erfahrung gelingt es immer leicht, diese beiden Arten der blinden Endigungen von einander zu unterscheiden. Den im ersten Abschnitte angeführten Merkmalen fügen wir noch das folgende, ausserordentlich Charakteristische hinzu: die Nebenenden enthalten niemals Siebröhren, die Hauptenden stets.

Mit Ausnahme der Cucurbitaceen stimmen alle anderen collateralen und bicollateralen Dicotylen in dem Verhalten ihrer Hauptenden überein. Dieselben sind stets collateral gebaut und enthalten an ihrer Basis noch einen vollständigen, unteren Siebtheil, welcher den gleichen anatomischen Bau, wie in den feinsten Maschenbündeln hat, man unterscheidet Siebröhren, Geleitzellen und Cambiform. Dieses findet sich gewöhnlich an der Grenze des Gefäss- und Siebtheiles, schiebt sich aber auch nicht selten zwischen die andern Elemente des letzteren ein. Die Figuren 20 und 24 Taf. I, 2, 5, 13, 16, 22, 26, 30—32 Taf. II, welche wahrscheinlich insgesammt Querschnitte durch die feinsten Maschenbündel darstellen, mögen zur Veranschaulichung der folgenden Darstellungen dienen. Die Hauptenden bieten an ihrer Basis ein gleiches Querschnittsbild dar, die Grössenverhältnisse der Siebröhren und Geleitzellen sind in beiden Fällen die gleichen. Diese Uebereinstimmung kann man natürlich nur durch sorgfältiges Studium von Längsschnitten durch die Hauptenden erkennen, da man an Querschnitten niemals sicher ermitteln kann, ob sie einem solchen oder einem feinsten Maschenbündel angehören. Ich verweise deshalb auf die in den Figuren 15 und 16 Taf. I, 7, 12 und 29 Taf. II abgebildeten Längsschnitte durch die Siebtheile der Hauptenden. Querschnitte durch dieselben haben vielleicht auch einigen der oben citirten Figuren als Vorlage gedient, da ich aber diese Frage nicht sicher entscheiden konnte, so betrachtete ich dieselben durchwegs als Bilder querdurchschnittener feinster Maschennerven.

Da die Cambiformzellen oft dieselbe Weite besitzen, wie die Geleitzellen, so fällt es zuweilen recht schwer, auf dem Nervenquerschnitt beide zu unterscheiden, wenn in demselben gerade ihre Zellkerne freigelegt sind. Hat man eine andere Stelle getroffen, dann wird ein genaues Studium die Geleitzellen durch ihren Protoplasmareichthum meist von dem inhaltsarmen Cambiform unterscheiden lehren. Am besten kann man die beiden Zellenarten durch Jodfärbung erkennen, die Geleitzellen, welche immer kleinere oder grössere Mengen des bekannten

Siebröhrenschleimes enthalten, nehmen eine viel dunklere und intensivere Färbung an als die Cambiformzellen. Zu der Erkennung dieser kann auch der Umstand beitragen, dass sie bei manchen Pflanzen kleine Krystalle aus Kalkoxalat (Physalis, Fig. 20 Taf. I) oder Chlorophyllkörner (Saxifraga, Fig. 2 Taf. II) enthalten. In einigen Fällen ist es mir nicht gelungen, das Cambiform von den Geleitzellen zu unterscheiden, da die letzteren nicht immer so dicht mit Protoplasma erfüllt sind, wie bei Cucurbita. Diese Bemerkung bezieht sich auf Cerinthe und Lycopsis (Fig. 15 Taf. II), Gentiana und Menyanthes (Fig. 32 Taf. II), Nicotiana (Fig. 24 Taf. I, Fig. 7 und 10 Taf. II), Rumex (Fig. 29 und 30 Taf. II) und Saponaria. Die in Fig. 10 Taf. II abgebildeten, protoplasmareichen Zellen aus dem unteren Siebtheile eines Nebenendes von Nicotiana möchte ich schon deshalb für erweiterte Geleitzellen halten, weil dieselben bei den anderen untersuchten Solaneen (Physalis, Solanum, Lycium und Nicandra) deutlich zu erkennen und von dem Cambiform zu unterscheiden waren. Aus diesem Grunde wird man auch die mit *ge* bezeichneten Zellen der Fig. 7 Taf. II als Geleitzellen anzusehen haben. Die in Fig. 24 Taf. I abgebildeten weiten Zellen (*cg*) werden wohl ebenfalls zum Theil als Geleitzellen zu betrachten sein, wie Fig. 20 Taf. I (Physalis) wahrscheinlich macht. Für die genannten Asperifoliaceen und Gentianeen, sowie für Saponaria und Rumex, wird wohl eine nochmalige Untersuchung, welche ich jetzt nicht ausführen kann, eine sichere Unterscheidung des Cambiforms und der Geleitzellen ermöglichen. Bei einigen andern Pflanzen mit sehr engmaschigem Bündelquerschnitt kann man ebenfalls die beiden Zellenarten nicht mit Bestimmtheit nachweisen, z. B. bei Corylus (Fig. 14 Taf. II) und Aesculus. Die meisten der am Schlusse der Arbeit aufgezählten Pflanzen enthalten in den feinsten Maschenbündeln und den Hauptenden sicher unterscheidbare Geleit- und Cambiformzellen. Mit vollem Recht wird man aus diesen Beobachtungen den Analogieschluss ziehen können, dass auch dort, wo eine solche Unterscheidung vorläufig nicht möglich war, Geleitzellen und neben ihnen vielleicht auch Cambiformzellen vorhanden sind. Die letzteren fehlen regelmässig in den feinsten Nervenbündeln mancher Pflanzen, z. B. Evonymus, Fraxinus. Niemals haben sich dagegen sichere Anhaltspunkte dafür ergeben, dass die Geleitzellen früher als die Siebröhren verschwinden und dass

diese allein mit dem Cambiform die Siebtheile der feinsten Maschenbündel und Hauptenden zusammensetzen. Als besonders geeignet zu einer Controle meiner Mittheilungen empfehle ich: Dahlia, Evonymus (Fig. 4 und 5 Taf. II), Fraxinus (Fig. 31 Taf. II), Physalis (Fig. 15, 16 und 20 Taf. I), Ranunculus (Fig. 22 Taf. II) und Syringa.

Die für Cucurbita aufgestellte Regel, dass mit dem Durchmesser der Nervenbündel auch der ihrer Siebröhren und Geleitzellen abnimmt, dass aber die ersteren viel schneller sich verengern als die letzteren, gilt auch ausnahmslos für alle anderen bicollateralen und alle collateralen Dicotylen. Die engen und durch dunklere Umrisse hervortretenden Maschen (*si*) in den mehrfach citirten Figuren sind die Querschnitte der stark verengten, *unvollkommenen* Siebröhren, welche, wie bei Cucurbita, durch glänzende Wandungen und durch das Fehlen deutlicher Siebplatten ausgezeichnet sind (Fig. 14 und 23 Taf. I, Fig. 7, 12 und 29 Taf. II). Der Inhalt besteht vorwiegend aus wässriger Flüssigkeit, welcher verschieden grosse Mengen von Schleim beigemengt sind. Derselbe häuft sich nicht selten in Form von Schlauchköpfen an (Fig. 23 Taf. I) und füllt manchmal die Glieder einzelner Siebröhren vollständig aus. Zellkerne wurden niemals, Protoplasma wurde nur spurenweise beobachtet.

Im Einklang mit der oben angeführten Regel herrscht in den feinsten Maschenbündeln und den Hauptenden meist Lumengleichheit zwischen den Siebröhren und ihren Geleitzellen. Ja bei vielen Pflanzen vergrössern sich die letztern in den feinsten Nerven wieder und überschreiten wie bei Cucurbita ihre im Stengel erreichten Dimensionen. Wie vorauszusehen, kommen alle erdenklichen Zwischenstufen vor, zwischen solchen Dicotylen, bei denen die Geleitzellen der zartesten Blattnerven ungefähr die Weite der zugehörigen Siebröhren besitzen, und solchen, bei denen dieselben Grössenverhältnisse bestehen, wie bei Cucurbita. Auch individuelle Schwankungen sind in ein und demselben Blatte zu beobachten, doch bewegen sich dieselben innerhalb enger Schranken, so dass wenigstens für die Species eine nahezu constante Grösse der Siebröhren und ihrer Geleitzellen sich ergiebt. Ob für ganze Gattungen eine solche Regel gilt, kann ich aus meinen Beobachtungen, welche immer nur eine Species berücksichtigen, nicht ersehen. Ich möchte

aber annehmen, dass sich alle Angehörigen einer Gattung gleich verhalten; kann ich doch sogar aus einigen Erfahrungen darauf schliessen, dass in ganzen Familien die Geleitzellen der letzten Nervenzweige eine nahezu constante Grösse einhalten. Neben den Cucurbitaceen, von denen ich bei 16 Gattungen Uebergangszellen beobachtet habe, nenne ich die Oenothereen und die Solaneen. Von jenen habe ich 3, von diesen 5 Gattungen untersucht, bei allen hatten sich die Geleitzellen zu typischen Uebergangszellen (Cucurbita) erweitert. Dasselbe Verhalten wurde bei folgenden Pflanzen festgestellt: Cestrum, Cornus, Dahlia, Evonymus (Fig. 5 Taf. II), Fraxinus (Fig. 31 Taf. II), Plantago (Fig. 12 und 13 Taf. II) und Syringa. Ihnen stehen als anderes Extrem jene Formen gegenüber, bei denen die Geleitzellen ungefähr das gleiche Lumen wie die Siebröhren besitzen. Hierher würde Vitis und unter Hinweis auf die frühere Auseinandersetzung Corylus zu rechnen sein. Die grosse Mehrzahl der untersuchten Dicotylen steht zwischen diesen beiden Grenzfällen, so dass in allgemeinster Fassung folgender Satz ausgesprochen werden kann: In den feineren und feinsten Nervenbündeln der Dicotylenblätter sind die Geleitzellen weiter als ihre Siebröhren, in allen anderen Organen der Pflanze findet das Gegentheil statt; vom Blattstiel aus lässt sich in den verschiedenen, immer schwächer werdenden Nervenzweigen die Umkehr des Verhältnisses Schritt für Schritt verfolgen. Zur Veranschaulichung und Begründung des Gesagten sei auf die Figuren 17—20 Taf. I (Physalis), 3—5 Taf. II (Evonymus) und 1 und 2 Taf. II (Saxifraga) verwiesen.

Wir haben uns noch mit dem Siebtheil der Hauptenden zu beschäftigen und zu zeigen, wie seine einzelnen Elemente aufhören. Bei einigen Pflanzen (Plantago, Solaneen, Asperifoliaceen, Saxifraga) werden die Tracheïden bis zuletzt von einem vollständigen Siebtheile begleitet. Das freie Ende des letzten Siebröhrengliedes grenzt entweder unmittelbar an das zur Parenchymscheide zusammenschliessende Mesophyll (Fig. 16 Taf. I, Fig. 12 Taf. II) oder wird von den noch vorhandenen Cambiform- und Geleitzellen umschlossen (Fig. 7 Taf. II). Das Verhalten dieser beiden Zellenarten brauche ich wohl unter Hinweis auf die bereits citirten Zeichnungen und auf Fig. 15 Taf. I, sowie auf die Tafelerklärung nicht näher zu besprechen. Bei anderen Pflanzen, namentlich bicollateralen, hört die Sieb-

röhre, wie bei Cucurbita, bereits im vorletzten Gliede des Hauptendes auf, der Siebtheil des letzten besteht dann nur noch aus Geleitzellen, zwischen welchen hie und da schwer davon unterscheidbares Cambiform vorkommt. Sehr häufig erlischt der ganze Siebtheil gleichzeitig schon im vorletzten oder drittletzten Gliede, so dass dann nur noch Tracheïden übrig bleiben. In anderen Fällen wiederum schwindet im drittletzten Gliede des Hauptendes nur die Siebröhre, im nächsten schwinden die Geleitzellen, so dass auch hier das letzte nur noch tracheale Elemente enthält. Das Cambiform fehlt, wie schon erwähnt, in vielen Hauptenden von Anfang an, in anderen hört es bald früher, bald später auf. Die vorstehende Schilderung bezieht sich auf unverzweigte Hauptenden und auf die längeren Aestchen der verzweigten. In die kürzeren, welche mit den längeren zusammen den Abschluss des verzweigten Hauptendes bilden, treten gewöhnlich keine Siebröhren mehr ein, die kurzen Aeste verhalten sich wie Nebenenden; sie bestehen bald nur aus Tracheïden, bald aus diesen und Geleitzellen (Fig. 6 Taf. II).

Ebenso wie die letzteren in den feinsten Nerven eine für jede Species nahezu constante Weite erreichen, ebenso herrscht auch in Bezug auf die zuletzt besprochenen Verhältnisse eine unverkennbare Regelmässigkeit, wenngleich zahlreiche Abweichungen vorkommen. Deshalb sehe ich auch von einer weiteren Aufzählung einzelner Beispiele ab. Gleichviel wie und wo die Siebröhren der Hauptenden aufhören, der hochwichtige Satz, dass in den Blättern der meisten Dicotylen blind endigende Siebröhren in grosser Zahl regelmässig vorkommen, wird immer und immer wieder bestätigt.

Gegenüber der gleich näher zu besprechenden Angabe ARESCHOUG's*), dass bei Ilex aquifolium, Tilia parvifolia und Buxus sempervirens isolirte Siebröhren von den feinen Nervenbündeln aus zwischen die Zellen des Mesophylles vordringen und hier blind endigen, ist besonders hervorzuheben, dass bei allen untersuchten Dicotylen die Siebröhren niemals die Tracheïden verlassen und entweder mit ihnen oder noch früher aufhören. Auch bei den eben genannten, von ARESCHOUG besprochenen Pflanzen habe ich niemals eine Ausnahme von dieser

---

*) Jemförande undersökningar öfver bladets anatomi. Minnesskrift utgifven af kongl. fysiografiska sällskapet i Lund. 1878.

Regel beobachten können. Da die Angaben eines so geschätzten Botanikers, wie Areschoug, vielleicht in weiteren Kreisen Zweifel an der Zuverlässigkeit meiner Beobachtungen aufkommen lassen werden, so sehe ich mich genöthigt, ausführlich auf die Verhältnisse einzugehen, welche Areschoug irre geführt haben. Ueber seine Arbeit konnte ich bereits früher *), Dank der Freundlichkeit des Herrn Dr. Jönsson in Lund, kurz referiren. Die Widersprüche, welche zwischen meinen neuen Untersuchungen und Areschoug's Angaben hervortraten, veranlassten mich, mich mit der schwedischen Sprache vertraut zu machen, so dass ich mir eine genauere Kenntniss des mehrgenannten Buches verschaffen konnte. Ich lasse einige kritische Bemerkungen über dasselbe mit kleinerem Druck folgen, beschränke mich aber selbstverständlich auf die Abschnitte über die blinden Enden der Siebröhren.

1. *Ilex aquifolium.* Areschoug sagt**): »Die im Inneren der Maschen endenden Nerven bestehen nicht alle, wie Hanstein und de Bary angeben, aus Spiraltracheïden, sondern einige von ihnen, welche gar keine Tracheïden enthalten, werden aus dünnwandigen, langgestreckten Bastzellen aufgebaut. Die aus Bastzellen bestehenden Nervenenden (Taf. V Fig. 4) sind viel schwerer als die anderen zu finden und treten erst deutlich hervor, wenn das Präparat durchsichtig gemacht und mit Chlorzinkjod gefärbt worden ist. Wie weit Siebröhren oder andere Elemente des Weichbastes diese Nervenenden begleiten, habe ich nicht mit voller Gewissheit erkennen können. Bisweilen haben solche Elemente die Bastzellen begleitet, aber in einem anderen Falle schienen die letzteren völlig isolirt zu sein. Doch ist es möglich, dass auch in diesem Falle Weichbastelemente, allerdings verdeckt von den Bastzellen, zu finden gewesen wären. Möglicherweise können sie auch beim Anfertigen des Präparates abgescheuert worden sein.«

Die Nervenenden, welche Areschoug hier beschreibt, habe ich nicht wiederfinden können, sie kommen gewiss nur ausnahmsweise vor und berühren unsere Frage nur nebenbei. Ich möchte mir das sonderbare Vorkommniss, vorausgesetzt, dass Areschoug die Tracheïden durch den Schnitt nicht weggerissen hat, durch die Annahme erklären, dass das ganze, weichbastfreie Bündelchen ein aus Tracheïden bestehendes ersetzt, dass anstatt der letzteren einmal Sklerenchymfasern (Bastzellen) entstanden sind. Solche tracheïdenfreie, nur aus langgestreckten, dünnwandigen Zellen bestehende Bündelenden können aber noch in anderer Weise zu Stande kommen, wie ich bei Gentiana genauer verfolgt habe. Bei dieser Pflanze bestehen die Parenchymscheiden der Nerven aus langgestreckten, chlorophyllarmen Zellen, wie Fig. 18 Taf. II zeigt. Dieselbe veranschaulicht auch das eigenthümliche Verhalten der Parenchymscheide (*p*), welche sich noch um ein

*) Cucurbitaceen pag. 65.

**) l. c. pag. 35 u. 36.

Glied weiter in das Lückenparenchym fortsetzt, nachdem die Tracheïden (*t*) und damit überhaupt alle Gefässbündelelemente aufgehört haben. Würde man einen Flächenschnitt, welcher ein solches Scheidenende enthält, in der von Areschoug angegebenen Weise erst mit Kali durchsichtig machen und nach Behandlung mit Chlorzinkjod bei starker Vergrösserung zeichnen, so würde man ein dem von Areschoug gegebenen Bilde sehr ähnliches erhalten. Dass unsere Fig. 18 Taf. II nicht einen schiefen Schnitt darstellt, ersieht man aus den Figuren 17 und 19 Taf. II, welche das Schwinden der Tracheïden und die Erhaltung der Parenchymscheide auch im Querschnitt zur Anschauung bringen.

Doch kehren wir zu Ilex zurück und hören wir weiter, was Areschoug über die Siebröhren sagt*): »Dagegen ist es mir nicht vollständig gelungen zu entscheiden, ob Siebröhren oder andere Weichbastelemente isolirt auftreten können, ohne von irgend welchen Gefässbündelelementen begleitet zu sein. Auf dem Tangentialschnitt, auch nachdem derselbe mit Kali durchsichtig gemacht und mit Chlorzinkjod gefärbt worden ist, habe ich sie (die Siebröhren) immer in Gesellschaft von Bastzellen gefunden. Aber wenn man den Tangentialschnitt durch Kochen in Kalilauge macerirt, mit der Präparirnadel zerzupft und dann mit Chlorzinkjod gefärbt hat, dann wird man finden, dass hie und da ausserordentlich schmale, blaugefärbte Zellen, welche, nach ihrem Inhalte zu schliessen und abgesehen von ihrer geringen Differenzirung, am meisten den Siebröhren ähneln, vom Gefässbündelstamm abzweigen und in das Schwammparenchym eindringen, wie kurz auch immer ihre freien Enden sein mögen. Ihre ganze Stellung und die der umgebenden Zellen beweist, dass diese freien Enden nicht durch die Präparirnadel losgerissen und aus den Gefässbündeln herausgebogen worden sind und dass somit auch Siebröhren blinde Enden bilden können.«

Die Beobachtung ist richtig, die Deutung aber gänzlich verfehlt. Alle Nervenbündel werden bei Ilex von einem ihrem Durchmesser entsprechenden Belege von Sklerenchymfasern begleitet, welche an der Unterseite des Siebtheiles liegen. Sie besitzen stark verdickte, glänzende und unverholzte Wandungen, welche ein sehr enges Lumen umschliessen (*s f* in Fig. 20 Taf. II). Wie Fig. 21 Taf. II zeigt, verlassen hie und da einzelne dieser Sklerenchymfasern ihre Nervenbündel und dringen sich windend und krümmend in das Lückenparenchym vor, woselbst sie blind endigen. Durch Kochen in Kalilauge quellen die Membramen dieser Sklerenchymfasern derartig auf, dass das vorher schon enge Zelllumen vollständig verschwindet. Setzt man nun Chlorzinkjod zu, so werden sich allerdings diese schmalen, aufgequollenen Fasern in toto blau färben. Ich zweifle keinen Augenblick daran, dass Areschoug dieselben Vorkommnisse und keine anderen vor Augen gehabt hat. Die von ihm beschriebenen nur aus Bastzellen bestehenden Enden sind keinesfalls mit den von uns geschilderten isolirten Sklerenchymfasern zu identificiren, wie schon ein Vergleich der Fig. 4 Taf. V bei Areschoug mit unserer Fig. 21 Taf. II beweist. Um die von dem Genannten entdeckten, aber fälschlich als Siebröhren gedeuteten Sklerenchymfasern, welche von den Nervenbündeln abzweigend vereinzelt in das Mesophyll vordringen, aufzufinden, bedarf es gar keiner Aufhellung

*) l. c. pag. 36.

und Färbung der Schnitte. Fertigt man dieselben aus Alkoholmaterial an, so erkennt man sofort den wahren Sachverhalt.

Die unvollkommenen Siebröhren der feineren Nerven verhalten sich bei Ilex so wie bei der Mehrzahl der oben besprochenen Pflanzen. Wie bei diesen beobachtet man blind auslaufende Siebröhren in den Hauptenden. Der Querschnit durch ein solches würde ungefähr das in Fig. 20 Taf. II wiedergegebene Bild gewähren. Die Geleitzellen (*ge*), welche sich leicht von dem Cambiforum (*ca*) unterscheiden lassen, sind ungefähr noch einmal so weit als die zugehörigen, unvollkommenen Siebröhren (*si*), die von uns aufgefundene Regel erleidet also auch hier keine Ausnahme. Der Siebtheil der Hauptenden hört immer früher auf, als der Gefässtheil, zuletzt bleiben hier, wie bei sehr vielen anderen Pflanzen, nur noch Tracheïden übrig. Areschoug hat die unvollkommenen Siebröhren gar nicht von den anderen Elementen seines Weichbastes zu unterscheiden vermocht, auch würden jene nach Maceration mit Kali überhaupt nicht mehr zu sehen gewesen sein.

Bei Olea europaea*) hat Areschoug ebenfalls im Lückenparenchym langgestreckte Zellen aufgefunden, welche er hier richtig als Sklerenchymfasern deutet, aber nicht bis zu ihrem Ansatz an ein Nervenbündel hat verfolgen können. Areschoug hebt ausdrücklich hervor, dass diese Fasern sich ebenfalls mit Chlorzinkjod blau färben und dadurch die Erkennung blinder Siebröhrenenden ausserordentlich erschweren. Um so unverständlicher wird mir die Unbefangenheit, mit welcher Areschoug bei Ilex über diese Zweifel hinweggeht. Jedenfalls verhält sich Olea europaea, welche ich nicht untersucht habe, genau so wie Ilex; wahrscheinlich werden sich noch viele lederartige Blätter, deren Nerven gewöhnlich starke Sklerenchymbelege besitzen, hier anschliessen.

2. *Tilia.* Areschoug hat T. parvifolia untersucht, mir war nur T. platyphylla zur Hand, eine Uebereinstimmung beider Species kann wohl vorausgesetzt werden. Blinde Enden findet man bei der grossblätterigen Linde nicht sehr häufig vor, die feinsten Nerven bilden sehr enge Maschen, deren Gefässbündel in der Regel noch einen vollständigen Siebtheil enthalten (Fig. 26 Taf. II). Nicht selten hört derselbe und nach ihm auch der aus sehr engen und schwer erkennbaren Tracheïden zusammengesetzte Gefässtheil auf, noch ehe der Anschluss an ein anderes Bündel erreicht ist. Von dem jetzt als Hauptende zu bezeichnenden Nervenaste bleiben aber gewöhnlich langgestreckte, inhaltsarme oder leere und weite Zellen übrig, welche denselben bis zum nächsten Nerven fortsetzen und sich hier an die Parenchymscheide anschliessen (Fig. 28 Taf. II). In einem solchen Falle kommen noch vollständige Maschen zu Stande, welche aber von ungleichwerthigen Bündeln begrenzt werden. Das eine von ihnen ist ein Hauptende, welches sich nur durch eine Reihe der oben geschilderten Zellen bis zum nächsten Nerven fortsetzt. Uebrigens kommen auch Hauptenden ohne diese Eigenthümlichkeit vor, sie verhalten sich dann so, wie bei den anderen Dicotylen. Ausserdem beobachtet man aber auch solche, welche sich nach dem Erlöschen des Sieb- und Gefässtheiles noch eine Strecke weit durch die in Fig. 28 Taf. II abgebildeten Zellen fortsetzen, ohne aber bis zur Vereinigung mit einem anderen Nerven zu gelangen. Fig. 27 Taf. II zeigt

*) l. c. pag. 46.

den Querschnitt durch ein feinstes Nervenbündel, welches keine Siebtheile mehr enthält und nur noch aus Tracheïden und einer weiten, dickwandigen Zelle (*sf*) besteht. Die letztere entspricht den in Fig. 28 Taf. II abgebildeten, ebenfalls mit *sf* bezeichneten Elementen, welche die Fortsetzung des Maschenbündels bilden. Jedenfalls sind diese langgestreckten, inhaltsarmen und stets kernlosen Zellen aus Procambiumelementen hervorgegangen. Man wird sie zu den Sklerenchymfasern zu rechnen haben. Ihre bald mehr, bald weniger verdickten und wahrscheinlich tüpfelfreien Wände sind bald verholzt, bald unverändert. So zeigte die in Fig. 28 Taf. II links gelegene Zelle deutliche Verholzung, während die andere, welche an die Parenchymscheide eines stärkeren Nerven sich anschliesst, diese Eigenschaft nicht besass. Mit dem Hinweis, dass die eben besprochenen Elemente grosse Aehnlichkeit mit jenen haben, welche bei den Cucurbitaceen den oberen Siebtheil der blinden Enden allein noch bilden (Fig. 11 Taf. I), wende ich mich zu den Angaben Areschoug's. Derselbe sagt*): »Sie (die blinden Enden) bestehen nicht allein aus Spiraltracheïden, sondern auch aus anderen Gefässbündelelementen. Ein Theil der feinsten, aber dessenungeachtet noch anastomosirenden Aeste scheint nur aus zarten, schmalen und ziemlich langen Zellen zu bestehen, welche nach der Aufhellung der Schnitte (durch Kali) mit Chlorzinkjod eine intensiv blaue Farbe annehmen und vermuthlich eine wenig differenzirte Form von Siebröhren darstellen. Diese Zellen besitzen *abgerundete* Enden und liegen in einer Reihe so hinter einander, dass das Ende der einen sich auf das der anderen hinaufschiebt« (unsere Fig. 28 Taf. II). »Diese Zellen unterscheiden sich von den Bastzellen der tracheïdenhaltigen Gefässbündel dadurch, dass die Bastzellen kürzer und weiter sind, verdickte Membranen haben und sich mit ihren *zugespitzten* Enden über einander legen. Solche bis auf eine Siebröhrenreihe reducirte Bündel werden von einer Strangscheide umgeben. Ich habe auch blinde Enden solcher Gefässbündel gefunden, dann hatten die Zellen sehr unebene Membranen und ein bald weiteres, bald engeres Lumen. Eine Strangscheide war dann nicht mehr vorhanden, sie grenzten unmittelbar an das Schwammparenchym.«

Obgleich Areschoug Zeichnungen, welche am leichtesten eine Orientirung ermöglichen würden, nicht giebt, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass die in unserer Fig. 28 Taf. II abgebildeten Zellen (*s f*) und keine anderen gemeint sind. Da auch bei Tilia mit der Stärke der Nerven das Lumen der Siebröhren abnimmt, so werden dieselben in den feinsten Maschenbündeln und in den Hauptenden nicht mehr die ansehnliche Weite der in Fig. 28 Taf. II abgebildeten Zellen besitzen, und wenn sie doch so weit wären, dann müssten sich jedenfalls deutliche Siebplatten erhalten haben. Die unvollkommenen Siebröhren der letzten Nervenbündel sind bei Tilia so beschaffen, wie bei allen andern Dicotylen (Fig. 26 Taf. II). Gegen die Areschoug'sche Deutung der die Hauptenden fortsetzenden Sklerenchymfasern spricht auch noch der Umstand, dass niemals Geleitzellen in ihrer Gesellschaft vorkommen. Näheren Aufschluss über die Function der in Rede stehenden Elemente wird man nur von einem Studium jugendlicher Blätter zu erwarten haben.

---

*) l. c. pag. 56.

3. *Buxus sempervirens.* Areschoug bemerkt Folgendes*): »Blinde Enden des Xylemes anzutreffen, ist mir bei dieser Pflanze nicht geglückt. Dagegen sind freie Enden aus langgestreckten Weichbastelementen, welche trotz ihrer geringen Differenzirung als Siebröhren zu betrachten sein dürften, keineswegs selten. Auf Tangentialschnitten, welche durch Kali aufgehellt und mit Chlorzinkjod gefärbt wurden, findet man oft einzelne stark blau gefärbte Siebröhren, welche auch von stärkeren Nerven abzweigen können und mit denselben wie andere Bündelzweige einen sehr spitzen Winkel bilden. Diese Siebröhren sind von keiner Strangscheide umgeben und schlängeln sich in das Schwammparenchym hinein. Dann und wann habe ich gesehen, wie die Spitze einer solchen Siebröhre quer von einer Schwammparenchymzelle begrenzt wurde, welche sich umgebogen hatte und die Spitze der Siebröhre umschloss.«

Auch diese Verhältnisse werden ohne Zeichnungen geschildert. So weit ist Areschoug beizustimmen, dass Tracheïdenenden bei Buxus vollständig fehlen. Die blinden Nervenenden, welche in grosser Menge vorkommen, enthalten keine Siebtheile mehr und bestehen nur noch aus bald verholzten, bald unverholzten Sklerenchymfasern (Fig. 23 und 25 Taf. II), welche hier die Function der Tracheïden übernommen haben. Wie bekannt ist schon von verschiedenen Seiten darauf hingewiesen worden, dass die mechanischen Zellen, Schwendener's Bastzellen, in manchen Pflanzen bei der Leitung des Wassers wesentlich betheiligt sind. Bei Buxus dürfte diese Vermuthung zur vollen Gewissheit werden. Tracheale Elemente treten niemals in die blinden Nervenenden ein und diese gerade hat man immer als wichtige Leitungsbahnen des Verdunstungswassers gedeutet. Dasselbe muss bei Buxus also nothwendig seinen Weg durch Sklerenchymfasern nehmen, welche für die kleinen und lederharten Blätter wohl schwerlich eine specifisch-mechanische Bedeutung haben werden.

Eben diese sklerenchymatischen Elemente sind es, welche Areschoug als wenig differenzirte Siebröhren aufgefasst hat. Unsere Fig. 24 Taf. II stimmt mit seiner Beschreibung vollkommen überein, wir sehen die isolirten Sklerenchymfasern (*s f*), welche sich, ohne von Parenchymscheiden umgeben zu sein, zwischen das Lückenparenchym eindrängen. Auch von stärkeren Nerven zweigen sehr häufig solche einzelne Fasern ab. Auch wenn dieselben, was keineswegs immer der Fall ist, verholzt sind, werden sie sich doch nach Behandlung mit Kali und Chlorzinkjod blau gefärbt haben, so dass auch diese Angabe Areschoug's durchaus nicht gegen unsere Deutung seiner Beobachtungen spricht. Wir haben bei Buxus dieselben Verhältnisse vor uns, welche wir für Ilex geschildert haben; hier wie dort dringen einzelne Sklerenchymfasern von den Nerven abzweigend in das Lückenparenchym vor. Während aber bei Ilex in allen Bündeln noch tracheale Elemente vorhanden sind, welche zahlreiche blinde Nervenenden ganz allein bilden, bestehen diese bei Buxus nur aus Sklerenchymfasern, welche mit der anatomischen Lagerung der Tracheïden auch deren Function übernommen haben.

Blinde Siebröhrenenden giebt es, wie schon früher erwähnt, bei Buxus nicht; in den feinen und feinsten Maschenbündeln kommen unvollkommene

*) l. c. pag. 40.

Siebröhren mit ungefähr gleichweiten Geleitzellen regelmässig vor. In dieser Beziehung folgt Buxus der oft erwähnten Regel.

4. Bei anderen Dicotylen behandelt Areschoug die uns interessirende Frage nicht mit derselben Ausführlichkeit, wie bei den eben besprochenen. So bemerkt er unter wiederholter Hervorhebung der Untersuchungsschwierigkeiten, dass er bei Populus balsamifera, Helianthus tuberosus, Saxifraga sarmentosa und zahlreichen anderen Pflanzen keine klare Einsicht in das Verhalten der blinden Enden erlangen konnte. Bei Plantago maritima*) sollen dieselben, wie bei Sedum, vollständig fehlen. Für die erstere Gattung haben mir meine Untersuchungen an Pl. major und ovata das entgegengesetzte Resultat geliefert, bei Sedum maximum und S. reflexum konnte ich, wie nach de Bary's**) Angabe zu erwarten war, blinde Enden nicht auffinden.

Zur Kritik der von Areschoug veröffentlichten Beobachtungen möchte ich mir noch folgende Bemerkungen erlauben. Zunächst darf man nicht vergessen, dass vor acht Jahren, als die Arbeit zum grössten Theile entstand, die als Weichbast zusammengefassten Siebröhren, Geleit- und Cambiformzellen noch nicht streng unterschieden worden waren, dass seit jener Zeit unsere Kenntnisse über die Siebröhren sich mannigfach erweitert haben. So werden wir auch jetzt ein ganz anderes Bild der unvollkommenen Siebröhren, welche in den feineren Blattnerven vorkommen, uns entwerfen können, als Areschoug. Er scheint angenommen zu haben, dass nur die Siebplatten undeutlich werden, dass aber die Weite der Siebröhren nicht entsprechend abnimmt. Wir legen aber gerade auf die Verengerung des Lumens mit gleichzeitiger Reduction der Siebplatten besonderes Gewicht. Reduction bedeutet hier aber nur, dass wir mit unseren optischen Hilfsmitteln eine besondere Structur in den Querwänden nicht mehr erkennen können; das Fehlen einer solchen, welche die der Siebplatten im Kleinen wiederholt, soll damit keineswegs behauptet werden. Ueber die Beschaffenheit seiner reducirten und wenig differenzirten Siebröhren und über die Gründe, welche seine Ansicht unterstützen, spricht sich Areschoug überhaupt gar nicht mit Bestimmtheit aus.

Zu diesem einen Vorwurfe, welcher dem Genannten nicht erspart werden kann, gesellen sich aber noch zwei andere, schwerer wiegende hinzu. Areschoug hat nur Präparate untersucht, welche er nach der Hanstein-schen Methode aufgehellt und dann mit Chlorzinkjod gefärbt hatte. Handelt es sich nur um die Verfolgung des Nervenverlaufes, soweit derselbe durch die Tracheïden angezeigt wird, so leistet das erwähnte Verfahren treffliche Dienste. Für das Studium der zarten und durch Reagentien leicht zerstörbaren Siebtheile hätte Areschoug doch wohl eine weniger rohe Methode aufsuchen können. Ausserdem unterlässt er es vollständig, seine ausschliesslich an Flächenschnitten (Tangentialschnitten) gewonnenen Resultate an Querschnitten zu controliren. Diese geben oft die beste Auskunft über den anatomischen Bau der feineren und feinsten Nervenbündel und sind zur Lösung der von Areschoug behandelten Fragen ebenso unentbehrlich wie die Flächenschnitte.

*) l. c. pag. 78.

**) Vergleichende Anatomie, pag. 346.

IV. Bemerkungen über die Function der Siebröhren, der Geleitzellen und des Cambiformes.

Wie es keinem Zweifel unterliegt, dass jede mit lebendem Protoplasma und Zellkern ausgestattete Zelle, welchem Organ der Pflanze sie auch immer angehören möge, Eiweiss erzeugen kann, so wird auch die Annahme gerechtfertigt erscheinen, dass bei allen höher differenzirten Gewächsen besondere Bildungsstätten für eiweissartige Körper vorhanden sind*) und dass vornehmlich in den Blättern eine ausgiebige Erzeugung solcher Stoffe stattfindet**). Hierher führt der Transpirationsstrom grosse Mengen mineralischer Substanzen, hier liefert die assimilatorische Thätigkeit der chlorophyllhaltigen Zellen stickstofffreie, organische Materialien, welche mit den aus dem Boden aufgenommenen anorganischen Salzen jedenfalls zu Eiweiss sich vereinigen. Dieser Process könnte sich gleich in den assimilirenden Geweben vollziehen, die erzeugten Kohlehydrate könnten gleich am Orte ihrer Entstehung mit den zugeführten Mineralsubstanzen zusammentreten. Dann müsste man hie und da in den Mesophyllzellen wenn auch nur kleine Mengen jenes glänzenden Schleimes finden, welcher in den Siebröhren fortgeleitet und gegenwärtig allgemein als Ernährungseiweiss angesehen wird. Ich entsinne mich nicht, einem solchen Falle begegnet zu sein.

Ein viel gewichtigerer Einwurf gegen die Voraussetzung, dass in den assimilirenden Zellen selbst Eiweiss erzeugt werde, lässt sich aber aus der Anordnung der dasselbe fortleitenden Organe, der Siebröhren, entnehmen. Diese verlassen, wie bekannt, niemals die Nervenbündel und dringen niemals zwischen die Zellen des Lückenparenchymes und der Pallisadenschicht ein, wie es nach Haberlandt's Beobachtungen die Milchröhren thun***). Man könnte allerdings behaupten, dass die Eiweissstoffe von ihren Bildungsstätten, den grünen Zellen aus bis an die Siebröhren vordrängen und diesen durch die Geleitzellen, welche gewissermassen nur als Sammelstellen functionirten,

*) Pfeffer, Physiologie I, pag. 245; Sachs, Vorlesungen pag. 392.

**) Pfeffer, Physiologie I, pag. 245.

***) Zur physiologischen Anatomie der Milchröhren. Sitzungsber. d. Wiener Akademie. 87. Bd. 1883.

zugeführt würden. Selbst wenn man annehmen wollte, dass eine leicht diosmirende Modification des Eiweisses in den chlorophyllhaltigen Zellen entstünde, so würde doch immer noch zu bedenken sein, dass die Assimilationsthätigkeit, für deren ungestörten Fortgang, wie Haberlandt mit Recht herhorhebt*), eine möglichst rasche Ableitung der Assimilationsproducte von grossem Vortheil ist, nicht nur durch die zeitweilige Anhäufung der Eiweisssubstanzen, sondern schon durch ihren Bildungsprocess wesentlich herabgedrückt werden würde. Bei dem Stande unserer Kenntnisse lassen sich zwingende Beweise gegen die Annahme einer Eiweisserzeugung im Mesophyll gar nicht beibringen; es muss dem Urtheil jedes Einzelnen überlassen bleiben, ob er der von uns bekämpften oder der von uns vertretenen Ansicht über die Bildungsstätten der Eiweisssubstanzen den Vorzug geben wird. Die folgenden Auseinandersetzungen sollen nur eine Klärung des Problemes herbeiführen, seine Lösung nur vorbereiten.

Wir haben gesehen, dass in den feineren und feinsten Nerven aller Dicotylen die Siebröhren sich stärker verengen, als die zugehörigen Geleitzellen, welche in allen Fällen die Weite der ersteren erreichen, in vielen sogar überschreiten. Bei zahlreichen Pflanzen besitzen sie schliesslich sogar einen grösseren Durchmesser als im Stamme. Alle diese Thatsachen lassen erkennen, dass die Geleitzellen in der Blattlamina grösseren Ansprüchen zu genügen haben, als in allen anderen Organen der Pflanze. Ueber die specifische Function der genannten Zellen werden uns daher die feineren und feinsten Nerven des Blattes die beste Auskunft geben. Schon aus der Lage der erweiterten Geleitzellen, welche wir in den Uebergangszellen wiedererkannt haben, folgt, dass ihnen durch die Parenchymscheide grosse Mengen von Assimilationsproducten, welche sich nach unserer Annahme noch nicht mit stickstoffhaltiger Substanz vereinigt haben, zugeführt werden. Wenn diese unverändert aus den Geleitzellen wieder austräten, dann müsste man doch öfter Stärkekörner in den letzteren beobachten. Sehen wir von dem abnormen Falle, welchen ich früher**) beschrieben habe ab, so bleibt nur ein einziges Beispiel übrig, nämlich Cestrum Poeppigii.

*) Physiolog. Pflanzenanatomie pag. 184.

**) Cucurbitaceen, p. 46, 100.

In den Blättern dieser Pflanze enthält ungefähr die Hälfte aller der stark erweiterten Geleitzellen Stärkekörner, bei allen anderen Dicotylen fehlen dieselben, wie aus Russow's, Wilhelm's*) und meinen eigenen Beobachtungen hervorgeht.

Um mich davon zu überzeugen, dass auch zu den verschiedensten Tageszeiten kein Amylum in den Uebergangszellen auftritt, habe ich folgenden Weg eingeschlagen. Von einem Acker, auf welchem zahlreiche Kürbispflanzen cultivirt wurden, entnahm ich am 25. August 1884 von morgens 9 bis abends 10 Uhr stündlich eine Blattprobe, am 26. August geschah dasselbe von früh $^1/_2$6 bis 11 Uhr. Die einzelnen Blattstücke wurden sofort nach ihrer Abtrennung von der Pflanze in absoluten Alkohol gebracht und im Januar dieses Jahres untersucht. Während der Stärkegehalt der Mesophyllzellen in der von Sachs**) angegebenen Weise wechselte, erwiesen sich die Geleitzellen ganz unabhängig davon, stets stärkefrei. Nicht ein einziges Amylumkorn habe ich in den vielen Hunderten, welche ich durchmusterte, angetroffen. Eine auffällige, über das Maass individueller Schwankungen hinausgehende Verschiedenheit des Geleitzellinhaltes konnte überhaupt nicht festgestellt werden. Immer waren die genannten Elemente der Nervensiebtheile von einem feinkörnigen, schaumigen Protoplasma mit Zellkern erfüllt, immer brachte Jod jene goldgelbe, auf reichen Eiweissgehalt hindeutende Färbung hervor. Schleim, welcher dem bekannten Inhalte der Siebröhren entspricht, wurde sowohl früh 7 Uhr als Nachmittag 2 Uhr, also zu Zeiten beobachtet, welche ungefähr die Extreme für die Stärkespeicherung in den Blättern bezeichnen.

Die ausserordentlich wichtige Thatsache, dass niemals, weder am Tage noch in der Nacht Amylum in den Geleitzellen vorkommt, lässt vermuthen, dass dieselben überhaupt nicht als Wanderungsbahnen der stickstofffreien Assimilationsproducte anzusehen sind. Dieselben könnten allerdings als Zucker fortgeführt werden. Leider konnte ich bis zum Abschluss des Manuscriptes kein günstiges, lebendes Material erlangen, an welchem diese Frage sich hätte entscheiden lassen. Da der Zucker gewöhnlich in saftreichen und protoplasmaarmen Zellen

*) Die Angaben der genannten Autoren sind in der Einleitung zu der vorliegenden Abhandlung besprochen.

**) Assimilationsthätigkeit der Blätter. Arbeiten des botanischen Institutes Würzburg III, 1. 1884.

sich findet, so ist schon von vornherein zu erwarten, dass er in den Geleitzellen des Blattes nicht vorkommen wird. Diese Annahme, welche hoffentlich durch Untersuchung im nächsten Sommer sich bewahrheiten wird, wolle man mir gestatten.

Die schon früher von mir ausgesprochene Ansicht*), dass in den Geleitzellen die in den Siebröhren fortgeführten Eiweisssubstanzen erzeugt werden, wird ausser durch die bereits mitgetheilten noch durch folgende Thatsachen unterstützt. In den stärke- und chlorophyllfreien Geleitzellen findet man stets einen grossen, schön ausgebildeten Zellkern, dessen Betheiligung an der Eiweissbildung zwar nicht erwiesen, aber mit vieler Wahrscheinlichkeit anzunehmen ist; das dichte, schaumige Protoplasma enthält, wie seine Färbung mit Jodpräparaten, seine Aufspeicherung von Anilinblau beweist, kleinere oder grössere Mengen von Siebröhrenschleim, welcher zuweilen sogar in grösseren Tropfen sich ansammelt (Fig. 12 Taf. I bei *s*); die Geleitzellen grenzen immer an einer Seite an eine Siebröhre an und stehen mit derselben, wenigstens im Stamm und Blattstiel, durch Tüpfel oder sogar Poren in enger Verbindung. In den feineren Nerven habe ich diese Eigenthümlichkeit nicht beobachtet, wahrscheinlich wird sich aber auch hier eine solche Communication mit Hilfe der Russow'schen**) Quellungsmethode nachweisen lassen. Zu Gunsten der eben besprochenen Ansicht über die Function der Geleitzellen lässt sich auch die Angabe Koch's***) anführen, dass die peripherischen Zellen (unsere Uebergangszellen), also die erweiterten Geleitzellen in Blättern, deren Assimilationsthätigkeit durch ungünstige äussere Bedingungen herabgedrückt ist, nur wässriges Protoplasma und keinen Schleim mehr enthalten. Es werden eben nur kleine Mengen von Kohlehydraten, welche zur Bildung von Eiweiss verwendet werden können, producirt.

Das Cambiform, welches stets neben den Siebröhren als Leitungsbahn der eiweissartigen Nährmaterialien genannt wird, ist unserer Ansicht nach an dem Transporte dieser Stoffe nur in untergeordnetem Grade, vielleicht gar nicht betheiligt. Seit der Aufstellung jener Hypothese hat sich ergeben, dass das Cam-

---

*) Cucurbitaceen, pag. 99.

**) Sitzungsber. d. Dorpater Naturf. Gesellsch. 1883. pag. 565.

***) Bot. Zeitung. 1884. pag. 411.

biform im Sinne de Bary's*) aus zwei wohl charakterisirten Zellformen besteht, aus den Geleitzellen und aus langgestreckten, protoplasmaarmen Zellen, welche deutlich von den ersteren zu unterscheiden und allein noch als Cambiform zu bezeichnen sind. In jedem kräftigen Siebtheile einer dicotylen Pflanze wird man immer die drei Elemente desselben: die Siebröhren, die Geleitzellen und das Cambiform in der Regel schon auf dem Querschnitt, sicher auf dem Längsschnitt zu unterscheiden vermögen (Taf. I Fig. 1—3, Fig. 17—19, Fig. 22; Taf. II Fig. 1 und 3).

Diese Aenderung unserer Kenntnisse über die anatomische Zusammensetzung der Siebtheile bringt aber auch nothwendig eine Umgestaltung unserer Ansichten über den Stofftransport mit sich. Gerade die eiweissreichen Geleitzellen haben, als man sie schlechthin zum Cambiform rechnete, Veranlassung gegeben, das letztere als Leitungsbahn für Ernährungseiweiss anzusehen. In der That passen die Beschreibungen des Cambiformes, welche man in der Literatur vorfindet, viel besser auf die Geleitzellen, als auf die anderen, langgestreckten Zellen, welche mit diesen und den Siebröhren zusammen die Siebtheile aufbauen. So sagt de Bary**): »Der Länge nach verfolgt, bilden die Cambiformzellen zwischen den Siebröhren diesen parallele Reihen. Sie sind einzeln betrachtet in der Regel kürzer, selten so lang wie die Siebröhrenglieder. Sowohl nach der Anordnung auf dem Querschnitt als bei Verfolgung in der Längsrichtung hat es vielfach den Anschein, als ob die Cambiformzellen mit den Siebröhrengliedern aus einer Mutterzelle entständen, derart, dass sich diese der Länge nach theilt in eine zum Siebröhrenglied werdende Tochterzelle und eine andere, welche entweder ungetheilt zur Cambiformzelle oder durch Querwände in mehrere dieser getheilt wird. Die Cambiformzellen haben zarte, unverholzte Cellulosewände und feinkörnigen Protoplasmakörper mit längsgestrecktem Zellkern.« Die Geleitzellen hätten nicht treffender beschrieben werden können. Scheidet man diese aus dem Cambiform aus, so kann man mit diesem Namen nur die langgestreckten und protoplasmaarmen Zellen (Fig. 22 Taf. I) bezeichnen, in welche sich die bei der Formung der Siebröhre und ihrer Geleitzellen übrig

*) Vergleichende Anatomie pag. 337, 338, 538.

**) l. c. pag. 337.

bleibenden cambialen Zellen verwandeln. In diesen finden sehr oft spätere Quertheilungen statt, so dass man dann, analog den gefächerten Faserzellen*) von gefächerten Cambiformzellen reden könnte.

Dieses Cambiform in meinem Sinn führt sehr häufig Stärke, bei den Solaneen kleine Krystalle aus Kalkoxalat und ist an der Leitung des Eiweisses, auch nicht des leichter diosmirenden, wie HABERLANDT will**), wahrscheinlich gar nicht betheiligt. Man darf eben nicht vergessen, dass *das* Cambiform, welches früher als Wanderungsbahn der Eiweisssubstanzen gedeutet wurde, nicht *dem* entspricht, welches wir heute neben den Siebröhren und Geleitzellen unterscheiden. Es scheint sogar, dass man früher unser Cambiform, dessen Elemente vielfach ungefähr dieselbe Weite besitzen wie die Siebröhren (Taf. II Fig. 17) als solche betrachtete und nur die Geleitzellen als Cambiform unterschied. Ich möchte annehmen, dass die von uns mit diesen Namen belegten Zellen keine andere Function verrichten, als die das Gefässbündel zunächst umgebenden Parenchymzellen, dass sie also besonders die zur Eiweissbildung erforderlichen Substanzen den Geleitzellen zuführen und die Abfälle dieses Processes, z. B. oxalsaure Salze aus diesen aufnehmen. Die geringen Mengen von Protoplasma, das Fehlen des glänzenden Schleimes, welcher als wanderndes Eiweiss allgemein gedeutet wird, machen es durchaus unwahrscheinlich, dass die Cambiformzellen neben den viel besser eingerichteten Siebröhren an der Leitung des Eiweisses Theil nehmen. Die Geleitzellen, auf welche man vielleicht die für das alte Cambiform aufgestellte Hypothese übertragen möchte, bilden gewöhnlich gar keine ununterbrochenen Längsreihen und dürften schon aus diesem Grunde für die Fortführung plastischer Stoffe nicht geeignet sein.

Resultate.

1. Mit dem Durchmesser der Blattnerven nimmt auch die Weite ihrer Siebröhren und Geleitzellen ab, die ersteren verengern sich aber schneller als die letzteren.

---

*) DE BARY, Vergleichende Anatomie pag. 499.

**) Physiologische Anatomie pag. 219.

2. In den feineren und feinsten Maschenbündeln sind die Geleitzellen mindestens ebenso weit, in den meisten Fällen weiter als die zugehörigen Siebröhren. Bei zahlreichen Dicotylen, besonders bei solchen mit bicollateralen Gefässbündeln, haben die Geleitzellen der feinsten Maschennerven sogar einen grösseren Durchmesser als im Blattstiel und Stengel. Die peripherischen Zellen Koch's, meine Uebergangszellen, sind diese stark erweiterten Geleitzellen und werden fernerhin nur noch als solche zu bezeichnen sein.

3. Bei allen collateralen und bicollateralen Dicotylen, mit einziger Ausnahme der Cucurbitaceen, sind die feinsten Maschenbündel collateral gebaut. In dem unter dem Gefässtheile liegenden Siebtheile kommen neben den weiten Geleitzellen und dem bald leichter, bald schwerer davon unterscheidbaren Cambiform unvollkommene Siebröhren regelmässig vor.

4. Die unvollkommenen Siebröhren sind sehr eng und besitzen nicht mehr deutliche Siebplatten. Sie enthalten nur einen dürftigen Protoplasmabeleg, welcher nicht selten ganz fehlt und niemals einen Zellkern. Schleim kommt bald in grösserer, bald in geringerer Menge vor, ist aber in sehr vielen unvollkommenen Siebröhren nicht zu beobachten. Dieselben werden dann nur von wässriger Flüssigkeit erfüllt.

5. Unter den blinden Nervenenden der Blattlamina sind zwei Arten zu unterscheiden: die Nebenenden und die Hauptenden.

6. Die Nebenenden enthalten niemals Siebröhren und bestehen bei allen collateralen Dicotylen nur noch aus Tracheïden. Unter den bicollateralen haben nur die Cucurbitaceen bicollaterale Nebenenden, deren unterer Siebtheil durch eine Reihe stark erweiterter Geleitzellen, deren oberer Siebtheil durch langgestreckte, protoplasmaarme und kernlose Zellen dargestellt wird. Alle anderen bicollateralen Dicotylen schliessen sich in Bezug auf die Nebenenden den collateralen an. Nicht selten tritt aber hier zu den Tracheïden eine Reihe erweiterter Geleitzellen als Rest des unteren (äusseren) Siebtheiles hinzu.

7. Die Hauptenden sämmtlicher collateraler und bicollateraler Dicotylen führen stets einen vollständigen unteren Siebtheil, welcher so zusammengesetzt ist, wie in den feinsten Maschenbündeln, und kurz vor oder mit den Tracheïden, niemals später als diese, aufhört. In allen Hauptenden liegen also blinde Endigungen von unvollkommenen Siebröhren.

8. Die Angaben Areschoug's, dass bei Ilex, Tilia und Buxus isolirte, blind endende Siebröhren zwischen die Zellen des Lückenparenchyms vordringen, unabhängig von der Nervatur, sind unrichtig: Es liegt eine Verwechselung mit Sklerenchymfasern vor.

9. Bei Buxus bestehen die blinden Enden nur aus Sklerenchymfasern, welche hier die Function der Tracheïden übernommen haben und wahrscheinlich als wasserleitende Elemente anzusehen sind.

10. Bei Buxus, Quercus, Juglans und Aristolochia giebt es keine blinden Siebröhrenenden in der Lamina, Hauptenden fehlen.

11. Die Siebtheile aller untersuchten Dicotylen enthalten immer Siebröhren, Geleitzellen und Cambiform.

12. Das Cambiform, zu welchem früher die Geleitzellen gerechnet wurden, ist an der Leitung des Eiweisses nicht oder nur nebenbei betheiligt, seine Hauptleistung besteht wahrscheinlich darin, die Materialien zur Eiweisserzeugung herbeizuschaffen.

13. Als specifische Bildungsherde der Eiweisssubstanzen sind die Geleitzellen anzusehen. Ihre Vergrösserung in den feinsten Nerven des Blattes spricht dafür, dass hier der Hauptsitz der Eiweissbereitung ist.

14. Die ausgebildeten Siebröhren nehmen nicht Theil an der Erzeugung der eiweissartigen Baustoffe, sind aber die specifischen Leitungsbahnen derselben.

15. Diese Resultate gelten für alle in dem nachfolgenden Verzeichniss aufgeführten Pflanzen mit den durch die beigegebenen Bemerkungen bedingten Einschränkungen.

Leipzig, im April 1885.

Verzeichniss der untersuchten Pflanzen.

1. Aegopodium Podagraria L.
2. Aesculus Hippocastanum L.
3. Aristolochia Sipho L'Herit.
4. Beta vulgaris + Moqu.
5. Buxus sempervirens L.
6. Calcyanthus floridus L.
7. Camellia japonica L.
8. Cerinthe aspera Roth.
9. Cestrum Poeppigii * Seudt.
10. Clarckia pulchella * Pursh.
11. Cornus sanguinea L.
12. Corylus Avellana L.
13. Cucurpita Pepo * L.
14. Cytisus Laburnum L.
15. Dahlia variabilis Desf.
16. Diervillea rosea Lindl.

17. Digitalis purpurea L.
18. Drosera rotundifolia † L.
19. Ecballium Elaterium * A. Rich.
20. Evonymus europaeus L.
21. Fagus silvatica (f. rubra) L.
22. Fraxinus excelsior L.
23. Gentiana Cruciata * L.
24. Hedera Helix L.
25. Heracleum Sphondylium L.
26. Hippuris vulgaris L.
27. Hydrangia Hortensia DC.
28. Ilex Aquifolium L.
29. Juglans regia L.
30. Lopezia racemosa * Cav.
31. Lycium flaccidum * (Vell.)
32. Lycopsis arvensis L.
33. Lythrum Salicaria * L.
34. Menyanthes trifoliata L.
35. Mirabilis Jalapa L.
36. Nicandra physaloides * Gärtn.
37. Nicotiana Tabacum * L.
38. Nolana atriplicifolia * Hort.
39. Oenothera fruticosa * L.
40. Passiflora coerulea L.
41. Phaseolus grandiflorus W.
42. Physalis Alkekengi * L.
43. Plantago major L. (und ovata Forsk.)
44. Populus tremula L.
45. Prunus avium L. (cultiv.).
46. Quercus Robur L.
47. Ranunculus acris L.
48. Rhamnus Catharticus L.
49. Ribes rubrum L.
50. Rubus idaeus L.
51. Rumex Acetosa L.
52. Saponaria officinalis L.
53. Saxifraga granulata L.
54. Sedum Telephium L. (und reflexum L.)
55. Solanum tuberosum * L.
56. Sparmannia africana L. fil.
57. Syringa vulgaris L.
58. Thunbergia alata † Boj.
59. Tilia platyphylla Scop.
60. Tropaeolum majus L.
61. Vaccinium Myrtillus L.
62. Vitis vinifera L.

Die mit einem * versehenen Pflanzen besitzen bicollaterale Gefässbündel. Ein † bedeutet, dass die Pflanze nur auf das Verhalten der Geleitzellen und Siebröhren in den feinsten Maschenbündeln untersucht wurde, dass dagegen die Hauptenden nicht genauer zu analysiren waren. Sonst wurden alle die genannten Pflanzen nach der in der Einleitung geschilderten Methode studirt.

Erklärung der Figuren.

(Die eingeklammerten Ziffern geben die Vergrösserung an.)

ca = Cambiform, *t* = Tracheïde, *ge* = Geleitzelle, *sf* = Sklerenchymfaser, *si* = Siebröhre, cg_1= Cambiform und Geleitzellen, welche nicht von einander zu unterscheiden sind. Die Siebröhren wurden leer eingezeichnet, in den Geleitzellen wurde der Inhalt möglichst dicht eingetragen zum Unterschied von dem Cambiform, bei welchem der Natur gemäss nur ein schwacher Wandbeleg angegeben wurde.

Tafel I.

Fig. 1. Cucurbita. Querschnitt durch den äusseren Siebtheil des stärksten Gefässbündels im Nerv I (vergl. die Tabelle auf pag. 256). (675.)

Fig. 2. Cucurbita. Querschnitt durch den unteren (äusseren) Siebtheil des einzigen Gefässbündels in Nerv II. (675.)

Fig. 3. Cucurbita. Querschnitt durch den unteren Siebtheil des Nerv III. (675.)

Fig. 4. Cucurbita. Querschnitt durch den ganzen unteren Siebtheil des Gefässbündels in Nerv IV. Die an dem linken Rande des Bildes gelegene Geleitzelle (*ge*) hat sich bereits ansehnlich erweitert und ist zur Uebergangszelle (peripherische Zelle A. Koch's) geworden. (675.)

Fig. 5. Cucurbita. Querschnitt durch den ganzen unteren Siebtheil des Nerv V. Rechts und links schliesst sogleich Lückenparenchym an das Nervenbündel an. Dagegen wird dasselbe noch nicht von der Pallisadenschicht überzogen. Ueber und unter dem Bündel liegt noch farbloses Nervenparenchym. (675.)

Fig. 6. Cucurbita. Querschnitt durch das ganze Gefässbündel des Nerv VI. Dasselbe wird ringsum vom Mesophyll umschlossen. Oberhalb des Bündels liegt die Pallisadenschicht, das Lückenparenchym hat eine Parenchymscheide gebildet. Farbloses Nervenparenchym fehlt. (675.)

Fig. 7. Cucurbita. Querschnitt durch das ganze Gefässbündel eines Nerv VII. Im unteren Siebtheil ist nur noch eine sehr enge, unvollkommene Siebröhre (*si*) mit zwei zu Uebergangszellen erweiterten Geleitzellen und eine einzige Cambiformzelle vorhanden. Die Siebröhre des oberen Siebtheiles hat sich nicht so stark verengt, wie die des unteren, die Geleitzelle ist eng geblieben. (675.)

Fig. 8. Cucurbita. Querschnitt durch das ganze Gefässbündel eines Nerv VII. Die Siebröhre des unteren Siebtheiles ist hier aussergewöhnlich weit. (675.) Diese und die vorige Figur, welche den Bau der feinsten Maschennerven darstellen, veranschaulichen auch die Zusammensetzung des unteren Siebtheiles der Hauptenden, der obere enthält bei diesen keine Siebröhren mehr.

Fig. 9. Ecballium. Querschnitt durch ein ganzes feinstes Maschenbündel. Die Cambiformzellen des oberen, eine Siebröhre nebst Geleitzelle enthaltenden Siebtheiles zeichnen sich durch ihre Grösse und durch Chlorophyllkörner (*ch*) aus. (675.)

Fig. 10. Ecballium. Flächenschnitt durch die beiden letzten Glieder eines Hauptendes, der Schnitt ist durch den unteren Siebtheil geführt worden. Die unvollkommene Siebröhre (*si*) hört mit angeschwollenem Ende im vorletzten Gliede auf, das letzte enthält im unteren Siebtheil nur noch Geleitzellen (Uebergangszellen). Die Endanschwellung der Siebröhre ist keinesfalls typisch, gewöhnlich besitzt das letzte Glied überall ein gleiches Lumen. (675.)

Fig. 11. Cucurbita. Flächenschnitt durch den oberen Siebtheil eines Nebenendes. Derselbe besteht nur noch aus einer Längsreihe langgestreckter, protoplasmaarmer und kernloser Zellen. Auch in den Hauptenden bilden diese Elemente allein den oberen Siebtheil. (675.)

Fig. 12. Cucurbita. Erweiterte Geleitzelle (Uebergangszelle) aus dem unteren Siebtheile eines feineren Nerven. Bei *s* hat sich ein grössere Menge Siebröhrenschleim, welcher jedenfalls in der Geleitzelle

entstanden ist, angesammelt. Das Präparat wurde von einem Blattfragmente angefertigt, welches am 26. August 1884 früh 7 Uhr von der Pflanze abgeschnitten und sogleich in absoluten Alkohol gebracht worden war. (675.)

Fig. 13 u. 14. Cucurbita. Zwei abnorm gebaute blinde Enden. Diese beiden Zeichnungen wurden nur der Vollständigkeit halber aufgenommen; sie sind für die allgemeinen Resultate der vorstehenden Arbeit bedeutungslos. (675.)

Fig. 15. Physalis. Flächenschnitt durch das letzte Glied eines Hauptendes. Ein Vergleich mit Fig. 20 zeigt, dass der Schnitt über der Siebröhre geführt wurde und zwei neben einander liegende, erweiterte Geleitzellen traf. (675.)

Fig. 16 Physalis. Das der vorigen Figur zu Grunde liegende Präparat von der anderen (unteren) Seite gesehen. Es wurde eine blind endigende unvollkommene Siebröhre mit Cambiformzellen freigelegt. Die letzteren enthalten kleine Krystalle von oxalsaurem Kalk. Die Figur zeigt sehr deutlich die Beschaffenheit der unvollkommenen Siebröhre und ihren Anschluss an das Lückenparenchym. Die Tracheïden hörten gleichzeitig mit dem unteren und einzigen Siebtheile des collateralen Hauptendes auf. (675.)

Fig. 17. Physalis. Querschnitt durch den äusseren Siebtheil des Gefässbündelringes im Stengel. Die Siebröhren (*si*), deren Inhalt hier ausnahmsweise angedeutet wurde, sind ebenso weit wie die Cambiformzellen (*ca*). Diese enthalten nur einen schmächtigen Protoplasmabeleg und viele kleine Krystalle aus Kalkoxalat. Während das Cambiform leicht von den Geleitzellen zu unterscheiden ist, bedarf es immer einer genaueren Prüfung, wenn man dasselbe zwischen den Siebröhren erkennen will. Verwechselungen sind leicht möglich und werden wohl früher auch oft vorgekommen sein. (675.)

Fig. 18. Physalis. Querschnitt durch den ganzen unteren Siebtheil des Gefässbündels eines Nerven dritter oder vierter Ordnung. Derselbe enthält noch farbloses Nervenparenchym. Die Geleitzellen sind ungefähr ebenso weit, einige sogar weiter als die stark verengten Siebröhren, von welchen sich das Cambiform nunmehr leicht unterscheiden lässt. (675.)

Fig. 19. Physalis. Querschnitt durch das ganze, bicollaterale Gefässbündel eines Nerven vierter oder fünfter Ordnung. Dasselbe wird von der Pallisadenschicht überzogen und von einer Parenchymscheide umgeben. Farbloses Nervenparenchym ist nicht mehr vorhanden. Die Geleitzellen des oberen Siebtheiles sind klein geblieben, die des unteren dagegen zu Uebergangszellen angeschwollen. (675.)

Fig. 20. Physalis. Querschnitt durch ein ganzes feinstes Maschenbündel. Dasselbe ist collateral gebaut, der obere Siebtheil erhält sich bei Physalis nur bis in solche Nerven, wie in Fig. 19. Das Cambiform (*ca*) mit seinen Oxalatkryställchen ist leicht von den Geleitzellen zu unterscheiden. Das Bild veranschaulicht zugleich den Querschnitt durch die Basis eines Hauptendes. (675.)

Fig. 21. Physalis. Querschnitt durch ein Nebenende mit einer Tracheïde und zwei Geleitzellen. In anderen Nebenenden fehlen die letzteren, dann sind nur noch tracheale Elemente übrig. (675.)

Fig. 22. Physalis. Tangentialschnitt durch den äusseren Siebtheil des Bündelringes im Stengel. Die Geleitzellen haben die gleiche Länge wie die Siebröhrenglieder. Das Cambiform tritt als dritter Bestandtheil des Siebtheiles deutlich hervor. (375.)

Fig. 23. Physalis. Unvollkommene Siebröhre mit Schlauchkopf, begleitet von krystallhaltigen Cambiformzellen. Längsschnitt aus einem feinsten Maschenbündel. (675.)

Fig. 24. Nicotiana. Querschnitt durch ein ganzes collaterales, feinstes Maschenbündel. Das Cambiform und die Geleitzellen waren hier nicht deutlich zu unterscheiden. Ein Vergleich mit Fig. 20 wird die richtige Deutung des Bildes ermöglichen. (675.)

Tafel II.

Fig. 1. Saxifraga. Querschnitt durch den Siebtheil eines Blattstielbündels. Zwischen den weiten Cambiformzellen liegen Gruppen englumiger Elemente, welche bei genauerer Untersuchung als Siebröhren und Geleitzellen sich unterscheiden lassen. (675.)

Fig. 2. Saxifraga. Querschnitt durch ein ganzes feinstes Maschenbündel oder durch ein Hauptende. Ein Theil der Cambiformzellen hat Chlorophyllkörner gebildet. Die Geleitzellen sind weiter als die zugehörigen Siebröhren. (675.)

Fig. 3. Evonymus. Querschnitt durch den Siebtheil der Mittelnervbasis. Den Cambiformzellen entsprechen die weitesten Maschen. Die Geleitzellen grenzen hier gewöhnlich an die Krystalldrusen enthaltenden Markstrahlzellen (*m*) an. Niemals wurde beobachtet, dass die letzteren mit den Siebröhren in Berührung stehen. (675.)

Fig. 4. Evonymus. Querschnitt durch das ganze Gefässbündel eines feineren Nerven. Die Cambiformzellen kommen nur noch zwischen dem Gefäss- und dem Siebtheil vor. Dieser enthält sehr verengerte Siebröhren und weite Geleitzellen. Nervenparenchym ist nicht mehr vorhanden, die Pallisadenschicht bedeckt das von einer Parenchymscheide umgebene Bündel. (675.)

Fig. 5. Evonymus. Querschnitt durch ein ganzes, feinstes Maschenbündel. Der Siebtheil enthält kein Cambiform und besteht aus zwei Siebröhren mit drei stark erweiterten Geleitzellen (Uebergangszellen). Ein ähnliches Bild würde ein Querschnitt durch die Basis eines Hauptendes gewähren. (675.)

Fig. 6. Evonymus. Querschnitt durch einen kurzen Endast eines verzweigten Hauptendes. Siebröhren fehlen, Geleitzellen noch vorhanden. (675.)

Fig. 7. Nicotiana. Flächenschnitt durch das letzte Glied eines Hauptendes, Siebtheil. Die einzige unvollkommene Siebröhre hört mit den Geleitzellen auf und schiebt sich zwischen diese ein. Die mit *ge* bezeichneten Zellen wird man wohl als Geleitzellen aufzufassen haben, doch könnten sie auch Cambiform darstellen.

Ein Theil einer das letzte Siebröhrenglied bedeckenden Zelle wurde mit eingezeichnet, der andere Theil war durch das Messer weggerissen worden. (675.)

Fig. 8. Nicotiana. Nebenende, nur aus Tracheïden bestehend. Flächenschnitt. (675.)

Fig. 9. Nicotiana. Querschnitt durch ein Nebenende ohne Siebtheilrest. (675.)

Fig. 10. Nicotiana. Flächenschnitt durch ein Nebenende, den aus erweiterten Geleitzellen bestehenden unteren und einzigen Siebtheil zeigend. Siebröhren treten in die Nebenenden nicht ein. (675.)

Fig. 11. Nicotiana. Das Präparat der vorigen Figur von der anderen (oberen) Seite gesehen. Die Tracheïden entsprechen in ihrer Form und Lage den in der Fig. 10 abgebildeten Geleitzellen. Man vergl. auch Fig. 21 Taf. I. (675.)

Fig. 12. Plantago major. Flächenschnitt durch das letzte Glied eines Hauptendes. Die unvollkommene Siebröhre hat sich bis zum Abschluss des ganzen Siebtheiles und des Gefässtheiles erhalten. *ge* dürfte bestimmt eine Geleitzelle sein, bei *cg* könnte aber auch Cambiform vorliegen. (675.)

Fig. 13. Plantago major. Querschnitt durch ein ganzes feinstes Maschenbündel oder durch die Basis eines Hauptendes. Eine Cambiformzelle *ca* ist sicher zu erkennen. (675.)

Fig. 14. Corylus. Querschnitt durch ein feinstes Maschenbündel oder durch ein Hauptende. In dem engmaschigen Siebtheil, welcher, wie ein Analogieschluss wahrscheinlich macht, noch Siebröhren enthält, lassen sich diese, die Geleitzellen und das Cambiform nicht mehr von einander unterscheiden. (675.)

Fig. 15. Quercus. Querschnitt durch ein feinstes Maschenbündel. Der schwer analysirbare Siebtheil enthält noch Siebröhren mit Geleitzellen, die ersteren treten noch am schärfsten hervor. Hauptenden giebt es bei Quercus nicht, die Nebenenden bestehen stets nur aus Tracheïden. (675.)

Fig. 16. Lycopsis. Querschnitt durch ein letztes Maschenbündel oder ein Hauptende. Die Zelle *ge* ist wahrscheinlich eine Geleitzelle, die anderen mit *ca* bezeichneten Maschen entsprechen dem Cambiform, welches hier, wie bei Physalis, kleine Kalkoxalatkrystalle enthält. (675.)

Fig. 17. Gentiana. Querschnitt durch das vorletzte Glied eines Hauptendes oder durch ein Nebenende. Von einer Parenchymscheide umschlossen besteht das Nervenbündel nur noch aus einer Tracheïdenreihe. (675.)

Fig. 18. Gentiana. Flächenschnitt durch ein Hauptende geführt. Die Parenchymscheide *p* setzt sich noch um ein Glied über den Endpunkt der Tracheïden fort. Näheres im Texte. (175.)

Fig. 19. Gentiana. Querschnitt durch die Fortsetzung der Parenchymscheide. (675.)

Fig. 20. Ilex. Querschnitt durch ein feinstes Maschenbündel mit sehr engen unvollkommenen Siebröhren und doppelt so weiten Geleitzellen. Das Cambiform ist von diesen leicht zu unterscheiden.

Unterhalb des Siebtheiles ein Beleg aus unverholzten Sklerenchymfasern (*sf*). (675).

Fig. 21. Ilex. Ein Stück des Nervennetzes mit isolirten Sklerenchymfasern (*sf*), welche von den Gefässbündeln aus in das Mesophyll eindringen. Diese mit Chlorzinkjod sich blau färbenden Fasern sind von ARESCHOUG als Siebröhren gedeutet worden. Näheres im Text. (70.)

Fig. 22. Ranunculus. Querschnitt durch ein feinstes Maschenbündel (oder durch die Basis eines Hauptendes). Die für den Stengelsiebtheil charakteristische Theilungsweise der die Geleitzellen und die Siebröhrenglieder erzeugenden Procambiumzellen hat sich bis in dieses zarte Nervenbündel erhalten. (675.)

Fig. 23. Buxus. Durch Maceration isolirte Sklerenchymfaser aus den blinden Ausläufern der Nervatur. (675.)

Fig. 24. Buxus. Flächenschnitt durch ein nur aus Sklerenchymfasern bestehendes blindes Nervenende. Einzelne der genannten Elemente dringen zwischen die Zellen des Lückenparenchymes ein. Tracheïden kommen in diesen Enden gar nicht vor, die Wasserleitung wird von den Sklerenchymfasern besorgt. Näheres über ARESCHOUG's Angaben im Text. (175.)

Fig. 25. Buxus. Querschnitt durch ein Sklerenchymfaserbündel. Tracheïden und Siebtheil fehlen. (675.)

Fig. 26. Tilia. Querschnitt durch den Siebtheil eines feinsten Maschenbündels. Die Unterscheidung der Geleitzellen und des Cambiformes bietet einige Schwierigkeit und lässt sich nicht für alle Maschen des Querschnittes durchführen. (675.)

Fig. 27. Tilia. Querschnitt durch ein feinstes Maschenbündel, dessen Siebtheil bereits aufgehört hat. An seine Stelle ist eine Sklerenchymfaser getreten. Die Tracheïden sind ziemlich dünnwandig, aber trotzdem auf Flächenschnitten sicher zu erkennen. (675.)

Fig. 28. Tilia. Flächenschnitt durch den Rest eines feinsten Maschenbündels, von welchem nur eine Längsreihe langgestreckter, kernloser und protoplasmaarmer oder leerer Zellen übrig geblieben ist. Diese schliesst sich an die Parenchymscheide (*p*) eines stärkeren Maschenbündels an. Näheres im Texte bei der Besprechung von ARESCHOUG's Blattanatomie. (675.)

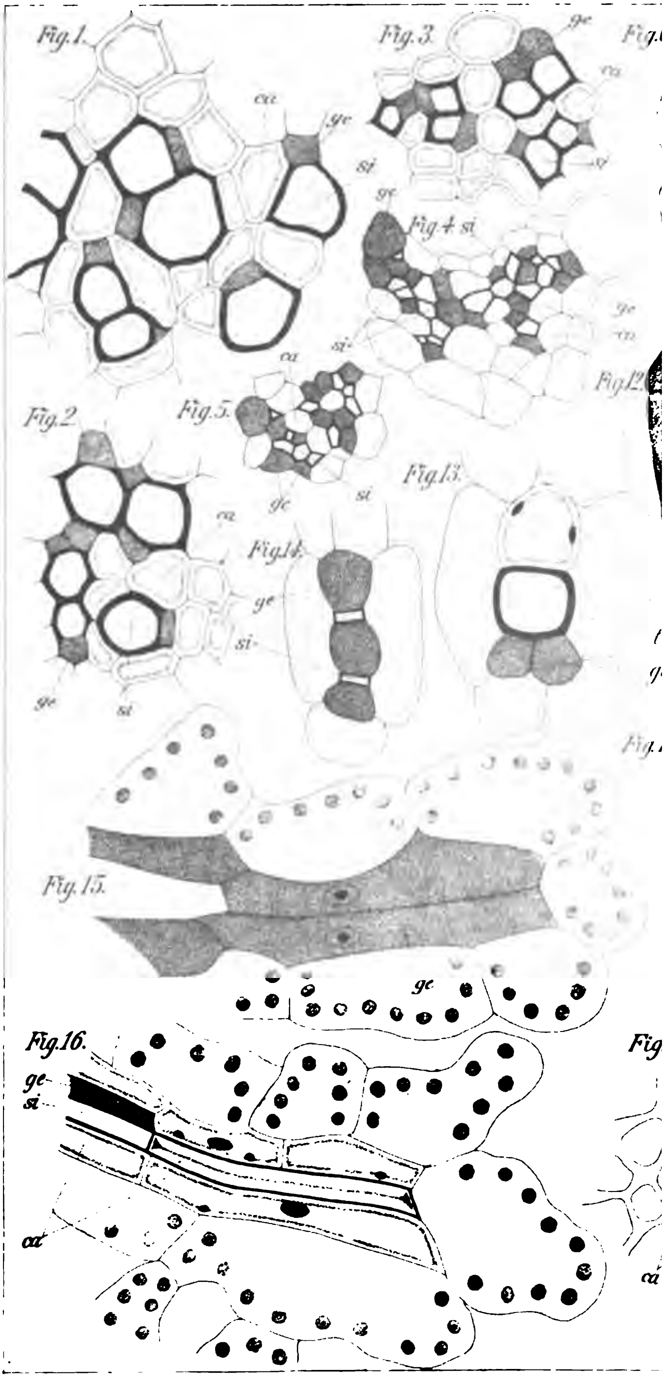
Fig. 29. Rumex. Flächenschnitt durch die beiden vorletzten Glieder eines Hauptendes; der Siebtheil freigelegt. Die unvollkommene Siebröhre mit zwei scheinbar geschlossenen Querwänden. Die Zellen (*ge*) sind jedenfalls Geleitzellen. Ihre Unterscheidung vom Cambiform konnte nicht mit Sicherheit durchgeführt werden, wie auch die folgende Figur zeigt. (675.)

Fig. 30. Rumex. Querschnitt durch ein feinstes Maschenbündel oder durch die Basis eines Hauptendes. Cambiform und Geleitzellen sind sicherlich vorhanden, aber nicht mit Bestimmtheit zu unterscheiden. Die mit *ge* bezeichneten Zellen sind wahrscheinlich erweiterte Geleitzellen. (675.)

Fig. 31. Fraxinus. Querschnitt durch ein feinstes Maschenbündel (oder ein Hauptende). Cambiform fehlt, zu jeder der beiden stark verengten unvollkommenen Siebröhren gehört je eine erweiterte Geleitzelle (Uebergangszelle). (675.)

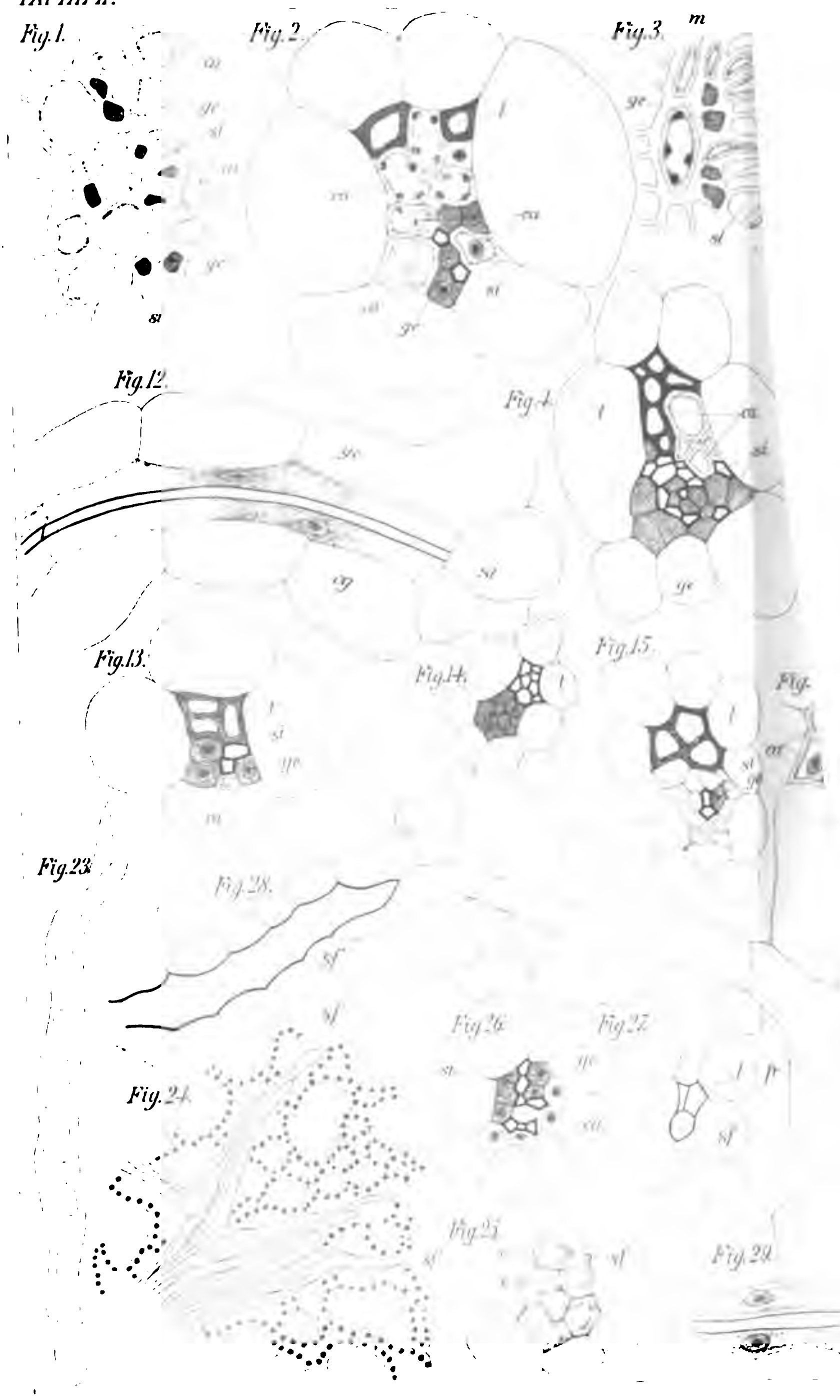
Fig. 32. Menyanthes. Querschnitt durch ein Hauptende oder ein feinstes Maschenbündel. Cambiform und Geleitzellen nicht zu unterscheiden, aber wahrscheinlich vorhanden. (675.)

TAFEL I.



A. Fischer gez.

TAFEL II.



A. Fischer gez.

INHALT.

Seite

R. Baltzer, Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. (Mit 5 Holzschnitten.) 1

A. Mayer, Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung 7

G. Pick, Zur Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen. Vorgelegt von F. Klein . . . 15

T. Molien, Ueber gewisse, in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Einheitswurzeln. Vorgelegt von F. Klein 25

W. Knop, Ueber die Aufnahme verschiedener Substanzen durch die Pflanze, welche nicht zu den Nährstoffen gehören. 39

H. Bruns, Ueber die Rotation eines starren Körpers . . . 55

E. Papperitz, Zur algebraischen Transformation der hypergeometrischen Functionen. Vorgelegt von F. Klein . . 60

F. Klein, Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen 70

L. Scheeffer, Ueber die Bedeutung der Begriffe »Maximum und Minimum« in der Variationsrechnung. Vorgelegt von A. Mayer. 92

C. Reinhardt, Zu Möbius' Polyedertheorie. Vorgelegt von F. Klein. (Mit 3 Holzschnitten.). 106

W. His, Vorlegung der Tafeln IX—XIV seines embryologischen Atlas 126

A. Schenk, Ueber Sigillariostrobus 127

H. Ambronn, Zur Mechanik des Windens. II. Theil. (Mit 6 Holzschnitten.) Vorgelegt von A. Schenk 132

M. von Frey und *E. Wiedemann*, Ueber die Verwendung der Holtz'schen Maschine zu physiologischen Reizversuchen. (Mit 1 Holzschnitt.) 181

H. Credner, Die obere Zechsteinformation im Königreich Sachsen. 189

P. Biedermann, Ueber Multiplicatorgleichungen höherer Stufe. Vorgelegt von F. Klein 201

A. Hurwitz, Ueber die Klassenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe. Vorgelegt von F. Klein 222

W. von Bechterew, Untersuchungen über die Schleifenschicht. Mitgetheilt von P. Flechsig 241

A. Fischer, Studien über die Siebröhren der Dicotylenblätter. Vorgelegt von A. Schenk. Mit 2 lith. Tafeln 245

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

JUL 2 1886
Harv. Fund.
(III.)
48.23

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1885.

III.

MIT 1 TAFEL UND 3 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1886.

SITZUNG AM 1. JUNI 1885.

Joseph Gierster, *Ueber die Galois'sche Gruppe der Modulargleichungen für den Transformationsgrad* q^n. (Vorgelegt von *F. Klein.*)

In meiner Arbeit: »Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades«, Math. Annalen Bd. XVIII, habe ich die Aufgabe behandelt, die in der bezeichneten Gruppe enthaltenen Untergruppen sämmtlich aufzustellen und in Bezug auf ihre Gleichberechtigung zu classificiren. Es schien mir nun zur Erledigung gewisser nicht unwichtiger Fragen in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen wünschenswerth, auch die Galois'schen Gruppen der Modulargleichungen für *zusammengesetzte* Transformationsgrade in dieser Hinsicht eingehend zu studiren. Ich habe diese Untersuchung vorläufig für Potenzen von Primzahlen > 2 durchgeführt. Auf diese bezieht sich die folgende Mittheilung und es sei daher unter q immer eine Primzahl > 2 verstanden. Die Potenzen von 2 selbst können ebenso erledigt werden. Jedoch stellt sich ihre gesonderte Behandlung wegen des vielfach abweichenden Verhaltens der entsprechenden Gruppen als zweckmässig heraus.

I.

Definition der Gruppe.

Zur Definition der betrachteten Gruppe »G« kann man verschiedene Darstellungsformen wählen. In ihrer *reellen* Gestalt besteht dieselbe aus allen Substitutionen

$$(1) \qquad S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \text{ mod. } q^n,$$

wo α, β, γ, δ ganze Zahlen der Determinante:

$$(2) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \text{ mod. } q^n$$

sind, wobei jedoch die Substitutionen $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und $f(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta)$ als identisch aufzufassen sind. Zu jeder Substitution $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, welche nicht $\equiv \omega$ mod. q ist, gehört die *charakteristische Grösse*

$$(3) \qquad \Delta = \left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)^2 + \beta\gamma = \left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 - 1.$$

Es sei ferner

$$(4) \quad f\left(u + \frac{\alpha - \delta}{2}, \beta, \gamma, \quad u - \frac{\alpha - \delta}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\alpha - \delta}{2}, \beta, \gamma\right)$$

gesetzt und zur eindeutigen Bestimmung des Zeichens φ bestimmt[1]), dass u diejenige von den 2 Wurzeln der Congruenz

$$(5) \qquad u^2 \equiv 1 + \Delta \text{ mod. } q^n$$

bedeute, welche positiv und $< \frac{1}{2} q^n$ ist.

An die Seite dieser Darstellungsform der Gruppe treten die *imaginären* Gestalten derselben. Diese sind ebenfalls durch die Congruenzen (1) und (2) definirt; nur sind die Grössen α, β, γ, δ im Allgemeinen Imaginäre im Galois'schen Sinne. Es ist nämlich

$$\alpha = a + d\sqrt{N} \qquad \delta = a - d\sqrt{N}$$
$$\beta = b + c\sqrt{N} \qquad \gamma = b - c\sqrt{N}$$

zu setzen, wo N ein fester, übrigens beliebig zu wählender quadratischer Nichtrest von q ist und $\sqrt{N}$ eine Grösse bedeutet, welche der Congruenz

$$x^2 \equiv N \text{ mod. } q^n$$

genügt. Hingegen sind a, b, c, d wieder irgend welche ganze Zahlen mod. q^n, die sämtlich die Bedingung (2) erfüllen müssen, welche sich jetzt in folgender Form schreibt:

$$(2') \qquad a^2 - b^2 + (c^2 - d^2)N \equiv 1 \text{ mod. } q^n.$$

Die Betrachtung dieser imaginären Gestalten der Gruppe ist nicht nur in vielfacher Hinsicht sehr zweckmässig, sondern bei manchen Fragen dem Wesen der Sache nach überhaupt nicht zu vermeiden.

---

1) Eine Ausnahme findet nur statt, wenn $u = \frac{\alpha + \delta}{2} \equiv 0$ mod. q^n ist. S hat dann die Periode 2.

Die Gruppe G enthält die ausgezeichneten Untergruppen $E, E_2, \cdots E_{n-1}$, welche bez. alle Substitutionen enthalten, die mod. q, mod. q^2, $\cdots$ mod. q^{n-1} zur Identität ω congruent sind. Die Substitutionen von E_τ sind demnach durch

$$\text{(6)} \qquad \varphi(\mu q^\tau, \nu q^\tau, \varrho q^\tau) = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau \qquad \mu, \nu, \varrho = 1, 2, \cdots, q^{n-\tau}$$

dargestellt. Für jede solche Substitution, welche nicht zugleich in $E^{\tau+1}$ enthalten ist, für welche also *nicht* $\mu \equiv \nu \equiv \varrho \equiv 0$ mod. q ist, hat man die *charakteristische Grösse*

$$\text{(7)} \qquad \Pi = \mu^2 + \nu\varrho \text{ mod. } q^{n-\tau}.$$

Als Ordnung der Gruppe G ergiebt sich leicht die Zahl $\frac{q^2-1}{2} q^{3n-2}$, als Ordnung von E_τ $q^{3(n-\tau)}$.

II.

Die cyclischen Gruppen.

1. Für $q > 3$ hat man 3 Arten von Substitutionen von G, die nicht zugleich der Gruppe E angehören, zu unterscheiden. Für diese Arten ist beziehungsweise:

$$\varDelta \equiv 0 \text{ mod. } q, \quad \left(\frac{\varDelta}{q}\right) = +1, \quad \left(\frac{\varDelta}{q}\right) = -1.$$

Die Substitutionen der ersten Art ($\Pi \equiv 0$) haben sämmtlich die Periode q^n; sie ordnen sich also zu cyclischen Gruppen der Ordnung q^n zusammen. Ist $S = \varphi(\mu, \nu, \varrho)$ eine solche Substitution (so dass also $\varDelta = \mu^2 + \nu\varrho \equiv 0$ mod. q, hingegen nicht $\mu \equiv \nu \equiv \varrho \equiv 0$ mod. q ist), so sind alle Potenzen von S dargestellt durch

$$\text{(8)} \qquad S^\nu \xi = \varphi(\mu\xi, \nu\xi, \varrho\xi) \qquad \xi = 1, 2, \cdots, q^n.$$

Ebenso sind die Substitutionen der zweiten Art $\left\{\left(\frac{\varDelta}{q}\right) = +1\right\}$ in Cyclen der Ordnung $\frac{q-1}{2} q^{n-1}$, jene der dritten Art in Cyclen der Ordnung $\frac{q+1}{2} q^{n-1}$ enthalten. Auch hier sind die Substitutionen der nämlichen cyclischen Gruppe durch Gleichung (8) dargestellt, nur dass ξ nicht mehr *alle* Werthe mod. q^n beschreibt, sondern jedesmal nur diejenigen, für welche die Congruenz

(5′) $$u^2 \equiv 1 + \Delta\xi^2 \bmod. q^n$$

reelle Lösungen u hat.

Ist $q = 3$, so sondern sich von den Substitutionen der ersten Art diejenigen ab, für welche $\Delta \equiv -3 \bmod. 9$ ist. Während für die übrigen Substitutionen $\Pi \equiv 0 \bmod. 3$ dasselbe gilt, was für $q > 3$ gesagt ist, zeigen die eben bezeichneten ein anderes Verhalten. Es vereinigen sich nämlich diejenigen, für welche

(9) $$\Delta \equiv -\tfrac{3}{4} + t_0 \cdot 3^{n-\varepsilon+1} \bmod. 3^n, \quad t_0 \gtrless 0 \bmod. 3$$

ist, zu cyclischen Gruppen der Ordnung 3^ε. Diese Cyclen sind *nicht* in höheren Cyclen als Untergruppen enthalten. Uebrigens sind die Substitutionen eines solchen Cyclus (der Ordnung 3^ε) wieder durch $\varphi(\mu\xi, \nu\xi, \varrho\xi)$ [(Gleichung (8)] dargestellt, allein ξ muss dabei auf die Werthe 0, 1, $-1 \bmod. 3^{n-\varepsilon+1}$ beschränkt bleiben.

Ausserdem sieht man, dass für $q = 3$ Substitutionen der 2. Art $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 1$ überhaupt nicht existiren.

Die Substitutionen $S = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ der Gruppe E_τ, welche nicht zugleich in $E_{\tau+1}$ enthalten sind, so dass nicht gleichzeitig $\mu \equiv \nu \equiv \varrho \equiv 0 \bmod. q$ ist, haben sämmtlich die Periode $q^\sigma = q^{n-\tau}$. Sie bilden Cyclen $\varphi(\mu\xi, \nu\xi, \varrho\xi)_\tau$ der Ordnung q^σ.

2. Die Classification der cyclischen Gruppen kann auf Grund der folgenden Sätze leicht erledigt werden.

a) Sollen 2 Substitutionen $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und $S' = f(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ mit den charakteristischen Grössen Δ und Δ', welche der Gruppe G, *nicht* aber der Gruppe E angehören, gleichberechtigt sein, so muss

(10) $$\Delta \equiv \Delta' \bmod. q^n$$

sein. Diese Bedingung reicht für $\Delta \gtrless 0 \bmod. q$ auch hin, dagegen muss im Falle $\Delta \equiv 0 \bmod. q$ noch eine der Grössen $(\alpha + \delta)\beta$, $-(\alpha + \delta)\gamma$ denselben quadratischen Charakter $+1$ oder $-1 \bmod. q$ haben, wie $(\alpha' + \delta')\beta'$ oder $-(\alpha' + \delta')\gamma'$.

b) Ebenso sind 2 Substitutionen $\varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ und $\varphi(\mu', \nu', \varrho')_\tau$ der Gruppe E_τ, welche nicht zugleich der $E_{\tau+1}$ angehören, gleichberechtigt, wenn

entweder α) $\Pi = \mu^2 + \nu\varrho \equiv \Pi' = \mu'^2 + \nu'\varrho' \bmod. q^{n-\tau}$, $\Pi \gtrless 0 \bmod. q$, oder β) $\Pi \equiv \Pi' \bmod. q^{n-\tau}$, $\Pi \equiv 0 \bmod. q$

ist und gleichzeitig eine der Grössen ν', $-\varrho'$ denselben quadratischen Charakter $+1$ oder -1 mod. q hat, wie ν oder $-\varrho$.

Man erhält folgende Resultate:

Ist $q > 3$, *so enthält die Gruppe G*

α) $(q+1)\,q^{n-1}$ *gleichberechtigte* $G_q^{\,n}$ (I), $\Delta \equiv 0$ *mod.* q^n;

β) $2j$ *Gattungen von* $\frac{q^2-1}{2j}\,q^{n+\varepsilon-2}$ $G_q^{\,n}$ (I', ε) *für* $\varepsilon = 1, 2, \cdots n-1$; $\Delta = s_0\,q^{n-\varepsilon}$ *mod.* q^n, $s_0 \gtrless 0$ *mod.* q;

γ) $\frac{q+1}{2}\,q^{2n-1}$ *gleichberechtigte* $G_{\frac{q-1}{2}q^{n-1}}$, $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 1$;

δ) $\frac{q-1}{2}\,q^{2n-1}$ *gleichberechtigte* $G_{\frac{q+1}{2}q^{n-1}}$, $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = -1$.

Hier bedeutet G_o eine cyclische Gruppe der Ordnung o, ferner ist $j = 1$ oder 2 zu setzen, je nachdem $q \equiv 3$ oder $\equiv 1$ mod. 4 ist. Ist $q \equiv 3$ mod. 4, so ist für die eine von den 2 Gattungen (β) das Legendre'sche Zeichen $\left(\frac{s_0}{q}\right) = +1$, für die andere -1. Ist hingegen $q \equiv 1$ mod. 4, so sind die 4 Gattungen (β) durch die Werthe des »Charakters«

$$\left(\frac{s}{\gamma_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{s}{\beta_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}} \ \text{mod. } q$$

unterschieden, wobei die angehängten Indices 0 bedeuten; dass der Werth 0 mod. q für die betreffende Grösse auszuschliessen ist, soll der angegebene Charakter einen Sinn haben.

Ist $q = 3$, *so sind die Cyclen* (γ) *sowie diejenigen von den Cyclen* (β) *wegzulassen, für welche* $\Delta \equiv -3$ *mod.* 9 *ist. Dagegen treten dann folgende Cyclen neu hinzu:*

ε) 2 *Gattungen von* $4 \cdot 3^{2n-3}$ *gleichberechtigten* $\Gamma_3^{\,\varepsilon}$,

$$\Delta = -\tfrac{3}{4} + t_0 \cdot 3^{n-\varepsilon+1} \ \text{mod. } 3^n.$$

$$\textit{Charakter}\left(\frac{t_0}{3}\right); \quad \varepsilon = 2, 3, \cdots, \ n-1.$$

ζ) $4 \cdot 3^{2n-2}$ *gleichberechtigte* Γ_3, $\Delta \equiv -\frac{3}{4}$ *mod.* 3^n.

Für die in E_τ enthaltenen Cyclen der Ordnung $q^{n-\tau}$ erhält man, wenn man $n-\tau = \sigma$ setzt und die genannten Cyclen kurz mit σ bezeichnet, folgendes (auch für $q = 3$ gültige) Resultat.

Die Gruppe E_τ $(\tau = 1, 2, \cdots, n-1)$ *enthält:*

α) $(q+1)\,q^{\sigma-1}$ *gleichberechtigte* $\sigma\,(I)$, $\Pi \equiv 0$ mod. q^{σ};

β) $2\,j$ *Gattungen von* $\frac{q^2-1}{2j}\,q^{\sigma+\varepsilon-2}$ *gleichberechtigten* $\sigma\,(I', \varepsilon)$, $\Pi = s_0\,q^{\sigma-\varepsilon}$ *mod.* q^{σ}, $\varepsilon = 1, 2, \cdots, \sigma - 1$); *Charakter* $\left(\frac{s_0}{q}\right)$, *wenn* $q \equiv 3$ *mod.* 4; $\left(\frac{s_0}{\nu_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}}$ *oder* $\left(\frac{s_0}{\varrho_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}}$ *mod.* q, *wenn* $q \equiv 1$ *mod.* 4;

γ) $\frac{q+1}{2}\,q^{2\sigma-1}$ $\sigma\,(II)$, $\left(\frac{\Pi}{q}\right) = 1$;

δ) $\frac{q-1}{2}\,q^{2\sigma-1}$ $\sigma\,(III)$, $\left(\frac{\Pi}{q}\right) = -1$.

Die Cyclen von E sind (wenige Ausnahmen für $q = 3$ abgerechnet) Untergruppen der Cyclen von G, jene von E_2 Untergruppen der Cyclen von E u. s. f. Allgemein ist ein Cyclus σ von E_τ in q^2 Cyclen $\sigma + 1$ von $E_{\tau-1}$ enthalten.

III.

Die Gruppen (σ, σ) und (σ, σ').

Von grosser Wichtigkeit ist jetzt die Aufstellung der Untergruppen von E. Von diesen Gruppen werden indes hier nur diejenigen studirt, welche mit der E_{n-1} entweder eine cyclische Gruppe G_q oder eine (aus $q + 1$ G_q bestehende) Gruppe G'_{q^2} gemeinsam haben. Die übrigen Gruppen enthalten die ganze E_{n-1}, gehören daher eigentlich einem kleineren Modul als q^n an.

1. Eine Grundlage für diese Untersuchung bilden die folgenden Sätze, welche den eigentlichen Kern der Arbeit ausmachen:

a) *Die Untergruppen von E, welche nur 1 G_q von E_{n-1} enthalten, sind Cyclen.*

b) *Die Untergruppen von E, welche nur 1 G'_{q^2} von E_{n-1} enthalten, können sämmtlich durch je 2 Substitutionen*[1]) $U = \varphi\,(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ *und* $U' = \varphi\,(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$ *erzeugt werden, für welche* n i c h t *die Bedingung*

$$(11) \qquad \mu : \nu : \varrho \equiv \mu' : \nu' : \varrho' \text{ mod. } q$$

---

1) Selbstverständlich ist angenommen, dass nicht gleichzeitig $\mu \equiv \nu \equiv \varrho \equiv 0$ oder $\mu' \equiv \nu' \equiv \varrho' \equiv 0$ mod. q ist.

existirt. Die Substitutionen $U^x\,U'^y (x = 0, 1, \cdots, q^{n-\tau}-1;$ $y = 0, 1, \cdots, q^{n-\tau'}-1)$ *sind dann sämmtlich von einander verschieden und bilden alle Substitutionen der erzeugten Gruppe. Letztere hat also die Ordnung* $q^{\sigma+\sigma'}$, *wenn* $\sigma = n - \tau$ *und* $\sigma' = n - \tau'$ *gesetzt wird.*

Es sollen diese Gruppen der Ordnung $q^{\sigma+\sigma'}$ kurz mit (σ, σ') bezeichnet werden.

c) *Zwei Substitutionen* $U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$, $U' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$ *(nach den Angaben von (C) angenommen) bilden immer eine Gruppe* (σ, σ'), *wenn* $\tau + \tau' \geqq n$, *also* $\sigma + \sigma' \leqq n$ *ist. Ist hingegen* $\tau + \tau' < n$, *also* $n - \tau - \tau' = b$ *eine positive ganze Zahl, so ist dies dann und nur dann der Fall, wenn*

$$(12)\qquad S = T^2 - \Pi \cdot \Pi' = \mu''^2 + \nu''\varrho'' \equiv 0 \text{ mod. } q^\lambda$$

ist. Hierbei hat man:

$$(13)\quad T = \mu\mu' + \frac{\nu\varrho' + \nu'\varrho}{2}, \quad \Pi = \mu^2 + \nu\varrho, \quad \Pi' = \mu'^2 + \nu'\varrho';$$

$$\mu'' = \frac{\nu\varrho' - \nu'\varrho}{2}, \quad \nu'' = \mu\nu' - \mu'\nu, \quad \varrho'' = \varrho\mu' - \varrho'\mu.$$

In einer leicht zu erkennenden einfachen Beziehung zu den Substitutionen $\omega' = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ und $\omega' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$, stehen die quadratischen Formen:

$$(14)\quad \varrho\omega^2 - 2\mu\omega - \nu \text{ mod. } q^\sigma; \quad \varrho'\omega^2 - 2\mu'\omega - \nu' \text{ mod. } q^{\sigma'}.$$

Es ist nun Π die Discriminante der ersten Form, Π' die der zweiten, während $2T$ die simultane Invariante der beiden Formen darstellt. Daher bleiben diese 3 Grössen erhalten, wenn man die U, U' in Bezug auf die Substitutionen von G transformirt.

d) *Bilden* $\varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ *und* $\varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$ *eine Gruppe* (σ, σ'), *wobei* $\sigma' \geqq \sigma$ *und* $\eta = \sigma' - \sigma$ *gesetzt sein soll, so sind alle Substitutionen dieser* (σ, σ') *durch*

$$(15)\qquad \varphi(x\mu' + y\mu q^\eta, \;\; x\nu' + y\nu q^\eta, \;\; x\varrho' + y\varrho q^\eta)_{\tau'}$$

gegeben, wo x *alle Reste mod.* $q^{\sigma'}$, y *alle Reste mod.* q^σ *beschreibt.*

Diese eben für die Gruppe E aufgestellten Resultate lassen sich für $q > 3$ ohne Abänderung auf die Gruppe F[1]) übertragen, welche dadurch entsteht, dass man zu E noch die Substitution

1) Diese Gruppe F ist keineswegs ausgezeichnete Untergruppe von G, vielmehr ist sie mit $q + 1$ Gruppen gleichberechtigt.

$\omega' \equiv \omega + 1$ mod. q^n hinzunimmt. Dies ist jedoch für $q = 3$ nicht mehr der Fall. Der Grund hiervon liegt wieder in der schon oben besprochenen Ausnahmestellung der Cyclen Γ_3^ε und Γ_3. Im Falle $q = 3$ gelten die oben angegebenen Sätze nur für jene Untergruppen von F, welche keinen Cyclus Γ_3 bez. Γ_3^ε enthalten. Die Gruppen mit einer solchen cyclischen Gruppe sind besonders zu behandeln.

2. Von besonderem Interesse sind unter den Gruppen (σ, σ') wider diejenigen, für welche $\sigma' = \sigma$ ist, welche also mit (σ, σ) zu bezeichnen sind. Diese stehen in einer bemerkenswerthen Beziehung zu den cyclischen Gruppen, welche sich in folgendem Satze ausspricht:

Die Substitutionen von G, welche die Gruppe $(\sigma, \sigma) = [\varphi(\mu, \nu, \varrho)_T, \varphi(\mu', \nu', \varrho')_T]$ *in sich transformiren, transformiren zugleich den Cyclus* $U'' = \varphi(\mu'', \nu'', \varrho'')_T$ *in sich und umgekehrt.* Die Bedeutung von μ'', ν'', ϱ'' siehe Gleichung (13).

Hierdurch werden die Gruppen (σ, σ) und die Cyclen (σ) in einer durch Transformation unzerstörbaren Weise aufeinander bezogen, sodass gleichberechtigten (σ, σ) auch gleichberechtigte σ entsprechen und umgekehrt. Die Classification der Gruppen (σ, σ) ist dadurch auf jene der Cyclen σ zurückgeführt.

Noch in einer andern Hinsicht ist der eben angegebene Satz von Interesse. Er zeigt nämlich für die Gruppen (σ, σ) die eigentliche Bedeutung der Grösse S, die in Gleichung (12) auftritt. Diese ist hiernach nichts anderes, als die charakteristische Grösse Π'' der cyclischen Gruppe σ, welche zu der Gruppe (σ, σ) gehört.

3. Etwas umständlicher hat sich die Aufstellung der Gruppen (σ, σ'), $\sigma' > \sigma$ gestaltet. Ich habe hierbei den folgenden Weg eingeschlagen.

Zunächst ist klar, dass jede (σ, σ'), $\sigma' > \sigma$ eine Gruppe (σ, σ) als ausgezeichnete Untergruppe enthält. Die Gruppen (σ, σ) können also erzeugt werden, indem zu jeder (σ, σ) die »passenden« Cyclen σ' hinzugenommen werden. Als passend ist ein Cyclus σ' dann zu bezeichnen, wenn er eine cyclische Gruppe σ der Gruppe (σ, σ) in sich enthält und die Bedingung (c, s. Gleichung 12) erfüllt ist. Beide Bedingungen sind übrigens sehr leicht zu befriedigen.

Man geht nun von einer bestimmten (σ, σ) aus. Zu ihr gehört eine Gruppe W, die alle jene Substitutionen von G in sich enthält, welche die (σ, σ) in sich transformiren. Man transformirt jetzt die passenden Substitutionen σ' in Bezug auf alle Substitutionen von W, so ordnen sich dieselben zu Gattungen von »relativ gleichberechtigten Cyclen« zusammen, wo eine Gattung aus allen jenen Cyclen σ' besteht, welche relativ gleichberechtigt sind, d. h. welche durch Transformation in Bezug auf eine Substitution von W aus einander abgeleitet werden können. Wesentlich ist hierbei die Aufstellung von »Charakteren«. Es sind darunter solche Functionen von μ, ν, ϱ gemeint, welche bei den oben genannten Transformationen ungeändert bleiben, welche daher sämtlich für den einen Cyclus dieselben Werthe haben, wie für den anderen, sobald diese 2 Cyclen relativ gleichberechtigt sind. Ein volles System von Charakteren hat man, wenn man umgekehrt aus der Gleichheit der Charaktere auf die relative Gleichberechtigung der entsprechenden Cyclen schliessen kann.

Es ist nunmehr klar, dass man gleichberechtigte (σ, σ') mit gemeinsamer (σ, σ) erhält, wenn man zur (σ, σ) relativ gleichberechtigte σ' hinzunimmt und dass umgekehrt gleichberechtigte (σ, σ') mit gemeinsamer (σ, σ) nothwendig relativ gleichberechtigte Cyclen σ' enthalten müssen. Um die Zahl z der zu einer gegebenen (σ, σ') gleichberechtigten Gruppen mit derselben (σ, σ) zu finden, hat man also dann nur mehr abzuzählen, wie viele σ' von derselben Gattung dieselbe enthält, eine Aufgabe, die in jedem gegebenen Falle sehr einfach ist. Ist ferner die Zahl der gleichberechtigten (σ, σ) mit t bezeichnet, so hat man offenbar tz gleichberechtigte (σ, σ').

IV.

Die übrigen nicht-cyclischen Gruppen.

Die Aufstellung der nicht-cyclischen Gruppen von G bietet jetzt nach Erledigung der Gruppen von E und F keinerlei Schwierigkeit mehr. Es ist bei Durchführung dieser Aufgabe wohl am zweckmässigsten, 3 Arten von Gruppen zu unterscheiden, nämlich

a) Gruppen, welche *keine* Substitution (die Identität ausgenommen),

b) Gruppen, welche eine cyclische Gruppe,
c) Gruppen, welche eine (σ, σ) oder (σ, σ') mit E gemeinsam haben.

1. Die Gruppen des ersten Falles sind offenbar im allgemeinen zu denjenigen Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Transformationsgrad q holoëdrisch isomorph, deren Ordnungen nicht durch q theilbar sind. Es sind dieses (ausser Cyclen) nur Doppelpyramidengruppen, Tetraëdergruppen, ferner Ikosaëdergruppen für $q \equiv \pm 1$ mod. 5, Oktaëdergruppen für $q \equiv \pm 1$ mod. 8. Nur im Falle $q = 3$ findet wieder eine Ausnahme statt. Es gibt nämlich für diesen Fall stets Gruppen (der ersten Art), welche zur Galois'schen Gruppe der Modulargleichung für 3, also zur Tetraëdergruppe holoëdrisch isomorph sind.

2. Die Gruppen des 2. und 3. Falles, sowie die Ausnahmegruppen des Falles $q = 3$ lassen sich wieder in derselben Weise aufstellen, wie dies bei den Gruppen (σ, σ') geschehen ist. Es sind nämlich die enthaltenen Gruppen σ bez. (σ, σ) oder (σ, σ') wieder ausgezeichnete Untergruppen der betrachteten Gruppe. Die rechnerischen Details sind dabei durchaus sehr einfach.

V.

Die homogenen linearen Substitutionen.

Die für die gebrochenen linearen Substitutionen gewonnenen Resultate lassen sich sogleich auf die *homogenen* Substitutionen übertragen. Bezeichnet man die ganzzahlige Substitution

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

durch

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

so sind die Substitutionen der Gruppe G' der homogenen Substitutionen durch

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mod. } q^n$$

dargestellt, wo α, β, γ, δ alle möglichen ganzen Zahlen mod. q^n der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$ mod. q^n beschreiben.

Man sieht nun leicht, *dass* ($q > 2$ vorausgesetzt)

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die einzige Substitution der Periode 2 ist, die in G' vorkommt. Daher enthält G' die cyclische Gruppe (ε) *der Ordnung 2 als ausgezeichnete Untergruppe.*

Hieraus ergeben sich sogleich die folgenden Sätze:

Jeder Gruppe von G mit gerader Ordnung o entspricht eine Gruppe von G' mit der Ordnung $2o$. Dagegen entspricht einer Gruppe von G mit ungerader Ordnung o sowohl eine Gruppe von G' mit der Ordnung o, als auch eine solche mit der Ordnung $2o$. Insbesondere erkennt man, dass die Gruppe G' keine Untergruppe enthält, welche zu einer Doppelpyramidengruppe, zu einer Tetraëder-, Oktaëder- oder Ikosaëdergruppe oder zur Gruppe G selbst holoëdrisch isomorph ist.

G. **Morera**, *Zur Transformation und Theilung der elliptischen Functionen.* (Vorgelegt von *F. Klein.*)

In seiner Note: »Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe«[1]) hat Herr Klein das Problem der n-Theilung und das damit eng verbundene Problem der Transformation n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen für alle durch 3 nicht theilbare ungerade Zahlen n auf die Bestimmung gewisser Moduln n^{ter} Stufe zurückgebracht, die er mit den Buchstaben

$$A_0\,;\quad z_1\,,\ z_2\,,\ \cdots\ z_{\frac{n-1}{2}}$$

bezeichnet. Hier ist

$$A_0 = \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$$

und kann dementsprechend als Wurzel einer mehrfach untersuchten Multiplicatorgleichung berechnet werden, worauf aus wohlbekannten gruppentheoretischen Principien folgt, dass die fernere Bestimmung der $z_1, \cdots z_{\frac{n-1}{2}}$ nur noch Wurzelzeichen erfordert. Ich werde im Folgenden zeigen, wie man die Grössen, aus denen die betreffenden Wurzeln zu ziehen sind, im Falle eines primzahligen n ($n > 3$) berechnen kann.

Möge es vorab gestattet sein, den Zusammenhang der Substitutionsgruppe, welche Herr Klein l. c. für die z_α angegeben hat, mit derjenigen Gruppe darzulegen, welche ich im 25ten Bande der Mathematischen Annalen[2]) allgemein für Grössen,

---

[1]) cf. diese Berichte, Sitzung vom 14. November 1884.

[2]) *Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen;* vergl. insbesondere p. 210 daselbst.

die ich B_α nannte, aufgestellt habe. Ich theilte dort das Verhalten der B_α bei drei fundamentalen Operationen, die ich S, U_a, T nannte, mit. Um mit den Angaben von Herrn Klein Uebereinstimmung zu erzielen, muss man statt ihrer drei andere, gleichberechtigte Operationen in Betracht ziehen:

$$TST^{-1}, \quad TU_aT^{-1}, \quad TTT^{-1} = T$$

und diese (wie es im Folgenden durchweg geschehen soll) mit S, U_a, T bezeichnen, man muss ferner die unbestimmt gelassene Einheitswurzel ϱ so fixiren, dass $\varrho^{-2} = \varepsilon$ wird, wo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. In der That kommt dann, indem wir noch z_α für B_α schreiben:

$$(1)\quad \begin{cases} (z_\alpha)\, S = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} \cdot z_\alpha, \\ (z_\alpha)\, U_a = \left(\frac{a}{n}\right) \cdot z_{\alpha a}, \\ i^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt{n} \cdot (z_\alpha)\, T = \sum_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\mu} - \varepsilon^{-\alpha\mu})\, z_\mu, \end{cases}$$

wo der Index αa modulo n zu nehmen und mit Berücksichtigung der Bedingung

$$(2)\qquad z_\alpha = -z_{n-\alpha}$$

auf seinen kleinsten Rest zu reduciren ist.

Ich verabrede fernerhin noch die folgende Ausdrucksweise. Die Gruppe der $n\,(n-1)$ Operationen

$$S^\nu U_a$$

will ich kurz die *metacyclische*, die in ihr enthaltene Untergruppe von $\frac{n \cdot n-1}{2}$ Operationen

$$S^\nu U_{a^2}$$

die *halbmetacyclische* Gruppe nennen und diese Ausdrucksweise auf die Functionen übertragen, welche bei den betreffenden Gruppen ungeändert bleiben. Die Grösse A_0 ist dann halbmetacyclisch, ihr Quadrat metacyclisch. Alle halbmetacyclischen Functionen sind durch g_2, g_3 und A_0, alle metacyclischen durch g_2, g_3 und A_0^2 rational darstellbar.

§ 1. Allgemeines über die folgenden Entwickelungen.

Der Plan der vorliegenden Untersuchung ist selbstverständlich der folgende: aus den z_α eine hinreichende Anzahl von metacyclischen oder halbmetacyclischen Functionen zu bilden, durch welche man rückwärts die z_α mit Hülfe von Wurzelzeichen berechnen kann, — und dann die betreffenden Functionen durch g_2, g_3 und A_0^2, bez. A_0, rational darzustellen.

Eine erste hierher gehörige Formel hat bereits Herr Klein l. c. mitgetheilt; dieselbe lautet[1]:

$$(3)\qquad z_1 z_2 \cdots z_{\frac{n-1}{2}} \cdot \Delta^{\frac{n^2-1}{24}} = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{n} \cdot A_0^{\frac{n-3}{2}} .$$

Im Falle $n = 5$ reicht diese Relation, mit den bekannten invarianten Ikosaëderformen combinirt, zur Bestimmung aller halbmetacyclischen Functionen aus. Insbesondere berechnen wir aus ihr z_1^{10}, z_2^{10}, worauf die Berechnung von z_1 oder z_2 selbst, wie es die Theorie verlangt, durch eine zehnte Wurzel erfolgt. Dagegen erscheint es schwierig, in höheren Fällen ein ähnliches Verfahren durchzuführen. *Ich kehre also weiterhin, was die Auswahl der metacyclischen oder halbmetacyclischen Functionen der z_α betrifft, zu den bekannten Ausdrücken von Lagrange zurück, die man auch sonst der Theorie der höheren Gleichungen zu Grunde zu legen pflegt.*

Zugleich gestatte ich mir noch die weitere Aenderung, dass ich A_0 durch seinen reciproken Werth, den ich D_∞ nennen will, ersetze. Dieser reciproke Werth ist nämlich, wie bekannt, von den Zahlencoëfficienten abgesehen *eine ganze algebraische Grösse des Rationalitätsbereiches* (g_2, g_3), und durch diesen Umstand wird die spätere Rechnung wesentlich erleichtert. Uebrigens haben wir für D_∞ und die aus ihm durch lineare Transformation der Perioden entspringenden Grössen

$$D_0,\ D_1,\ \cdots\ D_{n-1}$$

in Uebereinstimmung mit der Angabe auf p. 207 des 25ten Bandes der Math. Annalen folgende Umwandlungstabelle:

[1]) Vergl. diese Berichte, Sitzung vom 4. März 1885.

$$(4)\quad \begin{cases} (D_\mu)\,S = D_{\mu+1}, \quad [\mu = \infty, 0, \cdots (n-1)], \\ (D_\mu)\,U_a = \left(\frac{a}{n}\right) \cdot D_{\frac{\mu}{a^2}}, \\ (D_\infty)\,T = D_0, \ (D_0)\,T = \left(\frac{-1}{n}\right) \cdot D_\infty, \ (D_l)\,T = \left(\frac{l}{n}\right) D_{-\frac{1}{l}}, \\ \qquad [l = 1, 2, \ldots (n-1)]. \end{cases}$$

§ 2. Ueber das Verhalten der in Betracht kommenden Grössen in den Grenzpuncten der ω-Ebene.

Der weiteren Untersuchung hat eine Betrachtung der Grenzpuncte der ω-Ebene vorauszugehen, d. h. derjenigen Puncte, denen reelle rationale Werthe von ω, oder der Werth $\omega = i\infty$, entsprechen. Was zunächst den Punkt $\omega = i\infty$ angeht, so haben wir die folgenden, nach

$$q = e^{\frac{i\pi\omega_2}{\omega_1}}$$

fortschreitenden Reihenentwickelungen:

$$(5)\quad \begin{cases} g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20\,(q^2 + 9\,q^4 + \cdots)\right], \\ g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6 \left[\frac{1}{216} + \frac{7}{3}(-q^2 - 33\,q^4 - \cdots)\right], \\ \varDelta = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} \cdot q^2 \cdot \{1 - q^2 - q^4 \cdots\}^{24}, \\ D_\infty = \dfrac{\varDelta^{\frac{n-1}{24}} \cdot \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda \cdot q^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}}{\sqrt{n} \cdot \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda \cdot q^{\frac{n(6\lambda+1)^2}{12}}}, \\ z_\alpha = (-1)^\alpha \cdot \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{i} \cdot \dfrac{\sum\limits_0^\infty (-1)^\lambda \left\{ q^{\frac{[(2\lambda+1)n-2\alpha]^2}{4n}} - q^{\frac{[(2\lambda+1)n+2\alpha]^2}{4n}} \right\}}{\left\{ \sum\limits_0^\infty (-1)^\lambda \cdot (2\lambda+1) \cdot q^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}} \right\}^n}, \end{cases}$$

und also für die Umgebung des Punctes $\omega = i\infty$ in erster Annäherung folgende Darstellung unserer Functionen:

$$
(6) \quad \begin{cases}
(g_2)_\infty = \frac{1}{12}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^4, \\
(g_3)_\infty = \frac{1}{216}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6, \\
(\Delta)_\infty = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} \cdot q^2, \\
(D_\infty)_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{\frac{n-1}{2}}, \\
(z_\alpha)_\infty = (-1)^\alpha \cdot \frac{\sqrt{n}}{i} \cdot \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot q^{\frac{-\alpha(n-\alpha)}{n}}.
\end{cases}
$$

Was die anderen Grenzpuncte angeht, so entstehen sie alle aus $\omega = i\infty$ durch Anwendung geeigneter linearer Transformationen der Perioden. Wir werden also das Verhalten unserer Functionen in ihrer Nähe beurtheilen, *indem wir umgekehrt diejenigen Ausdrücke, welche aus unseren Functionen durch irgendwelche lineare Transformation der Perioden entstehen, in der Umgebung von $\omega = i\infty$ betrachten.*

In diesem Sinne treten den Formeln (6) beispielsweise die folgenden an die Seite:

$$
(7) \quad \begin{cases}
[(D_\infty)T]_\infty = i^{-\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot q^{\frac{n^2-1}{12n}}, \\
[(z_\alpha)T]_\infty = i^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}\alpha} - \varepsilon^{-\frac{n-1}{2}\alpha}\right) \cdot \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot q^{-\frac{n^2-1}{4n}}.
\end{cases}
$$

Ich unterlasse es, die anderen Formeln herzusetzen, welche entstehen, wenn man statt T die sonstigen Operationen TS^k etc. in Anwendung bringt. Bemerken wir übrigens, dass unsere Grössen D_∞ und z_α nirgendwo sonst Null oder Unendlich werden, als in den Grenzpuncten der ω-Ebene. Bei D_∞ ist sogar der Werth Unendlich überhaupt ausgeschlossen.

§ 3. Ueber das Differenzenproduct der Grössen C.

Die Gleichung $(2n+2)^{\text{ten}}$ Grades, welcher D_∞ unter Voraussetzung eines primzahligen n (> 3) genügt, ist bekanntlich eine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades für die Grösse D_∞^2, die ich hier, wie in Band XXV der Mathematischen Annalen, mit C_x

bezeichnen will. Ich werde nun den wichtigen Satz beweisen:

Das Differenzenproduct der Grössen

$$C_\infty\,,\ C_0\,,\ \cdots\cdots C_{n-1}$$

ist eine ganze rationale Function von g_2, g_3, *welche eine bestimmte Anzahl von Malen den Factor* Δ *enthält.*

Indem wir das in Rede stehende Differenzenproduct mit ∇ bezeichnen, haben wir:

$$(8)\qquad \nabla = \begin{vmatrix} C_\infty^n & C_\infty^{n-1} & \cdots\cdots & C_\infty & 1 \\ C_0^n & C_0^{n-1} & \cdots\cdots & C_0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n-1}^n & C_{n-1}^{n-1} & \cdots\cdots & C_{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Wir haben zunächst zu zeigen, dass sich ∇ bei den Operationen S, T und also überhaupt bei linearer Transformation der Perioden nicht ändert. Dies ist bei S sofort deutlich, denn der Formel (4) zufolge vertauschen sich bei der Operation S die Indices $0, 1, \cdots (n-1)$ der C cyclisch, was auf den Werth von ∇ ohne Einfluss ist. Was T angeht, so unterscheide man, ob $(n+1)$ oder $(n-1)$ durch 4 theilbar ist. Im ersteren Falle hat die Congruenz $e^2 \equiv -1 \pmod{n}$ keine Wurzeln, der Operation T entsprechen also, der Formel (4) zufolge, $\frac{n+1}{2}$ Transpositionen zweier Horizontalreihen von ∇. Im zweiten Falle finden wir zwei Wurzeln der genannten Congruenz; es bleiben also zwei Horizontalreihen von ∇ bei T ungeändert und wir haben nur $\frac{n-1}{2}$ Transpositionen zweier Horizontalreihen. *Die Anzahl der Transpositionen ist hiernach allemal gerade*, was eben darauf hinauskommt, dass ∇ bei T ungeändert bleibt, w. z. b. w. — Wir beachten ferner, dass ∇, nach der Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen, nirgendwo unendlich wird. Hieraus aber und aus der Unveränderlichkeit von ∇ bei linearen Transformationen der Perioden schliessen wir in bekannter Weise[1]), *dass* $\triangle$

---

[1]) Siehe hier und in der Folge: Hurwitz in Band 18 der Mathematischen Annalen, p. 555.

eine ganze rationale Function von g_2, g_3 ist, was den ersten Theil unserer Behauptung ausmacht.

Es gilt jetzt, die Form der ganzen Function zu bestimmen, der ∇ gleich ist. Als Dimensionen derselben in ω_1, ω_2 finden wir sofort

$$-n\cdot\frac{n^2-1}{2}.$$

Nun zeigt aber Formel (6) und (7), dass ∇ für $\omega = i\infty$ wie

$$q^{\frac{(n-1)(n^2-1)}{12}}$$

verschwindet. Wir schliessen hieraus, dass es durch

$$\varDelta^{\frac{(n-1)(n^2-1)}{24}}$$

theilbar sein muss. *Daher haben wir schliesslich:*

$$(9)\qquad \nabla = \varDelta^{\frac{n-1\,.\,n^2-1}{24}}\cdot G_{\frac{n^2-1}{4}},$$

wo G eine ganze rationale Function von g_2, g_3 ist, die nicht mehr durch $\varDelta$ theilbar ist. Wir werden setzen:

$$(10)\qquad G_{\frac{n^2-1}{4}} = \sum c_{\lambda\mu}\, g_2^{\lambda}\, g_3^{\mu},$$

wo λ, μ alle positiven Zahlenpaare zu durchlaufen haben, für welche

$$2\lambda+3\mu=\frac{n^2-1}{4}$$

ist. Die hier auftretenden Constanten $c_{\lambda\mu}$ müssen wir uns — wie auch später in den analogen Formeln — in der Weise berechnet denken, dass wir in (9) die Reihenentwickelungen (5) eintragen und beide Seiten der entstehenden Gleichung vergleichen.

§ 4. Erweiterung des oben bewiesenen Satzes.

Der gerade, betreffs der Determinante ∇ bewiesene Satz kann folgendermassen verallgemeinert, bez. modificirt werden. Wir denken uns die Terme irgend einer Verticalreihe von ∇:

$$C_\infty^k, C_0^k, C_1^k, \ldots\ldots C_{n-1}^k$$

durch

$$\chi, (\chi)T, (\chi)TS \ldots . (\chi)TS^{n-1}$$

ersetzt, wo λ irgend eine metacyclische Function sein soll, die nur in den Grenzpuncten der ω-Ebene unendlich wird. Die so veränderte Determinante nenne ich $\nabla_k[\chi]$. *Offenbar ist* $\nabla_k[\chi]$ *gleich einer ganzen rationalen Function von* g_2, g_3 *von angebbarem Grade, jedesmal getheilt durch eine von vornherein erkennbare ganze Potenz von* Δ. Die Berechnung der im Zähler auftretenden ganzen Function der g_2, g_3 kann wieder mit Hülfe der Reihenentwickelungen nach q erfolgen, selbstverständlich unter der Voraussetzung, dass wir die Entwickelungen von χ, $(\chi)T$ etc. kennen.

§ 5. Bestimmung der z_α im Falle $n \equiv -1$ (mod. n).

Auf Grund der in §§ 3, 4 gegebenen Hülfssätze, bez. unter der Annahme, dass man die bei ihnen postulirte Berechnung gewisser Constanten durchgeführt habe, gestaltet sich jetzt die Bestimmung der z_α sehr einfach.

Sei zunächst $n \equiv -1$ (mod. n). Es ist dann (-1) Nichtrest, und da bei der Operation U_{-1} jedes z_α in $\left(\frac{-1}{n}\right) . z_{-\alpha}$ übergehen soll, $z_{-\alpha}$ aber gleich $-z_\alpha$ ist, so bleibt z_α bei der Operation U_{-1} ungeändert. Hierin liegt es, dass in diesem Falle jede halbmetacyclische Function der z_α immer auch metacyclisch ist. Hierin liegt weiter, dass es gestattet ist, die $\frac{n-1}{2}$ Grössen z_α in der Weise aufzuzählen, dass man den Index α alle zu n gehörigen Reste durchlaufen lässt, ihm also folgende Werthe ertheilt:

$$1, g^2, g^4, \cdots ; g^{n-3},$$

unter g eine Primitivwurzel modulo n verstanden.

Ich bilde mir nun folgende halbmetacyclische und also metacyclische Functionen der z_α:

$$(11)\quad \varphi_\mu = \left[\sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta^\alpha . z_{g^{2\alpha}}^n\right]^{\frac{n-1}{2}-\mu} . \left[\sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta^{\alpha\mu} . z_{g^{2\alpha}}^n\right] . \nabla,$$

$$\left(\mu = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}\right),$$

wo ϑ eine primitive $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{te}}$ Einheitswurzel bezeichnen soll und ∇ das Differenzenproduct des § 3 vorstellt. Offenbar lassen sich die z_α oder $z_{g^{2\alpha}}$, sobald die φ_μ bekannt sind, sehr leicht berechnen. In der That ist:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{n-1}{2}} \vartheta^{\alpha\mu} \cdot z^n_{g^{2\alpha}} = \frac{\varphi_\mu}{\varphi_1} \cdot \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\frac{\varphi_1^\mu}{\nabla^\mu}},$$

woraus folgt:

$$(12) \qquad z_{g^{2\alpha}} = \sqrt[n]{\frac{2}{(n-1)\cdot\varphi_1} \cdot \sum_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \varphi_\mu \cdot \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\frac{\varphi_1^\mu}{\nabla^\mu}} \cdot \vartheta^{-\alpha\mu}}.$$

Alles kommt jetzt darauf an, die Functionen φ_μ durch die bekannten Grössen auszudrücken. Dies aber wird sofort durch den Satz des § 4 geleistet. Wir haben nämlich, indem wir die dort eingeführte Bezeichnungsweise aufnehmen:

$$(13) \qquad \varphi_\mu = \sum_{k=0}^{n} \nabla_k \left[\frac{\varphi_\mu}{\nabla}\right] \cdot D_\infty^{2k}.$$

Es gilt nur noch den Grad der ganzen Function von g_2, g_3 und die Potenz von ∇ anzugeben, welche bei der Auswerthung der vorkommenden ∇_k entstehen. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass sich die Functionen $\frac{\varphi_\mu}{\nabla}$ in der Nähe von $\omega = i\infty$ wie folgende Ausdrücke verhalten:

$$q^{-\left(\frac{n+1}{2}-\mu\right)\cdot\frac{n^2-1}{4}}.$$

Daher sind diejenigen Glieder in der Entwickelung von $\nabla_k\left(\frac{\varphi_\mu}{\nabla}\right)$, die für $\omega = i\infty$ am stärksten unendlich werden, durch folgende Potenz von q bezeichnet:

$$q^{-\frac{n^2-1}{4}\left(\frac{n+1}{2}-\mu\right)+\frac{n-1\,.\,n^2-1}{12}-k\,.\,\frac{n^2-1}{6n}}.$$

Nun kann aber ∇_k nur wie eine ganze negative Potenz von Δ unendlich werden. Bezeichnen wir daher durch

$$\left[k \cdot \frac{n^2-1}{12n}\right]$$

die grösste ganze Zahl, welche in $k \cdot \frac{n^2-1}{12n}$ enthalten ist, so haben wir jedenfalls diesen Satz: *dass*

$$(14)\quad \nabla_k\left[\frac{\varphi_\mu}{\nabla}\right] \cdot \Delta^{\frac{n^2-1}{8}\left(\frac{n+1}{2}-\mu\right)-\frac{n-1}{24}\cdot n^2-1+\left[k\cdot\frac{n^2-1}{12n}\right]}$$

eine ganze Function von g_2, g_3 ist. Den Grad dieser ganzen Function finden wir gleich:

$$k(n-1)-12\left[\frac{k(n^2-1)}{12n}\right]-\frac{3n^2-2n-5}{4}+\mu\frac{n-3}{2},$$

worauf wir die Function nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten berechnen. Hiermit sind dann, wie wir bereits ausführten, die z_α selbst gefunden.

§ 6. Bestimmung der z_α im Falle $n \equiv 1$ (mod. n).

Was die Berechnung der z_α im Falle $n \equiv 1$ (mod. n) angeht, so werden wir im Wesentlichen dieselben Principien verwenden. Es sei jetzt Θ eine primitive $\left(\frac{n-1}{4}\right)^{\text{te}}$ Einheitswurzel. Ich stelle dann zunächst folgende Functionen auf:

$$(15)\quad \psi_\nu = \left[\sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{4}} \Theta^\alpha \cdot z_{g^{2\alpha}}^{2n}\right]^{\frac{n-1}{4}-\nu} \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{4}} \Theta^{\alpha\nu} \cdot z_{g^{2\alpha}}^{2n}\right] \cdot \nabla,$$

$$\left(\nu = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{4}\right).$$

Da $g^{\frac{n-1}{2}}$ in unserem Falle mit (-1) congruent ist, so ist

$$z_{g^{2\cdot\frac{n-1}{4}}}^{2n} = z_1^{2n}$$

und unsere Functionen sind halbmetacyclisch. Gleichzeitig erkennt man, dass sie nur die Hälfte der $\frac{n-1}{2}$ Grössen z_α enthalten, nämlich diejenigen, deren Index mit einem quadratischen Reste modulo n congruent ist [was jetzt, wo $n \equiv 1$ (mod. 4) für α und $-\alpha$ immer gleichzeitig eintritt oder nicht eintritt]. Daher werden wir neben den Functionen (15) noch die anderen betrachten müssen, welche aus (15) durch die Operation U_g hervorgehen:

$$(16)\quad \psi_\nu' = (\psi_\nu) U_g = \left[\sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{4}} \Theta^\alpha . \sqrt[2n]{z_{g^{2\alpha+1}}}\right]^{\frac{n-1}{4}-\nu} \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{4}} \Theta^{\alpha\nu} . \sqrt[2n]{z_{g^{2\alpha+1}}}\right] \cdot \nabla .$$

Jedenfalls berechnen wir die $z_{g^{2\alpha}}$, $z_{g^{2\alpha+1}}$ aus den ψ_ν, ψ_ν' genau so, wie wir vorhin (Formel 12) die dort in Betracht kommenden $z_{g^{2\alpha}}$ aus den φ_μ berechnet haben. Aber auch die Bestimmung der ψ_ν, ψ_ν' durch die bekannten Grössen kann in ganz ähnlicher Weise durchgeführt werden. *Wir werden nämlich zunächst die beiden Combinationen zu bestimmen suchen:*

$$(17)\qquad \psi_\nu + \psi_\nu' , \quad \frac{\psi_\nu - \psi_\nu'}{D_\infty} ,$$

die beide metacyclisch sind. Es erscheint überflüssig, dies noch in's Einzelne gehend auszuführen.

§ 7. Ueber die Zusammengehörigkeit gewisser Wurzeln.

Die in §§ 5 und 6 für die z_α gewonnenen Ausdrücke unterliegen noch insofern der Kritik, als man nicht weiss, wie die bei ihnen auftretenden n^{ten}, resp. $2n^{\text{ten}}$ Wurzeln zusammengehören. Aber diese Theorie kann leicht vervollständigt werden. In der That werde ich hier andeuten, wie man nach Auffindung einer ersten Grösse z_α die übrigen rational berechnen kann.

Wir setzen etwa z_1 als bekannt voraus. Dann ist $z_\alpha\, z_1^{\,n-(\alpha^2)}$, unter (α^2) den modulo n genommenen kleinsten Rest von α^2 verstanden, eine *cyclische* Function und also mit Hülfe von $z_1^{\,n}$ rational darstellbar. Ich will insbesondere $n \equiv -1 \pmod{4}$ voraussetzen und jetzt unter α das Quadrat einer bestimmten zu n gehörigen Primitivwurzel g verstehen. Ich schreibe dann

$$(18)\qquad z_\alpha\, z_1^{\,n-(\alpha^2)} = \sum_{\lambda=0}^{\frac{n^2-3}{2}} H_\lambda \,.\, z_1^{\,n\lambda}$$

und wende auf diese Gleichung der Reihe nach die Operationen an:

$$U_\alpha^{\,\mu}, \quad U_\alpha^{\,\mu}\, T S^k$$

$$\left(\mu = 0, 1, \cdots, \frac{n-3}{2};\ k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)\right).$$

So entstehen $\frac{n^2-1}{2}$ Gleichungen, aus denen wir die Coëfficienten

$$H_0, \; H_1, \; H_2, \; \ldots .$$

unter der Form eines Quotienten zweier Determinanten berechnen können. Eine leichte Discussion zeigt dann, dass diese Determinanten bei allen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert bleiben und *dass sich dieselben in folgender Form darstellen lassen müssen:*

$$(19) \qquad \frac{G(g_2, g_3)}{\Delta^{\mu}},$$

wo μ eine bestimmte ganze Zahl und G eine ganze Function von g_2, g_3 von angebbarem Grade ist. — Hat man einmal die H_λ berechnet, so erfährt man die Werthe der verschiedenen z aus (18) und den anderen Gleichungen, die aus (18) durch die Operation $U_\alpha{}^\mu$ entstehen.

Für $n \equiv 1$ (mod. 4) muss die Formel (18) natürlich etwas modificirt werden. Wir werden dann schreiben:

$$(20) \qquad z_\alpha \, z_1{}^{n-(\alpha^2)} = \sum_{\lambda=0}^{n^2-2} K_\lambda \cdot z_1{}^{n\lambda},$$

wo nur diejenigen K_λ von Null verschieden sind, welche einen geraden resp. einen ungeraden Index besitzen, unter (α^2) eine gerade oder ungerade Zahl verstanden. Uebrigens bleiben die weiteren Ueberlegungen dieselben, da sich die K_λ wieder durch Quotienten zweier durch Formeln vom Typus (19) darstellbarer Determinanten müssen ausdrücken lassen.

SITZUNG AM 6. JULI 1885.

Walther Dyck, *Beiträge zur Analysis situs.* I. Mittheilung. (Vorgelegt von *F. Klein.*) Mit 1 lithogr. Tafel.

Die folgenden Untersuchungen handeln von *der Bestimmung der Grundzahl einer Fläche*[1]), welche aus beliebig vielen — berandeten oder geschlossenen — Theilen besteht, und bezwecken insbesondere, diese Bestimmung zu charakterisiren, falls jene Fläche durch analytische Daten gegeben vorliegt.

Die Bestimmung gründet sich auf ein, auf der Fläche gezeichnetes Curvensystem, von der Art, dass durch jeden Punkt eine und nur eine Curve des Systems hindurchgeht und nur in einer endlichen Zahl von Punkten mehrere — auch unendlich viele — Curvenzweige einmünden.

Der Gedanke, die Beziehungen der besonderen Punkte derartiger Curvensysteme zu der Grundzahl einer geschlossenen Fläche aufzusuchen, ist zuerst von Möbius in seiner »Theorie der elementaren Verwandtschaft«, in diesen Berichten Bd. 15, (1863) ausgeführt und es waren gerade dessen anschauliche und dem Wesen der Fragestellung angepasste Methoden, welche mich zu den vorliegenden Untersuchungen geführt haben. Und in der That trifft gerade diese Herleitung der Grundzahl das Wesen der Aufgabe, insofern durch ein solches Curvensystem gewissermassen der Werdeprocess der Fläche geschildert wird, ihr Wachsthum in schmalen Streifen, welche zwischen je zwei benachbarten Curven enthalten sind, wobei dann die Verwach-

1) Ich bediene mich hier der von Neumann eingeführten Bezeichnung für die wohl auch als »ausserordentlicher Zusammenhang« bezeichnete Zahl $G = z - 1 = 2p$, wo z den »Zusammenhang« im Riemannschen Sinne, p das »Geschlecht« der Fläche bezeichnet.

sungen, von denen ja die Grundzahl abhängt, jedesmal in den singulären Stellen des Curvensystems ihren Ausdruck findet.

Andeutungen über die gegenseitige Beziehung der besonderen Punkte eines derartigen Curvensystems finden sich wohl zuerst bei Gauss[1]), ferner hat Reech diese Beziehungen für die auf einer Kugel gezeichneten Curvensysteme aufgestellt[2]). In neuester Zeit ist von Klein[3]) auf die Möglichkeit ihrer allgemeineren Formulirung hingewiesen worden und insbesondere kommt Poincaré in seinen Untersuchungen »Sur les courbes définies par une équation différentielle«[4]) auf die Frage für Kugel und Kugelcalotte ganz in dem hier im ersten Abschnitte gegebenen Sinne[5]).

Im *Abschnitt I* ist *die geometrische Bestimmung der Grundzahl* einer Fläche in allgemeinster Weise gegeben. Diese Formulirung führt dann unmittelbar auch zu einer rechnerischen, auf die *analytische Darstellung* jener Fläche gegründeten, welcher der *Abschnitt II* gewidmet ist. Diese letztere Bestimmung aber zeigt *die unmittelbare Beziehung unserer geometrischen Fragestellung zu den allgemeinen Untersuchungen von Kronecker über die Characteristik eines Functionensystems*[6]), und führt so umgekehrt, wenigstens für specielle Fälle, zu einer neuen, anschauungsmässigen Deutung jener Characteristik[7]). Persönliche

---

1) Theorie des Erdmagnetismus.

2) Démonstration d'une propriété générale des surfaces fermées. Journal de l'école polytechnique. Cah. 37. 1858.

3) Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen und ihrer Integrale. Teubner 1882. pag. 39.

4) Journal de mathématiques 3e série, t. VII, VIII. 1881, 82.

5) Beim Abschluss dieser Mittheilung erhalte ich die Fortsetzung dieser Poincaré'schen Untersuchungen (im neuesten Hefte des Journal de mathématiques, 4e série, t. I), welche gleichfalls *die Ausdehnung auf Flächen von beliebiger Grundzahl enthält und in nicht wesentlicher Specialisirung Formeln* (pag. 203 ff. u. pag. 212), *aus welchen sich die von mir in* § 3 *gegebene, und für ein beliebiges irgendwie berandetes Flächenaggregat gültige Beziehung zusammenstellen lässt.* In Rücksicht auf ihre abgeschlossene Form, welche für die Entwicklungen des II. Abschnitts wesentlich ist, glaube ich aber doch auch diese geometrischen Darlegungen meines I. Abschnittes nicht unterdrücken zu sollen.

6) Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1869 u. 1878.

7) Man vergl. bezüglich des Zusammenhangs der Characteristikentheorie mit geometrischen Problemen hier noch besonders die Bemerkungen auf pag. 146 der Monatsberichte von 1878.

Unterredungen mit Herrn Kronecker haben mich wesentlich zu deren Ausführung angeregt. Indem ich auf eine allgemeine Darlegung bei einer anderen Gelegenheit eingehen will, ist hier im II. Abschnitte die analytische Darstellung speciell an den beiden Aufgaben ausgeführt: 1) Gegeben die Gleichung einer ebenen Curve $f = 0$; man bestimme die Grundzahl des Gebietes $f < 0$. 2) Gegeben die Gleichung $f = 0$ einer (geschlossenen) Fläche; man bestimme ihre Grundzahl. Für diese Aufgaben ergiebt sich die Grundzahl direct ausgedrückt durch die Characteristik des aus f und seinen ersten Ableitungen nach den Variabeln gebildeten Functionensystems, ein System, welches (bei n Variabeln) von Kronecker speciell in der Abhandlung vom August 1869 behandelt ist. Die dort für die geschlossene Fläche gegebene geometrische Deutung der Characteristik als »*Curvatura integra*« *im Gauss'schen Sinne zeigt dabei die Beziehung der letzteren zur Grundzahl einer Fläche*, welche, so natürlich sie sich (auch auf geometrischem Wege) ergiebt, bisher noch nicht beachtet zu sein scheint. Die Ausdehnung auf Gebiete von mehr Dimensionen, wie sie bei Kronecker eingeführt ist, giebt die Richtung, in welcher die hier vorliegenden geometrischen Fragen für höhere Räume aufzufassen sind. In der Behandlung der zweiten Aufgabe (vergl. pag. 323) ist Gelegenheit geboten, auf jene Sätze für einen dreidimensionalen Raum, wenigstens in einer speciellen Form hinzuweisen. Ich denke auf dieselben demnächst einzugehen.

Abschnitt I.

§ 1. Die Grundzahl einer »Fläche F«.

Es ist wohl zweckmässig, zur Einführung der gebrauchten Bezeichnungen kurz die *Definition der Grundzahl* eines Aggregates von beliebig berandeten und geschlossenen Flächenstücken — welches in der Folge kurz als »*Fläche F*« bezeichnet wird — vorauszuschicken, wie sie Neumann in seinen »Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale« gegeben hat[1]):

Für eine aus einem einzigen *berandeten* Stücke bestehende Fläche zunächst ist die Grundzahl gleich der um eins vermehrten Anzahl von »*Querschnitten*« (d. h. von Rand zu Rand geführten

1) Man vergleiche etwa auch Klein, Math. Annalen Bd. 21. pag. 152.

Schnitten), welche nothwendig sind, um die Fläche einfach berandet, und ohne Faltung und Zerreissung in die Ebene ausbreitbar zu machen. Daraus folgt: 1) Ziehen eines *Querschnittes* vermindert die Grundzahl um eins. 2) Anbringen einer *Oeffnung* im Innern der Fläche, eine Operation, welche die Definition der Grundzahl auf *geschlossene* Flächen auszudehnen gestattet, erhöht die Grundzahl um eins. 3) Ein in sich geschlossener Schnitt »*Rückkehrschnitt*«, als Combination von Operation 2 und 1, lässt die Grundzahl ungeändert.

Die Festsetzung, dass die erwähnten Zählungen gültig bleiben sollen, auch soferne die Fläche bei den Operationen 1 und 3 zerstückt wird, liefert sofort die Definition der Grundzahl G eines Aggregates von N beliebig berandeten und geschlossenen Flächenstücken, bez. von den Grundzahlen $g_1, g_2, \ldots g_N$ in der Formel:

$$G = \Sigma g_i - 2N + 2.$$

§ 2. Curvensystem S.

Unter einem *Curvensystem* S ist in der Folge stets ein beliebiges, auf der Fläche F gezeichnetes Curvensystem der Eingangs erwähnten Art verstanden. Jeder Punkt $\overset{i}{P}$ im Innern, $\overset{r}{P}$ auf dem Rande der Fläche sei bezeichnet nach der Zahl der von ihm auslaufenden Curvenzweige; wir gebrauchen also $\overset{i}{P}_0$ bez. $\overset{r}{P}_0$ als Symbol für einen isolirten Punkt, $\overset{i}{P}_1$ bez. $\overset{r}{P}_1$ für einen Punkt, in welchem eine Curve des Systems abbricht, sei es im Innern oder auf dem Rande, $\overset{i}{P}_2$ stellt einen gewöhnlichen Punkt im Innern der Fläche vor, von einem $\overset{r}{P}_2$ laufen zwei Zweige in das Innere der Fläche (z. B. bei einer Berührung einer Curve des Systems mit dem Rande), in $\overset{i}{P}_n$, $\overset{r}{P}_n$ münden n — mit n sei stets ein *endlicher* Index bezeichnet —, in $\overset{i}{P}_\infty$, $\overset{r}{P}_\infty$ unendlich viele Zweige des Systems S.

Nun seien die Punkte $\overset{i}{P}_n$, $\overset{r}{P}_n$, $\overset{i}{P}_\infty$, $\overset{r}{P}_\infty$ bez. in der Zahl $\overset{i}{p}_n$, $\overset{r}{p}_n$, $\overset{i}{p}_\infty$, $\overset{r}{p}_\infty$ auf der Fläche vorhanden, wobei $\overset{i}{p}_2$ und (falls die Fläche F überhaupt Randcurven besitzt) $\overset{r}{p}_1$ gleich unendlich

ist, während wir alle übrigen — »*besonderen*« — Punkte des Systems als in *endlicher* Zahl auf der Fläche vorhanden voraussetzen[1]).

Indem wir diese letzteren *discret* auf der Fläche vertheilt annehmen, ist das Verhalten des Curvensystems S in der Umgebung eines jeden dieser Punkte völlig bestimmt, sowie es die Figuren 1—6 schematisch darstellen. Specielle Formen der Punkte P_∞, wie sie durch Zusammenrücken mit Punkten P_n entstehen, berücksichtigen wir in der Folge nicht weiter, weil ihr Einfluss auf die abzuleitende Formel ohne weiteres aus ihrer Entstehung sich ergiebt. In Fig. 7—9 sind derartige Vorkommnisse angedeutet. Zu den Figuren 6—8 sei dabei bemerkt, dass diese drei Formen eines $\overset{r}{P}_\infty$ auch entstehen, wenn man einen Punkt $\overset{i}{P}_\infty$ zerschneidet und zwar, je nachdem bei dieser Zerschneidung von den beiden Zweigen, welche die Schnittlinie berühren, keiner, einer oder zwei in das Flächeninnere fallen.

§ 3. Die Beziehung zwischen den Zahlen G und p.

Mit Einführung dieser Bezeichnung ergiebt sich nun für die Beziehung der Grundzahl G unserer Fläche F zu den besonderen Punkten irgend eines auf derselben gezeichneten Curvensystems S die Formel:

$$(1)\qquad 2G - 4 = \sum(n-2)\,\overset{i}{p}_n + \sum(n-1)\,\overset{r}{p}_n - 2\,\overset{i}{p}_\infty\,.$$

Zum Beweise derselben gehen wir aus von einem speciellen Falle, wo es sich um ein einfach berandetes Flächenstück von der Grundzahl 1 handelt und in welchem das Curvensystem S *im Innern* der Fläche *keinen besonderen Punkt*, *auf dem Rande nur Punkte* $\overset{r}{P}_2$ *und* $\overset{r}{P}_0$ besitzt. Hierfür nimmt der Satz (1) die Form

$$(2)\qquad -2 = \overset{r}{p}_2 - \overset{r}{p}_0$$

an, die sich wie folgt erweist:

Man zerschneide die Fläche längs der $2\,\overset{r}{p}_2$ von den Punkten $\overset{r}{P}_2$ ausgehenden Curven des Systems S[2]). Dann überzeugt man

1) Vergl. hierzu noch die Schlussbemerkung des folgenden § 3.

2) Ich betrachte diese Curven als von einander verschieden; speciellere Annahmen bringen nur unwesentliche Modification

sich, indem man die Stücke successive in einem System S sich entstehend denkt, sofort, dass dieselben nur die in Fig. 10 u. 11 gegebenen Formen haben können. Indem wir die Vertheilung der $\overset{r}{p}_0$ Punkte $\overset{r}{P}_0$ und der $3\overset{r}{p}_2$ Punkte $\overset{r}{P}_2$ auf diesen Stücken beachten, übersehen wir sofort: Es giebt $\overset{r}{p}_0$ Theile, die je *einen* Punkt $\overset{r}{P}_0$ und $\overset{r}{P}_2$ enthalten und $\frac{1}{2}(3\overset{r}{p}_2 - \overset{r}{p}_0)$ Theile, mit je *zwei* Punkten $\overset{r}{P}_2$. Nun hat man andererseits im Ganzen $2\overset{r}{p}_2 + 1$ Stücke. Der Vergleich beider Anzahlen führt sofort zur obigen Formel (2).

Auf diese Form (2) lässt sich nun der allgemeine Satz durch successive Umformung unserer Fläche F reduciren.

1) Wir schneiden aus der Fläche F, welche die Grundzahl G besitze, alle *besonderen* Punkte im Inneren heraus und auf dem Rande alle mit Ausnahme der Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$. Die neuentstandene Fläche F' hat die Grundzahl $G' = G + \sum \overset{i}{p}_n + \overset{i}{p}_\infty$ und *auf ihren Rändern bloss mehr Punkte* $\overset{r}{P}_2$ *und* $\overset{r}{P}_0$. Beim Ausschneiden der besonderen Punkte entstehen nämlich, wie dies die Figuren 1—6 erläutern, Berührungen von Curven des Systems mit dem neugebildeten Rande, welche, je nachdem sie von Innen oder Aussen an die um den Punkt geführte Schnittlinie herantreten, als Punkte $\overset{r}{P}_2$ bez. $\overset{r}{P}_0$ für unsere Fläche F' zu rechnen sind. *Dabei ist jedesmal die Differenz d aus der Anzahl dieser Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ ein Characteristicum des betreffenden singulären Punktes*, und zwar ist für einen Punkt $\overset{i}{P}_n$ diese Differenz $\overset{i}{d}_n = n$, für einen $\overset{i}{P}_\infty$ $\overset{i}{d}_\infty = 0$, und analog ist für die Punkte des Randes: $\overset{r}{P}_n$ $\overset{r}{d}_n = (n-1)$, für $\overset{r}{P}_\infty$ $\overset{r}{d}_\infty = 0$. Die in Fig. 7 u. 8 bezeichneten speciellen Formen eines Punktes $\overset{r}{P}_\infty$ sind dann wieder aufzufassen als Vereinigung eines bez. zweier Punkte $\overset{r}{P}_0$ mit einem gewöhnlichen Punkte $\overset{r}{P}_\infty$. Unsere Abzählung zeigt, dass die Fläche F' auf ihren Rändern eine Anzahl von Punkten $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ besitzt, deren Differenz völlig bestimmt und gleich $\sum n\overset{i}{p}_n + \sum (n-1)\overset{r}{p}_n$ ist.

2) Diese Fläche F' verwandle man durch ein geeignetes System von Rückkehr- und Querschnitten in eine Fläche F'', die aus N einfach berandeten Theilen, je von der Grundzahl 1 besteht. Dieses Schnittsystem enthält, wie man leicht abzählt, $2G'+2N-4 = 2G + 2\overset{i}{\sum}' p_n + 2\overset{i}{p}_\infty + 2N - 4$ Kreuzungspunkte, welche wir (nur der Kürze wegen) nicht in den besonderen Punkten unserer Fläche gelegen annehmen. F'' enthält jetzt auf ihren Rändern wieder nur Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$, deren Differenz sich gegen die vorige von F' nur um die Anzahl jener Kreuzungsstellen geändert hat. In diesen nämlich hat, wie dies Fig. 12 andeutet, *einer* der drei dort vereinigten Ränder einen Punkt $\overset{r}{P}_0$ erhalten. Punkte $\overset{r}{P}_0$, $\overset{r}{P}_2$ aber, die auf den übrigen Theilen jener Quer- und Rückkehrschnitte auftreten, sind (vergl. Fig. 13) immer paarweise einander ergänzend vorhanden, so dass deren Differenz verschwindet. Nun wendet man endlich für diese N Flächenstücke, für welche die Gesammtdifferenz der Punkte $\overset{r}{P}_2$ u. $\overset{r}{P}_0$ gleich $\sum'(n-2)\,\overset{i}{p}_n + \sum'(n-1)\,\overset{r}{p}_n - 2\overset{i}{p}_\infty - 2G - 2N + 4$ ist, die Formel (2) an, um unmittelbar auf den zu Anfang aufgestellten Satz zu gelangen.

Bezüglich des *Randes* unserer Fläche F sei hier noch bemerkt: Wir können annehmen, dass Theile desselben, oder auch ganze (geschlossene) Randcurven dem Curvensystem S angehören. Im ersteren Falle können wir, ohne die Grundzahl der Fläche zu ändern, jenes Stück sofort auf einen Punkt zusammenziehen, dessen Qualität in jedem Falle leicht zu entscheiden ist, und, falls ein Rand seiner ganzen Ausdehnung nach als Curve des Systems auftritt, durch eine kleine Verzerrung desselben (vergl. z. B. Fig. 1) *ohne Aenderung der für ihn characteristischen Differenz von Punkten* $\overset{r}{P}_2$, $\overset{r}{P}_0$ das gewöhnliche Verhältniss herstellen. Das letztere Vorkommniss ist also für die Abzählung ohne Einfluss.

Abschnitt II.

Die in Abschnitt I gegebene allgemeine Formel ermöglicht nun sofort auch die analytische Bestimmung der Grundzahl einer Fläche F etwa für folgende Fragestellung: Gegeben die Gleichungen $F_1(x, y, z) = 0$ und $F_2(x, y, z) = 0$ zweier Flächen;

wie gross ist die Grundzahl der »im Innern« von $F_2 = 0$ liegenden Theile von $F_1 = 0$? Man stelle zu dem Ende z. B. durch ein Büschel von Flächen $\varphi + \lambda\psi = 0$ ein Curvensystem S auf $F_1 = 0$ her und berechne die Anzahlen der besonderen Punkte dieses Systems für das Innere von F_2 und für den von $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ gebildeten Rand, Anzahlen, welche sich in übersichtlichster Weise aus den Vorzeichen gewisser Determinanten bestimmen, in einer Form, welche unmittelbar auf die allgemeine Theorie der Characteristiken eines Functionensystems hinweist, wie sie von Kronecker a. a. O. gegeben ist. In §§ 5 und 6 formuliren wir die hiermit allgemein bezeichnete Aufgabe für zwei specielle Fälle, an denen die Beziehung zu jenen Untersuchungen am deutlichsten hervortritt.

§ 4. Die Kronecker'sche Characteristik eines Functionensystems.

Zur Uebersicht sei die allgemeine Definition der Characteristik eines Functionensystems nach Kronecker vorangestellt.

Es seien $f_{00}, f_{10}, f_{20}, \cdots f_{n0}$ eindeutige reelle Functionen der n reellen Veränderlichen $z_1, z_2 \ldots z_n$ und zwar solche, die sowohl eine $n$fach unendliche Zahl positiver als negativer Werthe annehmen. Sie seien überdies im Allgemeinen stetig und nach den einzelnen Variabeln differentiirbar vorausgesetzt und endlich werde angenommen, dass keine der $n + 1$ Functionaldeterminanten gleichzeitig mit den betreffenden Functionen für unendlich viele Werthsysteme z verschwindet[1]). Bezeichnet nun f_{gh} die nach z_h genommene Ableitung von f_{g0}, und $[a]$ die positive oder negative Einheit oder Null, je nachdem die reelle Grösse a positiv oder negativ oder Null ist, so ergeben sich für die Characteristik K des Functionensystems die beiden Darstellungen:

$$K = -\tfrac{1}{2}\Sigma\,[|f_{gh}|] = \Sigma\,[|f_{ik}|]$$

$$g, h = 0, 1, 2 \ldots n; \quad i, k = 1, 2 \ldots n,$$

die erste Summation verstanden über alle Punkte

$$f_{00} = f_{10} = \cdots = f_{(m-1)0} = f_{(m+1)0} = \cdots = f_{n0} = 0$$

(für welche also irgend n der $n + 1$ Functionen verschwinden); die zweite Summe verstanden über die Punkte, für welche

1) Vergl. hier pag. 325 des Folgenden.

$$f_{00} < 0\,;\; f_{10} = f_{20} = \cdots = f_{n0} = 0.$$

Dies vorangeschickt formuliren wir die:

§ 5. Aufgabe 1.

Gegeben die Gleichung einer ebenen Curve $f(x, y) = 0$. Welches ist die Grundzahl des »Innenraumes« $f < 0$?

Zur *bestimmten* Fixirung der Aufgabe nehmen wir an, dass die Gleichungen $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ (wo f_1 und f_2 die partiellen Ableitungen von f nach x bez. y bezeichnen) nicht gleichzeitig für reelle Werthepaare x, y zu befriedigen seien. Zur *einfacheren* Formulirung dient: Die Ebene werde bezüglich ihres Verhaltens im Unendlichen als eine Kugel, d. h. mit nur einem unendlich fernen Punkte betrachtet, welcher im *Aussen*raume $f > 0$ der Curve gelegen sei (was stets durch stereographische Projection erreicht werden kann). Dann gilt der Satz:

Bezeichnet K die Characteristik des Functionensystems

(1) $$f = 0,\quad f_1 = 0,\quad f_2 = 0,$$

G die Grundzahl des Innenraumes von $f = 0$, so ist

(2) $$G = -K + 2.$$

Wir erläutern den Satz in doppelter Form:

I. Man betrachte die Geraden parallel zur X-Axe als Curvensystem S und frage nach der Differenz der »inneren« und »äusseren« Berührungen, welche specielle Gerade des Systems mit der Curve $f=0$ eingehen. Diese ist, nach Abschnitt I, gleich $2G-4$; übrigens wird sie bestimmt durch

$$\Sigma \left[\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \right],$$

diese Summe ausgedehnt über alle Punkte, für welche

$$f = 0 \quad \text{und} \quad f_1 = 0$$

ist, und also ist

$$-(G-2) = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,[f_{11}] = K$$

die Characteristik des Functionensystems (1).

II. Man betrachte das System der Curven $f =$ const. im Innern von $f = 0$. Es ist ein Curvensystem S, *bei welchem der*

Rand ($f = 0$) *dem Systeme angehört* (vergl. pag. 320). Man frage also zur Bestimmung der Grundzahl nach der Differenz der Punkte $\overset{i}{P}_1$ und $\overset{i}{P}_0$ im Innern von $f = 0$[1], für welche sich nach Abschnitt I. $G - 2 = \overset{r}{p}_1 - \overset{r}{p}_0$ ergiebt. Sie wird weiter gegeben durch

$$-\Sigma \left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \right],$$

diese Summe ausgedehnt über alle Punkte

$$f < 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

also, bis auf das Vorzeichen, als Characteristik K. So liefern gerade die beiden Formen der Kronecker'schen Characteristik die verlangte Bestimmung in der einfachsten Art.

§ 6. **Aufgabe 2.**

Gegeben die Gleichung einer Fläche $f(x, y, z) = 0$. Welches ist ihre Grundzahl?

Ich führe hier gleichfalls zwei Formulirungen dieser Abzählung an, wie sie sich aus den zwei Formen der Kronecker-schen Characteristik sofort ergeben, wobei, wie schon Eingangs bemerkt, die zweite Formulirung hier bereits in das Gebiet der Abzählungen in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit hinübergreift. Wenngleich ich ausführlich auf diese letzteren Abzählungen an dieser Stelle nicht eingehe, so mag doch in der speciellen, sich hier unmittelbar aufdrängenden Form dieses weitere Problem angedeutet sein.

Zur *bestimmten* Fixirung der Aufgabe nehmen wir wieder an, dass die vier Gleichungen $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ (unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Ableitungen von f nach x, y, z verstanden) nicht gleichzeitig für reelle Werthe von x, y, z zu befriedigen seien. Zur *einfacheren* Formulirung setzen wir weiter fest: Der Raum werde als Kugelraum betrachtet, d. h. mit nur einem unendlich fernen Punkte, welchen wir als im Aussenraume $f > 0$ unserer Fläche gelegen annehmen. Dann lautet unser Satz:

---

1) Der Einfacheit wegen seien höhere Singularitäten ausgeschlossen, Punkte P_∞ können nach der zu Anfang gegebenen Formulirung der Aufgabe hier nicht auftreten.

Die Grundzahl G unserer Fläche $f = 0$ ist gegeben durch die Formel

$$(1) \qquad G = -2K + 2,$$

wo K die Characteristik des Functionensystems

$$(2) \qquad f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0.$$

Formel (1) *drückt dabei, im Zusammenhalt mit der Kroneckerschen Deutung der Characteristik, die Eingangs erwähnte Beziehung der Grundzahl einer geschlossenen, übrigens aus beliebig vielen Theilen bestehenden Fläche zu der durch 4π dividirten Curvatura integra derselben aus*, eine Relation, die sich auch unmittelbar durch geometrische Betrachtungen ergiebt. Zur Begründung von Formel (1) betrachten wir wieder:

I. Ein System von Ebenen parallel zur (xy)-Ebene. Dasselbe schneidet auf $f(x, y, z) = 0$ ein Curvensystem S aus, welches nur Punkte $\overset{i}{P}_4$ und $\overset{i}{P}_0$ aufzuweisen hat für die Tangentialebenen in Punkten hyperbolischer bez. elliptischer Krümmung. Die Differenz $\overset{i}{p}_4 - \overset{i}{p}_0$ aller dieser Punkte von $f = 0$, welche nach Abschnitt I. gleich $G - 2$ ist, wird gegeben durch:

$$\Sigma \left[\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \right],$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

und also ist

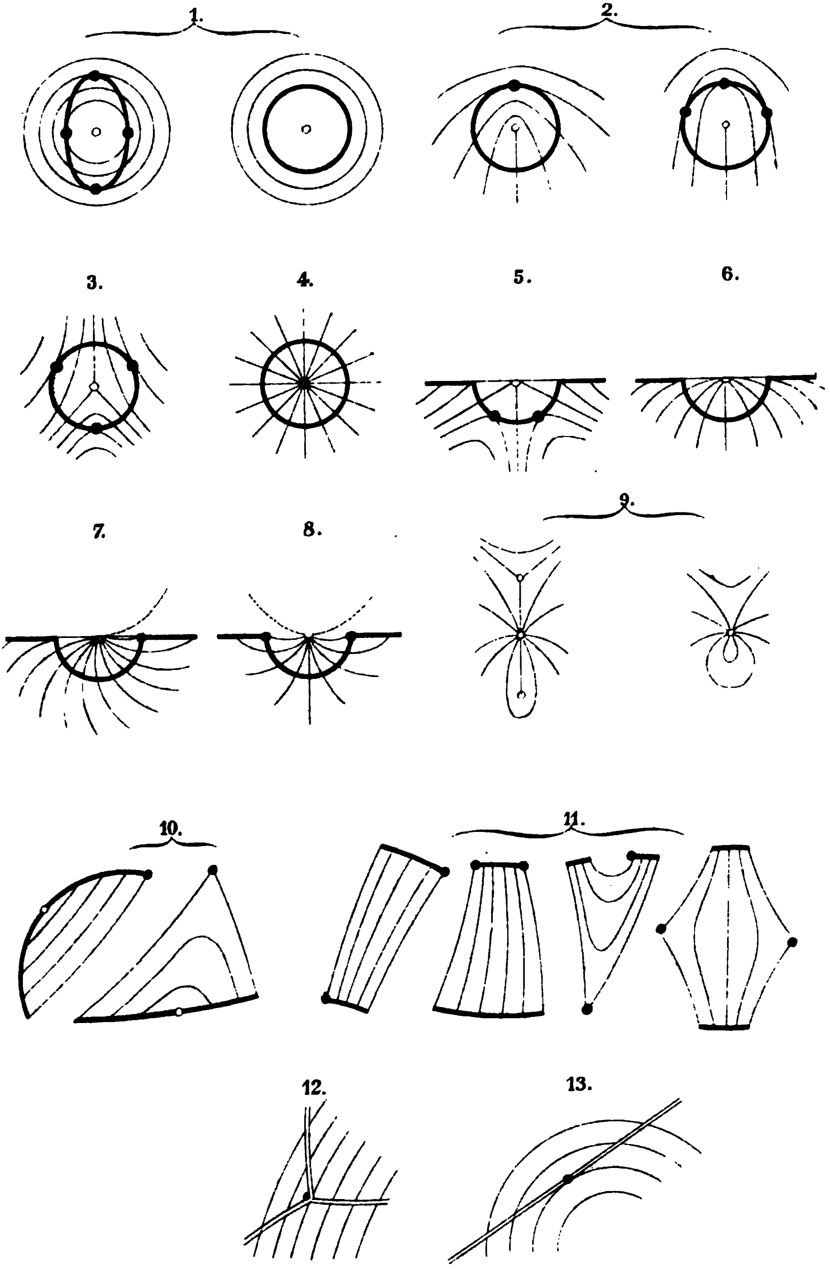
$$G - 2 = -\Sigma \left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \right] = -2K,$$

w. z. b. w.

II. Nun ist aber auch

$$K = \Sigma \left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \right];$$

diese Summe ausgedehnt über $f < 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$. Diese Formel ergiebt unmittelbar die geometrische Abzählung der Grundzahl unserer Fläche in folgender Form:



Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 1885.
Zur Abhandlung von W. Dyck.

Im Innern von $f=0$ ist ein »Flächensystem S« von Flächen $f=$ const. gezeichnet, so dass durch jeden Punkt nur eine Fläche des Systems hindurchgeht. Die Knotenpunkte ($f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$) von Flächen des Systems trennen sich, wenn wir das System in bestimmter Richtung (mit wachsender Constanten) durchlaufen, in 4 Kategorien:

1) Punkte, in welchen ein elliptisch gekrümmter Flächentheil aus einem isolirten Punkte entsteht; umgekehrt

2) Punkte, in denen sich ein elliptisch gekrümmter Theil zusammenzieht,

3) Punkte, bei denen ein hyperbolisch gekrümmter Flächentheil in zwei elliptisch gekrümmte sich spaltet, und umgekehrt,

4) Punkte, wo zwei elliptisch gekrümmte Flächentheile sich zu einem hyperbolischen vereinigen.

Nimmt man nun an, dass die Anzahlen der im Innern von $f=0$ befindlichen Knotenpunkte der ebengenannten Arten[1]) bez. p_{ie}, p_{ei}, p_{he}, p_{eh} sind, so sagt unsere obige Formel, dass

$$G = 2\,(p_{ei}+p_{eh}-p_{ie}-p_{he})+2\,.$$

In der That erkennt man auch geometrisch sofort aus den in § 1 gegebenen Definitionen für die Grundzahl, dass durch die Uebergänge (1) und (3) die Grundzahl der Fläche um 2 vermindert, durch die Uebergänge (2) und (4) dagegen um 2 vermehrt wird, was die eben gegebene Formel sofort auch auf geometrischem Wege erweist.

Ich denke auf die weiteren hiermit angedeuteten Formulirungen bei nächster Gelegenheit einzugehen.

---

1) Soferne höhere Singularitäten in *einzelnen* Punkten eintreten, lassen sie sich leicht in die allgemeine Formulirung einbegreifen. Das Auftreten von Doppellinien aber (und damit auch das Vorkommniss einseitiger Flächen in unserem Systeme) ist in der gegenwärtigen Formulirung schon durch die Kronecker'schen Bedingungen für das Functionensystem f, f_1, f_2, f_3 (vergl. § 4) ausgeschlossen.

SITZUNG AM 18. JULI 1885.

Wilhelm Braune und **Hans Stahel**, *Ueber das. Verhältniss der Lungen, als zu ventilirender Lufträume, zu den Bronchien als luftzuleitenden Röhren.*

In dem Folgenden soll von uns eine vorläufige Mittheilung gegeben werden über die gewonnenen Resultate einer Untersuchung, die in kurzer Zeit in extenso veröffentlicht werden wird. Die Arbeit wurde von uns Beiden gemeinsam auf der topographischen Abtheilung der hiesigen Anatomie ausgeführt. Sie behandelte Anfangs die topographischen Verhältnisse der Lungen beim Menschen, die trotz der Ausbildung der physikalischen Diagnostik noch verschieden dargestellt werden, wandte sich aber dann, nach Erledigung dieser Frage, den Grössenverhältnissen der Bronchien und Lungen zu, Verhältnissen, welche den Happttheil der Arbeit ausmachen, sodass auch in der Ueberschrift nur dieser Theil angegeben wurde. Alle Einzelmessungen, ebenso wie die Literatur, werden erst später mitgetheilt werden. Die Hauptresultate in kurze Sätze zusammengefasst, sind folgende:

1. Die rechte Lungenspitze steht beim Menschen messbar höher als die linke.

2. Der Querschnitt des *rechten* Bronchus steht zu dem Querschnitte des *linken* Bronchus (beide gemessen an der Bifurcation) in *einem bestimmten*, nur in geringer Breite schwankenden, *Verhältniss*. Und zwar verhält sich der Querschnitt des rechten Bronchus zu dem des linken im Mittel aus 11 Messungen an ganz normalen menschlichen Lungen wie

100 : 78,4.

Die einzelnen Verhältnisszahlen dieser Reihe liegen zwischen

100 : 71,6
100 : 82,7.

3. Unter 10 normalen menschlichen Lungen fand sich, dass der Querschnitt der *Trachea*

in 8 Fällen *kleiner* als die Summe der Querschnitte der Bronchien,

in 2 Fällen grösser war als die Summe der Querschnitte der Bronchien.

Wegen des Wechsels im Kaliber der Trachea musste natürlich an einer ganz bestimmten Stelle die Messung der Trachealichtung ausgeführt werden.

Das Mittel aus diesen 10 Messungen ergab folgendes Verhältniss des Querschnittes der Trachea zur Summe der Querschnitte der Bronchien, nämlich:

100 : 107,8.

4. Der Querschnitt des *rechten* Bronchus, gemessen an der Bifurcation, sowohl wie der des *linken* ist grösser als die Summe der Querschnitte seiner Aeste. (In 5 darauf untersuchten Fällen.)

5. Der linke Bronchus verjüngt sich bei normalen menschlichen Lungen von der Bifurcation ab bis zur Abgabe der Hauptäste; und zwar ist das Verhältniss des Querschnittes des linken Bronchus an der Bifurcation, verglichen mit dem Querschnitte des linken Bronchus in der Mitte seiner Länge im Mittel aus 8 Messungen an normalen Lungen

100 : 87,5 ;

das Verhältniss des Querschnittes des *linken* Bronchus an der Bifurcation, zu dem Querschnitte des linken Bronchus kurz vor Abgabe seiner Aeste im Mittel aus 7 Messungen an normalen Lungen:

100 : 81,4 .

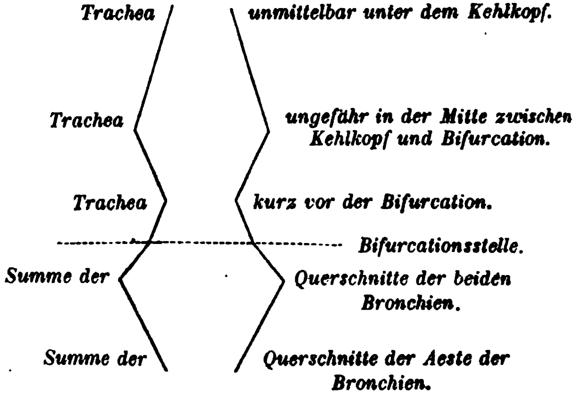
Bei dem rechten Bronchus verhinderte uns die Kürze des Rohres ähnliche Messungen auszuführen.

6. Die Behauptung Aeby's, dass die menschliche Trachea ein trichterförmiges Rohr mit nach unten gekehrter Basis sei, ist unrichtig. Ebenso die Behauptung von Seé, dass die menschliche Trachea ein cylindrisches Rohr darstelle. Die Trachea hat unmittelbar unter dem Kehlkopfe den geringsten Querschnitt; von da ab vergrössert sich der Querschnitt stetig bis ungefähr zur Mitte, wo er sein Maximum erreicht, um von da ab bis kurz vor der Bifurcation wieder abzunehmen. Dies

Verhältniss hat schon Hyrtl dargethan. Kurz vor Abgabe der Bronchien erfährt die Trachea wieder eine Erweiterung. Mit Abgabe der Bronchien erweitert sich der Querschnitt der zuführenden Röhren noch mehr, um dann mit Abgabe der Hauptäste der Bronchien wieder abzunehmen.

Die Trachea und die Bronchien stellen also ein Röhrensystem mit abwechselnden Erweiterungen und Verengerungen dar.

Nachfolgendes Flächen-Schema soll diese Verhältnisse im Allgemeinen veranschaulichen.



7. In einem ähnlichen Verhältnisse wie beim Menschen stehen beim *Hunde* die Querschnitte der Bronchien zu einander; ebenso bei Katzen, Schaafen, welche wir nach dieser Richtung hin zu untersuchen Gelegenheit hatten.

Bei Hunden findet sich folgendes Verhältniss des Querschnittes der Trachea zur Summe der Querschnitte der Bronchien im Mittel aus 8 Messungen, nämlich:

100 : 127,8.

Ferner ist das Verhältniss des Querschnittes des rechten Bronchus zum Querschnitte des linken im Mittel aus 9 Messungen:

100 : 74,4.

8. Die an das Verhältniss der Bronchien bei normalen Lungen sich anschliessende Untersuchung der Querschnitte der Bronchien an *pathol.* menschlichen Lungen ergab:

1. Bei emphysematösen Lungen verjüngte sich der *linke* Bronchus in stärkerem Maasse von der Bifurcation ab,

als dies bei normalen Lungen nach dieser Richtung hin constatirt wurde. Auch hier wurde von der Messung des *rechten* Bronchus abgesehen, weil uns die Kürze desselben technische Schwierigkeiten entgegensetzte.

2. Die Grösse des Querschnittes der Bronchien kann abhängen von der Wirkung der Bronchialmusculatur. Dieses Moment ist bei unseren Messungen von vornherein auszuschliessen.

Die Bronchialmusculatur scheint die Weite der Bronchien in Fällen zu reguliren, bei denen zeitlich mehr oder weniger rasch ablaufende Vorgänge in Frage kommen; sie vermag hingegen nicht das Rohr *dauernd* zu verengern oder zu erweitern. In unseren Fällen finden wir, dass bei lang dauernder Beeinträchtigung der Function einer Lunge der zugehörige Bronchus nach und nach sein Kaliber geändert hatte. Während bei normalen Lungen das Verhältniss der Bronchien eine gewisse Breite nicht überschreitet, fanden wir bei Functionsstörungen einer Lunge ein ganz abweichendes Verhältniss der Querschnitte der Bronchien. Ist z. B. die rechte Lunge in ganzer Ausdehnung verwachsen, so findet sich, dass jetzt das Verhältniss des rechten zum linken Bronchus die normale Breite weit überschritten hat. Der Querschnitt des rechten Bronchus verhält sich zum Querschnitt des linken in diesem Falle wie

$$100 : 92{,}5 .$$

Wir haben somit in der Bestimmung und Vergleichung der Querschnitte der Bronchien ein Mittel an der Hand, gewisse Krankheitsprocesse der Lungen in ihrem Einfluss auf die spätere Functionsfähigkeit der Lungen besser zu prüfen, als dies früher möglich war. Ueber diesen Punkt wird später ausführlicher abgehandelt werden.

9. Die Gewichte menschlicher Lungen, untereinander verglichen, gaben durchaus kein constantes Verhältniss. Es ist dies auch leicht einzusehen, da die Blutvertheilung nach dem Tode sehr ungleich ist, ebenso das Oedem etc. Immerhin liess sich constatiren, dass bei einer grossen Zahl von Gewichtsbestimmungen *niemals* die rechte Lunge gleich oder leichter gefunden wurde als die linke; stets war das Gewicht der rechten Lunge grösser. Ja in zwei Gewichtsbestimmungen stellte sich ein Verhältniss heraus, das dem Verhältniss der Querschnitte der Bronchien ziemlich nahe kam.

10. Es fand sich nun bei Hunden, die man vorher zum Zwecke einer genauen Gewichtsbestimmung vollständig hatte verbluten lassen, dass das Gewicht der rechten Lunge zum Gewicht der linken sich genau verhielt wie der Querschnitt des rechten Bronchus zu dem Querschnitte des linken.

Das Gewicht der rechten Lunge verhält sich zu dem Gewichte der linken im Mittel aus 5 Bestimmungen wie

$$100 : 74,9,$$

die Querschnitte der zugehörigen Bronchien wie

$$100 : 75,5.$$

Auch bei Katzen, Schaafen erhielt man ähnliche, wenn gleich nicht so übereinstimmende Resultate.

Dies rührt davon her, dass bei Katzen wegen der Kleinheit der Objecte die wenn auch geringen Fehlerquellen bei der Messung zu bedeutend werden; bei Schaafen macht der eparterielle Bronchus, der sehr kurz ist und gesondert aus der Trachea entspringt, Schwierigkeiten.

11. Da das entblutete Lungengewebe in einem genauen Verhältniss zu den Querschnitten der zuführenden Luftröhren steht, so war noch zu untersuchen, ob nicht auch die Volumina Luft, welche die Lungen aufnehmen können, in einem ähnlichen Verhältnisse zu den Querschnitten der luftzuführenden Röhren stehen. Wir gingen dabei von folgender theoretischen Betrachtung aus:

Das Volum Luft, das bei der Inspiration in jede Lunge gelangt, hängt ab

1. vom Querschnitt der zuführenden Röhren;
2. von der Geschwindigkeit, mit welcher die Luft die Röhren durchfliesst;
3. von der Zeit, während welcher die Inspiration abläuft.

Es ist also das Volumen Luft, das in die rechte Lunge während einer Inspiration eindringt:

$$V_r = q_r \,.\, c \,.\, t,$$

worin q_r den Querschnitt des rechten Bronchus bezeichnet.

$$V_l = q_l \,.\, c_1 \,.\, t.$$

Somit $$V_r : V_l = q_r c : q_l c_1,$$

und da wir c ohne hier in Betracht kommende Fehlerquelle gleich c_1 setzen können:

$$V_r : V_l = q_r : q_l.$$

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich, dass die Volumina Luft, welche in die Lungen bei einer Inspiration eindringen und welche wir der Kürze halber respiratorische Volumina nennen wollen, sich verhalten müssen, wie die Querschnitte der zugehörigen Bronchien. Es ist nun dieses Volumen Luft, welches bei einer Inspiration in die Lungen eintritt, ein Bruchtheil der Luftmenge, welche die Lunge überhaupt zu fassen vermag und die wir im Gegensatze zum respiratorischen Luftvolumen das absolute nennen wollen. Es hat sich nun herausgestellt, dass die absoluten Luftmengen beider Lungen sich sehr annähernd verhalten wie die Querschnitte der zuführenden Röhren.

Das absolute Volumen der rechten Lunge verhält sich zum absoluten Volumen der linken Lunge im Mittel aus 5 Bestimmungen wie

$$100 : 74{,}4.$$

Das Gewicht der rechten Lunge aber zu dem der linken war im Mittel aus 5 Bestimmungen

$$100 : 71{,}8.$$

Die absoluten Volumina der rechten und der linken Lunge verhalten sich demnach nach den früheren Beziehungen der Gewichte zu den Querschnitten auch annähernd wie die Querschnitte der Bronchien. Auch diese Volum-Untersuchungen wurden an Hunden gemacht, welche man hatte verbluten lassen.

Es besteht demnach ein bestimmtes Verhältniss zwischen den Lungen als Lufträumen und den Bronchien als Luft zuleitenden Röhren. Der zu jeder Lunge führende Bronchus hat einen so grossen Querschnitt, dass dadurch die mechanischen Bedingungen erfüllt sind, um die Lunge in einer gewissen Zeit und bei einer durchschnittlich constanten Saugkraft zweckentsprechend zu ventiliren.

12. Die Methode, welche wir bei der Bestimmung der Querschnitte angewandt haben, ist folgende:

Die Tracheen und Bronchien wurden gefroren und dann 3—4 mm dicke Querschnitte mit einem geeigneten Instrumente angefertigt. Die Schnitte wurden noch gefroren mittelst des von His angegebenen Zeichenapparates gezeichnet und der Flächeninhalt des 4 Mal vergrösserten Querschnittes mit dem Amsler'schen Planimeter bestimmt. Es ergab sich, dass wir bis auf 1 qmm genau den Flächeninhalt bestimmen konnten.

Zur Bestimmung der absoluten Volumina der Lungen wandten wir folgenden Apparat an:

In zwei Glasflaschen von genau gleicher Höhe, mit am Boden wasserdicht aufschraubbaren Metallplatten, die in der Mitte von Canülen durchbohrt sind, wurden die frischen, verbluteten intacten Lungen mit den Bronchien an diesen Canülen befestigt. Die Querschnitte dieser Canülen verhalten sich wie 100 : 80, d. h. wie die Querschnitte der Bronchien.

Die Canülen beider Flaschen werden durch ein T-förmiges Rohr miteinander verbunden. Durch das Längsstück des T-förmigen Rohres bläst der Untersucher die Luft in die Lungen. Der Druck ist also für beide Lungen gleich. Die Menge des verdrängten Wassers giebt das absolute Luftvolumen, das eine Lunge bei vollständigem Aufblasen zu fassen vermag. Glasflaschen wurden genommen, um eine Controle des Versuches zu ermöglichen.

Ludwig Lange, *Ueber das Beharrungsgesetz.*

I.

Bei einer planmässigen Untersuchung der dynamischen Principien tritt uns als erstes und oberstes Problem die Aufgabe entgegen, an Stelle der in mancher Hinsicht veralteten Galilei-Newton'schen Fassung des Beharrungsgesetzes eine zeitgemässe neue Fassung zu setzen. Seitdem Carl Neumann[1]) und Ernst Mach[2]) die Unzulänglichkeit jener herkömmlichen Formulirung schlagend nachgewiesen haben, besteht kein Zweifel, dass man es hier nicht mit einem erdichteten, sondern mit einem wirklichen und durchaus berechtigten Bedürfnisse der Wissenschaft zu thun hat. In jüngster Zeit hat sich übrigens Streintz[3]) das Verdienst erworben, auf die hervorragende Bedeutung des genannten Problems von Neuem hinzuweisen. Ich selbst habe dann an einem anderen Orte[4]) den Gegenstand vorwiegend aus methodologischen Gesichtspunkten behandelt und will hier nun näher auf seine mathematisch-physikalische Seite eingehen.

Die Unzulänglichkeit der üblichen von Newton herstammenden Formulirung des Gesetzes liegt in erster Linie darin, dass weder gesagt wird, in Bezug auf was für ein Coordinatensystem die Bewegungen der sich selbst überlassenen Punkte geradlinig, noch, in Bezug auf was für eine Zeitscala (s. u.) sie gleichförmig sind. Es heisst nur: »sie sind geradlinig« und »sie sind gleichförmig«. Aber in Bezug worauf sind sie geradlinig? um von der zweiten Behauptung vorerst ganz abzusehen. Es ist wohl nicht nöthig, auf die allgemein anerkannten Schwierig-

---

1) Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Lpz. 1870.

2) Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag, 1872. S. 47.

3) Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.

4) Philosophische Studien, hrsgg. v. W. Wundt. Bd. II. S. 266—297.

keiten, welche der Beantwortung dieser Frage entgegenstehen, ausführlich einzugehen. Kein gegebenes materielles Object im Weltall ist geeignet, in allen Fällen zum Bezugsobjecte des Trägheitsgesetzes zu dienen [1]. Insbesondere hätte eine Gravitationsmechanik der Fixsterne in dem ganzen weiten Universum nichts zur Verfügung, worauf sie die Bewegungen der (blos gedachten) sich selbst überlassenen Punkte und der Fixsterne beziehen könnte. Dasselbe gilt von der Moleculardynamik, dieser Stellarastronomie im Kleinen.

Newton unterdrückt die Antwort auf unsere Frage in der Fassung des Gesetzes selbst, welche er seiner Gravitationstheorie voranstellt [2]; er bleibt sie aber keineswegs schuldig. Zufolge seinen Erläuterungen bezieht er das Gesetz auf ein gewisses Coordinatensystem, welches er bezeichnet als den »absoluten, gleichartigen, unendlichen und unbeweglichen« Raum. Dieser »absolute Raum« sei wirklich und nicht blos in der Idee vorhanden, aber freilich unserer unvollkommenen menschlichen Sinneswahrnehmung nicht zugänglich. Er soll bestehen aus einer Aneinanderordnung unerkennbarer absolut fester Punkte: und nur durch Vergleichung der Körper mit diesen »an und für sich« festen Punkten, nicht durch ihre Vergleichung mit anderer Materie sollen die Orte und Ortsbewegungen der Körper ihrer wirklichen Beschaffenheit nach erkannt werden [3]. Kurz gesagt ist Newtons absoluter Raum ein Gespenst, das nun und nimmermehr zur Grundlage einer exacten Wissenschaft gemacht werden darf. Es wäre unschwer nachzuweisen, dass Newtons Annahme eines absoluten Raumes nicht unabhängig gewesen ist von seiner tiefsinnigen religiösen Weltanschauung. Den absoluten Raum wie die »absolute Zeit« (s. u.) [4] setzt er in die innigste

---

1) Vgl. Neumann, a. a. O. S. 14 f. Mach, a. a. O. S. 47—50.

2) Philosophiae naturalis principia mathematica, Amstaelod. 1714 editio II) pag. 12. Lex I.

3) L. c. pag. 5—11. Scholium ad definitiones.

4) Vgl. Newton, Optice, 1740 (lat.) pag. 298, sowie das Schlussscholium der zweiten und dritten Auflage der Principien (1714. pag. 481 sq.), wo es u. a. heisst: »Gott ist ewig und aller Orten, und eben durch seine Ewigkeit und Allgegenwart schafft er Zeit und Raum«. Dass die absolute Zeit und der absolute Raum gemeint sind, leidet keinen Zweifel und wird vollends bestätigt durch den Gebrauch des Wortes *duratio* an Stelle von *tempus*. Denn ausdrücklich heisst es anderwärts von der absoluten im Gegensatze zur relativen Zeit: »*Alio nomine dicitur duratio*« (l. c. p. 5).

Beziehung zum allgegenwärtigen und ewigen Gotte und eben in dieser Beziehung erblickt er wiederum eine Garantie für die Untrüglichkeit jener absoluten Wesenheiten im Gegensatze zu ihren relativen Abbildern, dem sinnlichen Raume und der sinnlichen Zeit, welche oftmals zur Täuschung verleiten. Schon Euler wagte an Newtons Fundament der Dynamik zu rütteln[1]) und Kant warf den *realen* absoluten Raum ganz über den Haufen[2]). Freilich wusste man nichts wirklich besseres an die Stelle zu setzen und so kommt es, dass der Mathematiker und Physiker bis in die Gegenwart noch immer — wenngleich nicht ohne Unbehagen — von dem absoluten Raume, von absolut festen Punkten, von absoluten Bewegungen zu reden pflegt, weil er keinen vollgiltigen Ersatz für diese bedenklichen Fictionen hat. *Einen vollgiltigen Ersatz zu finden, darum eben handelt es sich im Folgenden.*

Doch zuvor mag noch die schon erwähnte Newton'sche Annahme einer »absoluten Zeit« in Betracht gezogen werden. Alle Zeitmessung beruht bekanntlich auf Bewegung: man misst die Zeit durch den von einem Punkte (Uhrzeigerspitze, Fixstern) durchlaufenen Weg. Der bewegte Punkt bietet gewissermassen eine »Zeitscala« dar, in welche wir die Ereignisse einordnen. Die zeitlichen Verhältnisse einer gegebenen Bewegung beurtheilen, heisst: dieselbe räumlich vergleichen mit einer anderen ein für alle Mal zu Grunde gelegten Bewegung. Was für eine Bewegung, was für eine Zeitscala soll nun aber der dynamischen Chronometrie zu Grunde gelegt werden? Hier erheben sich bekanntlich ganz ähnliche Schwierigkeiten wie vorhin, als wir nach dem fundamentalen Bezugssysteme der Dynamik fragten. Keine gegebene Bewegung im Weltall ist, in aller Strenge der Theorie, jenem Zwecke dienlich[3]). In dieser Erkenntniss bezog

---

1) Theoria motus (1765) Tom. I. Cap. I. Da Euler Newtons religiös-metaphysisches Fundament nicht besitzt, so scheut er sich hier nicht, den Newton'schen Postulaten Unbegreiflichkeit vorzuwerfen. In Cap. II kehrt er, um noch grössere »Unbegreiflichkeiten« zu vermeiden, dann freilich zu Newtons Ansichten zurück. Vgl. Streintz, a. a. O. S. 40 ff.

2) Nämlich in seiner kritischen Periode. Nicht nur wird von Kant Newtons realer absoluter Raum zu einer blossen Idee verflüchtigt, sondern es hat auch diese Idee nicht die geringste dynamische Färbung, so dass kaum mehr als das leere Wort übrig bleibt. Kant, Smtl. Werke hrsgg. v. Kirchmann, Bd. VII. Abt. I. S. 491.

3) Newton, Principia, pag. 7. Neumann, a. a. O. S. 16 f.

Newton die Bewegungsurtheile seiner dynamischen Theorien und insbesondere den Satz von der unveränderlichen Geschwindigkeit sich selbst überlassener Punkte auf eine »absolute Zeit«, welche — für uns Menschen nicht wahrnehmbar — »an und für sich gleichmässig dahinfliesst«[1]). Es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, dass diese absolute Zeit ein ganz ähnliches Gespenst ist, wie der absolute Raum. Gerade deshalb ist es sehr bemerkenswerth, dass sie aus der gegenwärtigen Dynamik ziemlich verschwunden ist, während das Gleiche noch keineswegs vom absoluten Raume gilt. Die Erklärung dieser Thatsache liegt indessen nicht fern. Man hat bereits einen vollgiltigen Ersatz für die absolute Zeit. Wir können den zeitlichen Theil des Beharrungsgesetzes vollkommen correct aussprechen ohne das Postulat einer absoluten Zeit. Wir brauchen nur im Anschlusse an Neumann das Zeitmaass der Dynamik zu gründen auf die Definition: Zwei Zeitabschnitte heissen gleich, in welchen *ein sich selbst überlassener Punkt* gleiche Wegabschnitte zurücklegt[2]). Mit anderen Worten: die fundamentale Zeitscala der Dynamik wäre zu definiren durch die Bewegung *eines sich selbst überlassenen Punktes.* Unter diesem Gesichtspunkte erscheint der Satz von der »gleichförmigen« Bewegung aller sich selbst überlassenen Punkte, wie Thomson und Tait sehr richtig bemerken, als *blosse Convention* für einen solchen Punkt, und er ist mehr als Convention, er ist Forschungsergebniss nur insoweit, als er *irgendwelche sonstige* sich selbst überlassene Punkte betrifft[3]). Es ist offenbar nichts als ein eigenthümlicher *Eliminations*process, wodurch Neumann die unbegreifliche absolute Zeit aus dem Ausspruche des Trägheitsgesetzes entfernt hat.

Es fragt sich nun, ob sich nicht durch ein analoges Verfahren auch der absolute Raum eliminiren lässt. In der That ist dies der Fall. Das fundamentale Coordinatensystem der Dynamik mag als »Inertialsystem«, die fundamentale Zeitscala der Dynamik als »Inertialzeitscala« bezeichnet werden. Genau ebenso nun, wie die *eindimensionale* Inertialzeitscala definirt

---

1) Newton, l. c. pag. 5.
2) Neumann, a. a. O. S. 18.
3) Thomson-Tait, Treatise on Natural Philosophy, Vol. I. P. I § 246—248.

werden konnte an Hand *eines einzelnen* sich selbst überlassenen Punktes, so lässt sich das *dreidimensionale* Inertialsystem definiren an Hand *dreier* sich selbst überlassener Punkte. Zu dieser Definition führt uns die folgende Erwägung, deren kinematische Ausgangspunkte nachher begründet werden sollen.

Für drei (oder weniger als drei) beliebig gegeneinander bewegte Punkte *P*, *P'*, *P''* — dieselben brauchen nicht sich selbst überlassen zu sein — lässt sich alle Mal ein Coordinatensystem, ja lassen sich unendlich viele Coordinatensysteme construiren, in Bezug worauf jene Punkte geradlinig fortschreiten. Dagegen ist für mehr als drei Punkte diese Möglichkeit nur unter besonderen Umständen, nur zufällig vorhanden.

Es folgt hieraus, dass das Gesetz von der unveränderlichen Bewegungsrichtung sich selbst überlassener Punkte eine *blosse Convention* ist für drei solche Punkte, dass es ein bemerkenswerthes Resultat der Forschung nur insofern enthält, als es für mehr als drei, für beliebig viele Punkte mit Bezug auf ein und dasselbe System gilt. Die *physikalische* Bedingung des Unbeeinflusstseins hat eben den einen sehr merkwürdigen *kinematischen* Erfolg, dass es für *beliebig viele* ihr unterworfene Punkte ein Coordinatensystem giebt, worin sie sämmtlich geradlinig bewegt sind.

Hiermit ist die gesuchte Definition des Inertialsystemes in ihren Grundzügen gegeben. So wie sich die Inertialzeitscala definiren liess als eine solche Zeitscala, in Bezug worauf *ein* sich selbst überlassener Punkt gleichförmig fortschreitet: so wird sich das Inertialsystem definiren lassen als ein solches Coordinatensystem, in Bezug worauf *drei* sich selbst überlassene Punkte geradlinig fortschreiten. In weiterer Verfolgung dieses Gedankens hat sich in der That für das vollständige Beharrungsgesetz die folgende zergliedernde Fassung ergeben, und zwar auf einem Wege, welchen wir im folgenden Abschnitte betreten werden.

Beharrungsgesetz.

Definition I. »Inertialsystem« heisst ein jedes Coordinatensystem von der Beschaffenheit, dass mit Bezug darauf *drei* vom selben Raumpunkte projicirte und dann sich selbst überlassene Punkte *P*, *P'*, *P''* — welche aber nicht in einer ge-

raden Linie liegen sollen — auf drei beliebigen in einem Punkte zusammenlaufenden Geraden *G*, *G'*, *G''* (z. B. auf den Coordinatenaxen) dahinschreiten[1]).

Theorem I. Mit Bezug auf ein Inertialsystem ist die Bahn *jedes beliebigen vierten* sich selbst überlassenen Punktes gleichfalls geradlinig.

Definition II. »Inertialzeitscala« heisst eine jede Zeitscala, in Bezug auf welche *ein* sich selbst überlassener auf ein Inertialsystem bezogener Punkt (etwa *P*) gleichförmig fortschreitet.

Theorem II. In Bezug auf eine Inertialzeitscala ist *jeder beliebige andere* sich selbst überlassene Punkt in seiner Inertialbahn gleichförmig bewegt[2]).

II.

Zunächst handelt es sich vor allem um eine exacte Darlegung, inwiefern man für ein, zwei, drei, aber im allgemeinen nicht mehr für mehr als drei gegeneinander bewegte Punkte im Stande ist, ein Coordinatensystem zu construiren, in Bezug auf welches die Punkte geradlinig bewegt sind. Es ist hier noch nicht die Rede von sich selbst überlassenen materiellen, sondern von beweglichen geometrischen Punkten.

---

1) Die hier gegebene Definition weicht von meiner früheren ab, nicht was den methodologischen Grundgedanken, sondern was die mathematische Verwirklichung desselben anlangt. Herr Professor A. Voss hatte die Freundlichkeit, mich auf einen kinematischen Irrthum aufmerksam zu machen und so zu diesem zweiten mehr mathematischen Versuche anzuregen.

2) Man sieht, der räumliche und der zeitliche Theil des Gesetzes sagen gewissermassen dasselbe zweimal aus, nur das eine Mal mit Rücksicht auf den dreidimensionalen Raum, das andere Mal mit Rücksicht auf die eindimensionale Zeit. Das eigenthümliche Eliminationsverfahren, worin diese Analogie am schlagendsten zum Ausdrucke kommt, habe ich (a. a. O.) mit einem besonderen Namen, als Princip der particularen Determination, bezeichnet, weil sich herausstellte, dass es in der Mechanik und mathematischen Physik überhaupt manche dunkle Punkte aufklärt. In der That verbreitet es das hellste Licht über eine Anzahl dem Beharrungsgesetze in gewisser Weise coordinirter Grundlehren: z. B. über den Satz von der Proportionalität der Kraft und ihrer Wirkung, über das Ohm'sche Gesetz, u. s. w.

1. Eine beliebige Anzahl solcher Punkte P, P', P''.. mögen mit Bezug auf ein vor der Hand ganz beliebiges Parallelcoordinatensystem $\Xi H Z$ sowie mit Bezug auf eine vor der Hand ebenfalls ganz beliebige Zeitscala 0 . . t die als Functionen von t gegebenen Coordinaten ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ''; . . . besitzen. Gegen $\Xi H Z$ sei ferner irgendwie bewegt ein anderes Parallelcoordinatensystem $X_1 X_2 X_3$; alsdann ergeben sich bekanntermassen die Coordinaten der Punkte in Bezug auf das zweite System aus Transformationen von der Gestalt:

$$x_i = \alpha_i \xi + \beta_i \eta + \gamma_i \zeta + \delta_i, \quad x_i' = \alpha_i \xi' + \beta_i \eta' + \gamma_i \zeta' + \delta_i, \ldots$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

worin α_i, β_i, γ_i, δ_i zwölf Functionen von t sind. Unter Voraussetzung orthogonaler Coordinaten bestehen dabei zwischen den α_i, β_i, γ_i die sechs unabhängigen Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Wir fragen uns nun: Für wie viele gegebene Punkte P, P', . . . ist es, ohne besondere Abhängigkeiten zwischen ihren variabeln Coordinaten ξ, η, ζ, . . . vorauszusetzen, möglich, die $\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i$ als solche Functionen von t zu bestimmen, dass die sämmtlichen in Bezug auf $X_1 X_2 X_3$ beschriebenen Punktbahnen *geradlinig* sind? Bei einer gewissen Anzahl wird ja, dies leuchtet unmittelbar ein, jene Möglichkeit einmal ein Ende nehmen.

Für jeden Punkt fliessen aus der Forderung, er solle mit Bezug auf $X_1 X_2 X_3$ geradlinig fortschreiten, zwei Differentialgleichungen, z. B. für P die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2(x_2)}{dx_1^2} = 0, \qquad \frac{d^2(x_3)}{dx_1^2} = 0,$$

welche nach Transformation auf $\Xi H Z$ und nach Einführung des Argumentes t in den zwölf Unbekannten $\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i$ von der zweiten Ordnung sind. Für n Punkte macht dies $2n$ Differentialgleichungen, welche von den Orthogonalitätsbedingungen (1) oben zu einem Systeme von $2n + 6$ Gleichungen ergänzt werden. Solange nun $n \leqq 3$ ist, übersteigt die Anzahl der zu erfüllenden Gleichungen diejenige der Unbekannten nicht. Für

$n > 3$ aber tritt dieser Fall ein und es giebt deshalb keine Lösung des Problems, wofern nicht besondere Abhängigkeiten zwischen den $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'; \ldots$ supponirt werden.

Im Falle von drei gegebenen Punkten ist es demnach ohne weitere Voraussetzungen *gerade noch* möglich, ein System zu construiren, in Bezug auf welches dieselben sämmtlich geradlinig bewegt sind. Aber nicht nur eines, sondern ∞^{12} Systeme, denn wir haben es, wie sich erkennen lässt, mit 12 *willkürlichen* Integrationsconstanten zu thun. Nun aber ist zufolge bekannten Grundsätzen $\infty^{12} = (\infty^4)^3$ auch die Mannigfaltigkeit aller möglichen Combinationen je dreier gerader Linien im Raume. Es liegt deshalb der Gedanke nahe, dass man als Wege von P, P', P'' durch passende Wahl jener Constanten drei beliebig *vorgeschriebene* Geraden erhalten kann. Das hiermit gestellte Problem lässt sich, wie folgt, auch rein algebraisch formuliren und lösen.

2. Die Forderung, P, P', P'' sollen in Bezug auf $X_1\, X_2\, X_3$ drei vorgeschriebene geradlinige Bahnen beschreiben, führt zu den neun algebraischen Gleichungen ($i = 1, 2, 3$):

$$(2) \quad \begin{cases} x_i = \alpha_i \xi + \beta_i \eta + \gamma_i \zeta + \delta_i = a_i + b_i \varphi(t), \\ x_i' = \alpha_i \xi' + \beta_i \eta' + \gamma_i \zeta' + \delta_i = a_i' + b_i' \varphi'(t), \\ x_i'' = \alpha_i \xi'' + \beta_i \eta'' + \gamma_i \zeta'' + \delta_i = a_i'' + b_i'' \varphi''(t), \end{cases}$$

worin die Werthe a und b die von t unabhängigen Bestimmungsstücke der vorgeschriebenen Bahnen sind, während die Parameter $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ als unbekannte Functionen der Zeit zu den schon vorhandenen 12 Unbekannten $\alpha_i\, \beta_i\, \gamma_i\, \delta_i$ hinzukommen. Das System (2) wird von dem Systeme (1) der unabhängigen Orthogonalitätsbedingungen (S. 339.) ergänzt zu einem Systeme von 15 Gleichungen, welches zur Bestimmung der 15 unbekannten Functionen von t führt, wenn die alten Coordinaten $\xi\, \eta\, \zeta$, $\xi'\, \eta'\, \zeta'$, $\xi''\, \eta''\, \zeta''$, wie vorausgesetzt, als Functionen von t gegeben sind. Durch wirkliche Auflösung erhalten wir Antwort auf die Frage, wie das Coordinatensystem $X_1\, X_2\, X_3$ relativ zu $\Xi H Z$ zu bewegen ist, wenn mit Bezug auf ersteres die Bahnen der Punkte P, P', P'' drei *vorgeschriebene Geraden* sein sollen. Diese Antwort kann mitunter unendlich vieldeutig sein; was für Voraussetzungen erforderlich sind, damit sie es nicht ist, werden wir alsbald sehen.

Setzt man:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \xi \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \zeta'' & \xi'' & \eta'' \end{vmatrix} = \Delta,$$

so folgt aus dem Systeme (2) v. S.:

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta\alpha_i = \begin{vmatrix} a_i + b_i\varphi - \delta_i & \eta & \zeta \\ a_i' + b_i'\varphi - \delta_i & \eta' & \zeta' \\ a_i'' + b_i''\varphi - \delta_i & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}, \\[2ex] \Delta\beta_i = \begin{vmatrix} \xi & a_i + b_i\varphi - \delta_i & \zeta \\ \xi' & a_i' + b_i'\varphi' - \delta_i & \zeta' \\ \xi'' & a_i'' + b_i''\varphi'' - \delta_i & \zeta'' \end{vmatrix}, \\[2ex] \Delta\gamma_i = \begin{vmatrix} \xi & \eta & a_i + b_i\varphi - \delta_i \\ \xi' & \eta' & a_i' + b_i'\varphi' - \delta_i \\ \xi'' & \eta'' & a_i'' + b_i''\varphi'' - \delta_i \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Man kann nun eine jede der sechs Orthogonalitätsbedingungen mit Δ^2 multipliciren:

$$(4) \quad \begin{cases} (\Delta\alpha_1)^2 + (\Delta\alpha_2)^2 + (\Delta\alpha_3)^2 = \Delta^2, \\ (\Delta\beta_1)^2 + (\Delta\beta_2)^2 + (\Delta\beta_3)^2 = \Delta^2. \\ (\Delta\gamma_1)^2 + (\Delta\gamma_2)^2 + (\Delta\gamma_3)^2 = \Delta^2, \\ (\Delta\beta_1)(\Delta\gamma_1) + (\Delta\beta_2)(\Delta\gamma_2) + (\Delta\beta_3)(\Delta\gamma_3) = 0, \\ (\Delta\gamma_1)(\Delta\alpha_1) + (\Delta\gamma_2)(\Delta\alpha_2) + (\Delta\gamma_3)(\Delta\alpha_3) = 0, \\ (\Delta\alpha_1)(\Delta\beta_1) + (\Delta\alpha_2)(\Delta\beta_2) + (\Delta\alpha_3)(\Delta\beta_3) = 0. \end{cases}$$

Führt man dann hierin die rechten Seiten der Gleichungen (3) ein, so resultirt ein System von sechs Gleichungen, worin nur noch die sechs Unbekannten δ_1, δ_2, δ_3, φ, φ', φ'' vorkommen. Dieses resolvirende System wäre nun weiter zu untersuchen, insbesondere auf die Bedingungen hin, unter welchen seine Lösung unendlich vieldeutig wird. Für den Augenblick bleibe diese Frage offen. Jedenfalls geht aus dem vorigen als erste *nothwendige* Bedingung dafür, dass das der gegebenen Vorschrift genügende Coordinatensystem $X_1 X_2 X_3$ kein unbestimmtes ist, die Ungleichung hervor:

$$\Delta \neq 0.$$

Sie besagt unmittelbar, dass P, P', P'' nicht in einer Ebene mit dem Ursprunge von $\Xi H Z$ liegen dürfen. Weil nun aber das zu Grunde gelegte Coordinatensystem $\Xi H Z$ und also auch sein

Ursprung ein ganz beliebiger war, so dürfen wir diese Bedingung alle Mal als erfüllt ansehen, wofern P, P', P'' nicht in einer Geraden liegen. Man kann also auch sagen: P, P', P'' dürfen nicht in einer geraden Linie gelegen sein. Dieses Ergebniss leuchtet auch anschaulich ein. Liegen die Punkte in einer Linie, so kann das System $X_1 X_2 X_3$ in beliebiger Weise um dieselbe gedreht werden, es ist mithin kein bestimmtes. Da sich übrigens Δ als Function von t darstellt, so ist zu unterscheiden zwischen der Möglichkeit, dass momentan, und der Möglichkeit, dass identisch $\Delta = 0$ ist. Für den ersten Fall ist die Unbestimmtheit nur eine momentane, die wenig zu bedeuten hat; für den letzteren Fall aber ist sie eine andauernde.

Betrachten wir nun näher das aus (4) entsprungene resolvirende Gleichungssystem mit den Unbekannten δ_1, δ_2, δ_3, φ, φ', φ''. Dasselbe ist, wie sich leicht zeigen liesse, quadratisch und besitzt demgemäss mehrere reelle oder imaginäre Lösungen; den ersteren entsprechen reelle Coordinatensysteme $X_1 X_2 X_3$, den letzteren hingegen, wo sie auftreten, imaginäre Systeme, in Bezug auf welche die Punkte gleichwohl reelle, nämlich die vorgeschriebenen Bahnen beschreiben; ich sehe hier natürlich davon ab, dass man auch imaginäre Bahnen vorschreiben könnte. Uebrigens ist im allgemeinen Falle offenbar sehr wohl möglich, dass ein der gestellten Forderung entsprechendes Coordinatensystem zeitweilig aus dem reellen in imaginäres Gebiet übergeht, und umgekehrt.

Die Bedingungen dafür, dass das in Rede stehende resolvirende System keine Serie von Lösungen besitzt, wären auf dem betretenen analytischen Wege nicht ohne Umstände ausfindig zu machen. Wir setzen diese Frage lieber rückwärts ins anschauliche um. P, P', P'' seien nicht in einer Geraden gelegen. Was für Bedingungen müssen hinzukommen, damit für einen festgehaltenen Augenblick t keine Serie von Coordinatensystemen $X_1 X_2 X_3$ vorhanden ist, relativ wozu P, P', P'' auf den drei vorgeschriebenen geradlinigen Bahnen liegen? Der Voraussetzung gemäss ist nun die Lage des Systemes $X_1 X_2 X_3$ gegen $\Xi H Z$ zur Zeit t eine bestimmte, wofern die Lage der Punkte P, P', P'' relativ zu $X_1 X_2 X_3$ bestimmt ist. Diese Punkte aber haben in dem festgehaltenen Momente bestimmte gegebene Abstände. Die gesuchte ergänzende Bedingung kommt demnach überein mit der Bedingung dafür, dass drei Punkte P, P', P''

von gegebenen Abständen auf drei vorgeschriebenen Geraden G, G', G'' nicht auf unendlich viele verschiedene Arten angeordnet werden können. Schon die Anschauung lässt vermuthen, dass diese Bedingung keine andere ist, als: die vorgeschriebenen Geraden dürfen nicht parallel sein. Durch eine Rechnung, welche hier nicht ausgeführt werden soll, wird diese Vermuthung bestätigt. Damit es eine Serie von Anordnungen dreier fest verbundener Punkte auf drei vorgeschriebenen Geraden giebt, ist erforderlich und hinreichend, dass diese parallel liegen; doch wird hierbei vorausgesetzt, dass man sich auf die Vorschreibung reeller gerader Linien beschränkt[1]).

Fassen wir die gefundenen kinematischen Resultate zusammen: Die geradlinige Bewegung einer Anzahl beweglicher geometrischer Punkte ist Sache der *Convention*, so lange diese Anzahl die 3 nicht übersteigt. Drei Punkte kann man auf drei vorgeschriebenen festen Geraden sich bewegen lassen, indem man das Coordinatensystem, worauf diese festen Geraden bezogen sind, den Distanzveränderungen der Punkte gleichsam anpasst. Solcher angepasster Systeme giebt es im allgemeinen mehrere gegeneinander bewegte; jedenfalls aber keine Serie, wofern die drei Punkte nicht in einer geraden Linie liegen und die drei vorgeschriebenen Geraden nicht parallel sind.

3. Von den vorangegangenen *rein kinematischen* Erwägungen gelangen wir nun zu unserem eigentlichen Probleme, indem wir die *dynamische* Voraussetzung machen, P, P', P'' sollen materiell und sich selbst überlassen sein. Es erhebt sich von selbst die Frage: Kann man vielleicht als »Inertialsystem« einfach ein solches Coordinatensystem definiren, in Bezug worauf drei beliebige nicht in einer Geraden liegende sich selbst überlassene Punkte auf drei nicht parallelen Geraden fortschreiten?

Schon auf Grund einfacher Mannigfaltigkeitsbetrachtungen ist diese Frage zu verneinen. Die Inertialsysteme bilden, wie schon Newton und Euler erkannten[2]), eine Mannigfaltigkeit

1) Das gesagte folgt durch Betrachtung einer gewissen dreireihigen Functionaldeterminante auf die Bedingungen hin, unter welchen sie identisch verschwindet.

2) Newton, Principia pag. 18 (Coroll. V). Euler, Mechanica, Tom. I § 59. 69. 77. 80. 82. (Cf. Theoria motus.) Bei beiden Autoren ist übrigens diese Erkenntniss durch die überflüssige metaphysische Voraussetzung eines realen absoluten Raumes getrübt.

von Systemen, welche gegen eines von ihnen, das wir willkürlich zu Grunde legen können, ohne Drehung geradlinig und (nach inertiellem Zeitmaass) gleichförmig bewegt sind. Der Grad dieser Mannigfaltigkeit ist unschwer anzugeben; wir wollen uns dabei auf orthogonale Systeme beschränken. Fassen wir jedesmal alle gegeneinander unbewegten Inertialsysteme, welche nur durch Ursprung und Axenrichtungen unterschieden sind, in einen Complex zusammen, so giebt es solcher Complexe ∞^3: denn die geradlinige gleichförmige Bewegung eines jeden von ihnen gegen das zu Grunde gelegte Inertialsystem kann in Anbetracht der zwiefach variabeln Richtung und der einfach variabeln Geschwindigkeit verschieden sein. Jeder einzelne Complex enthält aber wiederum ∞^6 Systeme, sodass man es im ganzen mit ∞^9 *orthogonalen Inertialsystemen* zu thun hat[1]. Nun ist aber die Mannigfaltigkeit derjenigen orthogonalen Systeme, worin P, P', P'' irgendwie geradlinig fortschreiten, ∞^{12} (s. o.). Folglich giebt es unter letzteren auch nicht-inertielle Systeme und es handelt sich um weitere Bestimmungen, wodurch die soeben provisorisch aufgestellte zu weite Definition des Inertialsystemes in angemessener Weise beschränkt wird. Im ganz allgemeinen Falle, wo die drei »Fundamentalpunkte« P, P', P'' von beliebiger Art sind, würde, soviel mir scheint. dies nicht leicht auszuführen sein. Anders in dem besonderen Falle, dass wir drei gleichzeitig vom selben Punkte fortgeschleuderte, gleichsam aus einem Punkte hervorgegangene sich selbst überlassene Punkte zu Grunde legen. Alsdann lautet nämlich die nothwendige und hinreichende Beschränkung: Die drei geradlinigen Bahnen müssen aber durch einen Punkt gehen. Um dies zu zeigen, statuire und beweise ich den folgenden

Lehrsatz: Ein System, in Bezug worauf drei nicht in einer geraden Linie liegende materielle Punkte, welche gleichzeitig vom selben Raumpunkte fortgeschleudert und dann sich selbst überlassen wurden, drei durch einen Punkt gehende nicht zusammenfallende Geraden beschreiben, ist ein Inertialsystem.

---

1) Fasst man, wie ich a. a. O. gethan habe, sämmtliche gegeneinander ruhende Inertialsysteme als eines auf (unbekümmert um die kinematisch gleichgiltigen Ursprünge und Axenrichtungen), so ergiebt sich die Mannigfaltigkeit der dreidimensionalen Inertialsysteme als ∞^3. Analog ist die Mannigfaltigkeit der eindimensionalen Inertialzeitscalen, wenn man von der Verlegbarkeit des Nullpunktes absieht, ∞^1.

D. h. mit Bezug auf ein solches System schreitet *jeder beliebige vierte* sich selbst überlassene Punkt ebenfalls geradlinig fort.

Beweis: Ich darf ausgehen von der unzählige Male physikalisch bestätigten Voraussetzung, dass ein Inertialsystem und eine Inertialzeitscala kinematisch möglich sind; d. h. dass mit Bezug auf ein gewisses noch unbekanntes System $\Xi H Z$ und mit Bezug auf eine gewisse noch unbekannte Zeitscala $0 \,.\,.\, t$ die Bewegungen beliebig vieler sich selbst überlassener Punkte geradlinig und gleichförmig sind. Auf dieses System und auf diese Scala denken wir nun alle Bewegungen bezogen. Dabei verlegen wir der Einfachheit halber den Ursprung des ersteren in den gemeinsamen Ausgangspunkt der Fundamentalpunkte P, P', P'', und den Anfangspunkt der Zeitscala analog in den Augenblick, wo diese Punkte zusammenfallen. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich einfach schreiben:

$$\begin{array}{lll} \xi = \varkappa\, t, & \eta = \lambda\, t, & \zeta = \mu\, t, \\ \xi' = \varkappa' t, & \eta' = \lambda' t, & \zeta' = \mu' t, \\ \xi'' = \varkappa'' t, & \eta'' = \lambda'' t, & \zeta'' = \mu'' t, \end{array}$$

worin die $\varkappa$, λ, μ irgendwelche von t unabhängige Grössen sind.

Wie bewegt sich nun gegen $\Xi H Z$ ein solches Coordinatensystem $X_1 X_2 X_3$, in Bezug worauf P, P', P'' längs drei von einem Punkte ausgehenden vorgeschriebenen Geraden fortschreiten? Der Schnittpunkt der Geraden falle in den Ursprung von $X_1 X_2 X_3$, so sind die Gleichungen der vorgeschriebenen Bahnen von der Form $(i = 1, 2, 3)$:

$$x_i = b_i \varphi(t), \qquad x_i' = b_i' \varphi'(t), \qquad x_i'' = b_i'' \varphi''(t),$$

wo die Werthe b vorgeschriebene Constanten und die $\varphi(t)$ unbekannte Functionen von t sind. Das System (2) S. 340 vereinfacht sich also durch den Fortfall der Werthe a.

Ferner wird

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda & \mu \\ \varkappa' & \lambda' & \mu' \\ \varkappa'' & \lambda'' & \mu'' \end{vmatrix} t^3 \equiv R t^3,$$

wo R ein constanter voraussetzungsgemäss von Null verschiedener Werth ist. Die erste Gleichung des Systems (3) S. 341 lässt sich schreiben:

$$R t \alpha_i = \begin{vmatrix} b_i \varphi - \delta_i & \lambda & \mu \\ b_i' \varphi' - \delta_i & \lambda' & \mu' \\ b_i'' \varphi'' - \delta_i & \lambda'' & \mu'' \end{vmatrix},$$

oder: $$Rt\alpha_i = A_i\varphi + A_i'\varphi' + A_i''\varphi'' + B_i\delta_i,$$

endlich nach Divison durch t:

$$R\alpha_i = A_i\frac{\varphi}{t} + A_i'\frac{\varphi'}{t} + A_i''\frac{\varphi''}{t} + B_i\frac{\delta_i}{t}$$

und hier sind die Werthe A und B von t unabhängig. Aehnliche Gleichungen folgen für $R\beta_i$ und $R\gamma_i$. Aus dem Systeme der Orthogonalitätsbedingungen ergiebt sich dann ein resolvirendes System von sechs in den Unbekannten

$$\frac{\varphi}{t}, \frac{\varphi'}{t}, \frac{\varphi''}{t}; \quad \frac{\delta_1}{t}, \frac{\delta_2}{t}, \frac{\delta_3}{t}$$

quadratischen Gleichungen, deren Coefficienten sammt und sonders von t unabhängig sind. Die Lösungen dieses Systems bilden nach dem vorigen keine Serie. Da sie aus lauter von t unabhängigen Werthen p, p', p'', q_1, q_2, q_3, bestehen, so kann man schreiben:

$$\varphi = pt, \quad \varphi' = p't, \quad \varphi'' = p''t; \quad \delta_1 = q_1 t, \quad \delta_2 = q_2 t, \quad \delta_3 = q_3 t.$$

Die sämmtlichen Richtungscosinus nehmen nun zufolge den für $R\alpha_i$, $R\beta_i$, $R\gamma_i$ aufgestellte Gleichungen *constante* Werthe an [1]).

Folglich ist das Coordinatensystem $X_1 X_2 X_3$, in Bezug worauf P, P', P'' längs den drei vorgeschriebenen Geraden fortschreiten, gegen das unbekannte Inertialsystem $\Xi H Z$ ohne Drehung geradlinig und mit Bezug auf die unbekannte Inertialzeitscala $0 \,..\, t$ gleichförmig bewegt. Es bedarf darnach keines analytischen Beweises, dass es ein Inertialsystem ist.

Unter den unzähligen Inertialsystemen, welche aus der gegebenen Definition entspringen durch Veränderung der vorzuschreibenden Combination dreier Geraden, befinden sich reelle und imaginäre. Doch giebt es, wie man sich algebraisch überzeugt, unter jenen Systemen keines, welches aus dem reellen Gebiete zeitweise in imaginäres überginge oder umgekehrt.

Die *ideale Construction eines Inertialsystemes* wäre etwa, wie folgt, zu bewerkstelligen. Drei materielle Punkte werden gleichzeitig vom gleichen Raumpunkte projicirt und dann sich selbst überlassen. Nachdem man sich überzeugt hat, dass sie nicht in

1) Der für das weitere nicht unwesentlichen Voraussetzung, dass nicht plötzlich von einer Lösung auf eine andere davon verschiedene übergesprungen wird, lässt sich genügen durch die Forderung, dass die Punkte in ihren Bahnen stetig fortschreiten sollen.

einer Geraden liegen, verbindet man sie geradlinig mit einem vierten beliebig angenommenen Raumpunkte, wodurch eine dreiseitige körperliche Ecke zu Stande kommt. Lässt man nun diese Ecke unveränderlich ihre Gestalt bewahren und passt man sie den Fundamentalpunkten dermassen an, dass jeder Punkt ununterbrochen auf einer Kante fortschreitet, so ist jedes Coördinatensystem, worin die Ecke eine unveränderliche Lage hat, ein Inertialsystem. Die Ecke kann auch gleich selbst als inertielles Bezugssystem eingeführt werden, nur dürfen dann ihre Kanten nicht in einer Ebene liegen. Es verdient bemerkt zu werden, dass diese Construction stets auf reelle Systeme führt.

III.

Ich habe nun noch auf die vor mir von anderen Seiten gemachten Versuche zur Neufassung des Beharrungsgesetzes mit einigen Worten einzugehen.

Carl Neumann sucht, wie bekannt, dem Gesetze einen verständlichen Inhalt zu geben durch die transcendente oder (wenn man lieber will) transcendentale Annahme, dass das Bezugssystem für den räumlichen Theil des Gesetzes unbekannter Weise durch irgendwelche Materie des Weltraumes repräsentirt sei; etwa derart, dass an einer unbekannten Stelle des Universums ein absolut starrer Körper »Alpha« sich befinde, mit Bezug auf welchen die Bahnen sich selbst überlassener Punkte geradlinig sind[1]). Die damit vorgeschlagene *Existenzhypothese* wäre auch durchaus am Platze, wenn sie *unumgänglich nothwendig* wäre: sie könnte und müsste dann gleich zahlreichen anderen Hypothesen der Naturwissenschaft anstandslos hingenommen werden. In dem vorliegenden Falle kommen wir aber, wie bewiesen sein dürfte, mit einer blossen (zweckmässigen) *Convention* aus, welche unser Erkenntnissbedürfniss weit besser als irgend eine *Hypothese*[2]) zu befriedigen vermag. Im übrigen ist ja die vorgeschlagene Definition des Inertialsystemes nichts anderes als eine Uebertragung der Neumann'schen Zeitmessungsconvention von der eindimensionalen Zeit auf den dreidimensionalen Raum. Dem transcendenten Körper Alpha hätte sich leicht etwa

1) A. a. O. S. 15 f.
2) Mach, a. a. O. S. 48. Vgl. dazu Streintz, a. a. O. S. 9.

eine transcendente Succession »Beta« parallel setzen lassen; wenn man die eine Hypothese unterlässt, so scheint es als eine blosse Consequenz, auch die andere fallen zu lassen.

Mach's Versuch zur Neufassung des Trägheitsgesetzes läuft darauf hinaus, den sich selbst überlassenen Punkt zu beziehen auf die gesammte Weltmaterie [1]). Da dieselbe aber keinen in sich ruhigen Complex bildet, so kann, wie Mach dies auch ausführt, nur von einer »mittleren« Bewegung des Punktes relativ zu ihr die Rede sein. Nun fehlt aber der Nachweis, dass diese Bewegung geradlinig und gleichförmig wäre mit genügender relativer Genauigkeit, dass man sich in etwaigen stellardynamischen Untersuchungen darauf beziehen dürfte; für die dynamische Betrachtung der Planetenbewegung kommen wir andrerseits mit dem als unveränderlich betrachteten Fixsterncomplex aus. Uebrigens fehlt wohl einer Bezugnahme auf die zerstreute und ewig fluthende Materie des Weltalls die wünschenswerthe Einfachheit und Einheitlichkeit.

Streintz definirt als »Fundamentalsystem« ein Coordinatensystem, welches mit einem »Fundamentalkörper« starr verbunden gedacht wird. Seine Definition des Fundamentalkörpers geht aber von folgendem Grundgedanken aus. Das Gyroskop und ähnliche Apparate bieten uns die Mittel zu erkennen, ob ein Körper »frei von Drehbewegung« ist. So schliessen z. B. die Drehungsaxen zweier beliebigen rotirenden Gyroskope unveränderlich einen und denselben Winkel ein; sie bieten uns zwei »unveränderliche« Richtungen, auf welche man nur Bezug zu nehmen hat, um zu constatiren, ob ein gegebener Körper drehend bewegt ist. Die so erkannte Drehung des Körpers soll nämlich eine absolute sein, deshalb, weil sie von der Wahl zweier besonderer Gyroskope unabhängig ist, d. h. immer als dieselbe sich ausweist, was für ein Paar von Gyroskopen man auch anwenden mag. Einen Körper nun, welcher durch gyroskopische Beobachtung als nicht rotirend erkannt worden ist und welcher als vollständig unabhängig von allen umgebenden Körpern betrachtet werden kann, nennt Streintz einen Fundamentalkörper; also ein starr mit ihm verbunden gedachtes Coordinatensystem ein Fundamentalsystem [2]).

---

1) Mach, a. a. O. und »Mechanik«, Leipzig 1883. S. 217 f.
2) Streintz, a. a. O. S. 15—25.

Indem nun **Streintz** das Gesetz von der unveränderlichen Bewegungsrichtung sich selbst überlassener Punkte auf ein Fundamentalsystem bezieht, versucht er den absoluten Raum überflüssig zu machen. Man mag zugeben, dass ihm das im Sinne der *praktischen* Physik gelungen ist. Aber nicht nur entbehren seine Definitionen der wünschenswerthen Eleganz, sondern sie beruhen auch, soweit sie der *theoretischen* Dynamik zu Grunde gelegt werden sollen, auf einem *methodologischen Cirkel*. Der Satz von der gegenseitigen unveränderlichen Neigung aller gyroskopischen Drehungsaxen musste der Definition des Fundamentalsystemes, also auch der Fassung des Beharrungsgesetzes vorangeschickt werden. In einem Lehrbuche der theoretischen Physik würde man gar nicht umhin können, jenen Satz (implicite) umgekehrt wieder aus dem Beharrungsgesetze abzuleiten. Das wäre aber ein Cirkel, völlig vergleichbar dem längst beseitigten Cirkel in der Geometrie, welchen die Zumuthung enthält, die gerade Linie als kürzesten Weg zwischen zwei Punkten zu definiren und nachher nachzuweisen, dass die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten sein müsse. Ich brauche nicht nachzuweisen, dass die oben vorgeschlagene Definition des Inertialsystemes von keinerlei Vorwürfen dieser Art getroffen wird. Nun hat freilich **Streintz** mehrfach versucht, die gegen seinen Versuch soeben erhobenen Einwände von vornherein zurückzuweisen. Allein seine Gründe widerlegen den allerdings nicht berechtigten Vorwurf eines logischen, keineswegs jedoch den Vorwurf eines methodologischen Cirkels[1]. Wenn ich sonach die **Streintz**'sche Fassung des Beharrungsgesetzes für ungeeignet halte, der *theoretischen Dynamik* zur Grundlage zu dienen, so liegt mir natürlich fern, ihr eine *secundäre* Bedeutung an der Stelle abzustreiten, wo es gilt, *den so wichtigen Uebergang von der Theorie zu Anwendung zu vollziehen*[2].

Was übrigens die Nomenclatur »Fundamentalsystem« anlangt, so scheint sie mir nicht glücklich gewählt zu sein. Ein Name für das immer vorzustellende Bezugssystem aller dynamischen Betrachtungen wird gewiss künftighin *unentbehrlich* sein,

---

1) **Streintz**, a. a. O. S. 31. Vgl. Philos. Studien, Bd. II. S. 285.

2) Auf einem analogen methodologischen Cirkel beruht, beiläufig bemerkt, auch die von **Streintz** (a. a. O.) befürwortete **d'Alembert-Poisson**'sche Definition des dynamischen Zeitmaasses. Vgl. Philos. Studien, Bd. II. S. 292 ff.

aber er wird seinen Zweck um so besser erfüllen, je bestimmter er die Ureigenschaft jenes Systemes, nämlich Bezugssystem des Trägheitsgesetzes zu sein, zur Anschauung bringt. Von anderen Vorzügen abgesehen dürfte sich das Wort »Inertial« auch sehr durch seine Fähigkeit zur Zusammensetzung empfehlen. Ich brauche nur an die Worte »Inertialdrehung, Inertialbeschleunigung« u. a. zu erinnern, deren Inhalt dem Mathematiker sofort verständlich ist.

Auf eine aphoristische Bemerkung von Sir W. Thomson und Tait[1]) gründet Streintz eine zweite Definition des Fundamentalsystemes, welche hier von um so grösserem Interesse ist, als sie mit der vorgeschlagenen Definition des Inertialsystemes eine gewisse äusserliche Aehnlichkeit besitzt. Jene Definition, welche übrigens der zuerst gegebenen als »minder naturgemäss« hintangestellt wird, lautet: »Wenn mehrere materielle Punkte aus der nämlichen Lage A nach verschiedenen Richtungen mit beliebigen Geschwindigkeiten geschleudert werden und von nun an jeder Punkt sich selbst überlassen bleibt, so lehrt die Erfahrung, dass die Winkel, welche die durch je zwei der Punkte bestimmten Richtungen miteinander einschliessen. . . ., von unveränderlicher Grösse sind. Ein Coordinatensystem, welches gleichfalls gegen diese Richtungen directionell unverändert bleibt, und welches seinen Anfangspunkt in irgend einem der Punkte hat, soll als Fundamentalsystem bezeichnet werden.« Ich muss nun gestehen, dass diese Definition als grundlegende Definition der Dynamik mir immer noch naturgemässer erscheint denn die andere. Weshalb? Weil sie sich an das *Element* der dynamischen Theorie, an den sich selbst überlassenen Punkt anlehnt, in ähnlicher Weise, wie die Geometrie, d. h. die reine Geometrie, ihre Gebilde aus geometrischen Punkten erzeugt. Davon abgesehen wird freilich auch diese zweite Definition des Fundamentalsystemes von dem Vorwurfe eines methodologischen Cirkels nicht gereinigt werden können. Denn man sieht, es wird darin ebenfalls dem Ausspruche des Beharrungsgesetzes der Ausspruch einer »Erfahrung« vorangestellt, welche sich aus dem Gesetze umgekehrt deduciren lässt, ja welche sich von selbst als Ausfluss des Gesetzes darstellt; nämlich der Erfahrung, dass die von den Verbindungslinien der Punkte eingeschlossenen

---

1) Treatise, Vol. I. P. I. § 249. Streintz, a. a. O. S. 63. Randnote.

Winkel constant sind. Des ferneren ist zu bemerken, dass doch *drei* Punkte vollständig ausreichen und dass jeder weitere Punkt vom Uebel sein würde. Endlich besteht ein gewiss nicht unbeträchtlicher Vorzug der oben vorgeschlagenen Fassung des Beharrungsgesetzes darin, dass sie aufs unmittelbarste nicht nur die Erkenntniss der im Gesetze liegenden *theilweisen Convention*, sondern auch die der unendlichen Vieldeutigkeit des Inertialsystemes an die Hand giebt.

Ich komme zum Schlusse noch auf einen vierten Versuch zu sprechen, der ziemlich gleichzeitig mit meinem früheren an die Oeffentlichkeit getreten ist und als dritter oder vierter Versuch innerhalb eines Jahres zum weiteren Beweise dienen kann, dass die behandelte Frage gegenwärtig eine brennende geworden ist[1]). James Thomson verzichtet auf eine Definition des Inertialsystemes überhaupt, oder richtiger, er hält nicht für nöthig, dem Gesetze eine Definition des zu Grunde zu legenden Raumsystemes *voranzustellen.* Er giebt dem Beharrungsgesetze nämlich Ausdruck, ungefähr wie folgt: Für eine Gruppe sich selbst überlassener materieller Punkte ist *kinematisch möglich* ein und nicht nur ein Coordinatensystem, sondern unendlich viele Systeme, worin dieselben sämmtlich geradlinig fortschreiten; und *kinematisch möglich* eine Zeitscala, mit Bezug worauf sie in ihren geradlinigen Bahnen sämmtlich gleichförmig bewegt sind.

Wer aber nicht weiss, dass es etwas höchst bemerkenswerthes ist, wenn *mehr als drei* Punkte gegen eines und dasselbe Coordinatensystem geradlinig bewegt sind, der würde die zuerst ausgesprochene »grosse Naturwahrheit« nicht voll zu würdigen vermögen. Wenn man also doch einmal nicht umhin kann, jene Erkenntniss zum Ausdrucke zu bringen, so dürfte es bei weitem am zweckmässigsten sein, sie, wie oben geschehen ist, gleich kurz in der Fassung des Gesetzes selbst auszudrücken. Uebrigens stimmt Thomson mit meinen früherhin geäusserten Ansichten in zahlreichen wesentlichen Punkten sehr nahe überein, wie ich mit Freude constatiren darf.

---

1) Proceedings of the R. S. of Edinburgh, Vol. XII. No. 116, p. 568—578. On the Law of Inertia ...

SITZUNG AM 26. OCTOBER 1885.

C. Neumann, *Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontal-Ebene unter dem Einfluss der Schwere*[1]).

Es sei gegeben ein starrer Körper von überall convexer Oberfläche, wie z. B. eine Kugel oder ein Ellipsoid. Dieser Körper mag, unter dem Einfluss der *Schwere*, in Bewegung begriffen sein auf einer festen Horizontal-Ebene, der Art, dass er mit dieser Ebene beständig in Contact bleibt. Während dieser Bewegung werden alsdann im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick *andere* und *andere* Oberflächenpunkte des Körpers mit der Horizontal-Ebene in Contact kommen; doch wird vielleicht auch der Fall eintreten können, dass *ein und derselbe* Oberflächenpunkt längere Zeit hindurch mit jener Ebene in Contact verharrt.

Sind $t - dt$, t, $t + dt$ drei aufeinander folgende Zeitaugenblicke, und betrachtet man dasjenige Oberflächen-Molekül A, welches zur Zeit t mit der Horizontal-Ebene in Contact ist, so wird dasselbe zur Zeit $t - dt$ entweder *oberhalb* oder *in* dieser Ebene sich befunden haben, und zur Zeit $t + dt$ von Neuem *oberhalb* oder *in* dieser Ebene gelegen sein. Die *vertical nach Oben* gerichtete Geschwindigkeits-Componente des Moleküls A wird daher kurz *vor* dem Augenblick t

negativ oder Null,

und kurz *nach* dem Augenblick t

positiv oder Null

sein. Hieraus aber folgt (weil die Bewegung, ihrer Natur nach,

---

1) Dieser Aufsatz wurde der Kgl. Ges. d. Wiss. zum Druck übergeben am 26. October 1885.

eine continuirliche sein muss), dass die genannte Componente im Augenblick t nothwendig $= 0$ ist.

Das Oberflächen-Molekül A kann daher in dem Augenblick t, wo es die Horizontal-Ebene berührt, nur noch eine *horizontale* Geschwindigkeit, also nur noch eine längs dieser Ebene *hingleitende* Bewegung besitzen. Diese horizontale Geschwindigkeit des Moleküls A wird aber nothwendig $= 0$ sein, *sobald man annimmt, dass gleitende Bewegungen, in Folge einer gewissen zwischen Körper und Horizontal-Ebene stattfindenden Adhärenz* (Reibung) *niemals eintreten können.*

Diese Annahme wollen wir in der That machen. Alsdann wird also das Molekül A in dem Augenblick, wo es die Horizontal-Ebene berührt, weder eine *verticale*, noch auch eine *horizontale* Geschwindigkeits-Componente besitzen, folglich *in Ruhe* sein. Die Bewegung des *Körpers selbst* besteht daher in diesem Augenblick in einer Drehung um irgend welche durch A gehende Axe. Auch bedarf es kaum noch der Bemerkung, dass diese *instantane Drehungs-Axe* im Allgemeinen *schräge* liegen wird, dass sie nur ausnahmsweise vertical oder vielleicht auch horizontal sein kann.

Wenn in der Ueberschrift dieses Aufsatzes von einer *rollenden* Bewegung des Körpers die Rede ist, so soll dadurch angedeutet sein, dass zwischen dem Körper und der Horizontal-Ebene eine gewisse *Adhärenz* (Reibung) stattfindet, und dass in Folge dieser Adhärenz das Eintreten irgend welcher *gleitenden* Bewegung als *absolut unmöglich* zu denken ist.

§ 1. Die anzuwendenden Coordinaten.

Es seien 1, 2, 3 die durch den *Schwerpunkt* σ des Körpers gehenden *Hauptträgheitsaxen*. Ferner sei A ein beliebiger Punkt auf der Körper-Oberfläche, und α die in A auf dieser Oberfläche errichtete *innere* Normale. Ueberdies mögen die Coordinaten von A und die Richtungs-Cosinus von α in Bezug auf das Axensystem 1, 2, 3 mit A_1, A_2, A_3 und α_1, α_2, α_3 bezeichnet sein.

Denkt man sich die Lage des Punktes A auf der Körper-Oberfläche durch seine (Gauss'schen) *Flächencoordinaten* p, q bestimmt, so sind A_1, A_2, A_3 und α_1, α_2, α_3 *Functionen* von p, q:

$$
(1.)\qquad \begin{aligned} A_1 &= F_1(p, q), & \alpha_1 &= f_1(p, q), \\ A_2 &= F_2(p, q), & \alpha_2 &= f_2(p, q), \\ A_3 &= F_3(p, q), & \alpha_3 &= f_3(p, q). \end{aligned}
$$

Und zwar werden diese Functionen *völlig bestimmte, gegebene* Functionen sein. Denn wir nehmen an, dass der Körper selbst in bestimmter Weise gegeben ist, und dass überdies auch das System der Flächencoordinaten p, q und die Richtungen der Trägheitsaxen 1, 2, 3 in bestimmter Weise festgesetzt seien.

Ist der Körper eine *homogene Kugel*, also sein Schwerpunkt σ identisch mit dem Kugel-Centrum, so werden als Axen 1, 2, 3 irgend drei aufeinander senkrechte Kugel-Radien zu wählen sein. In diesem Fall kann man zu Flächencoordinaten p, q die gewöhnlichen Polarcoordinaten nehmen, indem man etwa unter p den Winkel des nach A gehenden Radius σA gegen die Axe 1, ferner unter q den Winkel der Ebene $1\sigma A$ gegen die Ebene $1\sigma 2$ versteht. Alsdann erhalten die Formeln (1.) die Gestalt:

$$
\begin{aligned} A_1 &= R\cos p, & \alpha_1 &= -\cos p, \\ A_2 &= R\sin p\cos q, & \alpha_2 &= -\sin p\cos q, \\ A_3 &= R\sin p\sin q, & \alpha_3 &= -\sin p\sin q, \end{aligned}
$$

wo R den Kugel-Radius vorstellt.

Aus (1.) folgt sofort, dass $\frac{\partial A_1}{\partial p}$, $\frac{\partial A_2}{\partial p}$, $\frac{\partial A_3}{\partial p}$ proportional sind mit den Richtungs-Cosinus einer die Körper-Oberfläche im Punkte A (A_1, A_2, A_3) *tangirenden* geraden Linie. Demgemäss ergiebt sich:

$$
(2a.)\qquad \alpha_1\frac{\partial A_1}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial A_2}{\partial p} + \alpha_3\frac{\partial A_3}{\partial p} = 0.
$$

Desgleichen erhält man:

$$
(2b.)\qquad \alpha_1\frac{\partial A_1}{\partial q} + \alpha_2\frac{\partial A_2}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial A_3}{\partial q} = 0.
$$

Hieraus folgt weiter:

$$
(2c.)\qquad \begin{aligned} &\alpha_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial p}dp + \frac{\partial A_1}{\partial q}dq\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial p}dp + \frac{\partial A_2}{\partial q}dq\right) \\ &\qquad + \alpha_3\left(\frac{\partial A_3}{\partial p}dp + \frac{\partial A_3}{\partial q}dq\right) = 0, \end{aligned}
$$

oder einfacher geschrieben:

$$
(2d.)\qquad \alpha_1 dA_1 + \alpha_2 dA_2 + \alpha_3 dA_3 = 0.
$$

Dabei repräsentiren dp, dq *beliebig* zu wählende unendlich kleine Zuwüchse.

Ausser dem mit dem Körper verbundenen und mit ihm sich bewegenden Axensystem 1, 2, 3 mag noch ein zweites, und zwar *unbewegliches* Axensystem x, y, z eingeführt sein. Die yz-Ebene mag zusammenfallen mit der gegebenen Horizontal-Ebene, und die x-Axe vertical *nach Oben* gerichtet sein. Markirt man nun auf der Körper-Oberfläche irgend einen Punkt (p, q), ferner auf der Horizontal-Ebene irgend einen Punkt (y, z), und verlangt man, dass diese beiden Punkte mit einander *zusammenfallen* sollen, und dass daselbst zwischen Körper- und Horizontal-Ebene *Berührung* stattfinden solle, dass mithin die in (p, q) auf der Körper-Oberfläche errichtete innere Normale α parallel sein solle mit der x-Axe, — so wird hierdurch die Position des Körpers bestimmt sein, bis auf eine noch mögliche Rotation um die Normale α. Zur *vollständigen* Positionsbestimmung wird daher, ausser der Angabe von p, q, y, z, noch die Angabe irgend eines *fünften Argumentes* erforderlich sein.

Ein solches fünftes Argument bietet sich nicht gut dar. Gewissermassen als *Surrogat* für dasselbe werden wir im Folgenden ein (noch näher anzugebendes) *unvollständiges Differential* $d\Phi$ oder vielmehr den zugehörigen *unvollständigen Differential-Quotienten* $\frac{d\Phi}{dt}$ einführen, und zwar der Art, dass dieses $\frac{d\Phi}{dt}$ nichts Anderes ist als die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Normale α. Demgemäss wird z. B. die *lebendige Kraft* T des Körpers nur abhängen von p, q, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ und $\frac{d\Phi}{dt}$:

$$(3.)\qquad T = T\left(p,\, q,\, \frac{dp}{dt},\, \frac{dq}{dt},\, \frac{d\Phi}{dt}\right);$$

wie solches im dritten Paragraphen näher dargelegt werden soll.

Was ferner die von der Schwere herrührende *Kräftefunction* U betrifft, so ist offenbar:

$$(4.)\qquad U = -\, Mg\, x_\sigma\,,$$

wo g die Intensität der Schwere, M die Masse des Körpers, und x_σ die x-Coordinate des Körper-Schwerpunktes σ vorstellen. Man übersieht sofort, dass x_σ durch Angabe desjenigen Oberflächenpunktes (p, q), der augenblicklich mit der Horizontalebene in Berührung sein soll, vollständig bestimmt ist.

Demgemäss kann also x_σ, mithin auch U, nur von p, q abhängen:

(5.) $$U = U(p, q).$$

Uebrigens ist diese Function $U(p, q)$ sofort angebbar. Man erhält nämlich $x_\sigma = -(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)$, also auch (4.):

(5a.) $$U = Mg(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3),$$

wo A_1, A_2, A_3 und α_1, α_2, α_3 die in (1.) genannten *gegebenen* Functionen von p, q vorstellen.

§ 2. Allgemeine Formeln für die Bewegung des Körpers.

Betrachtet man irgend ein Molekül m des in Bewegung begriffenen Körpers, und bezeichnet man seine Coordinaten nach den Axen 1, 2, 3 und x, y, z mit l_1, l_2, l_3 und x, y, z, so finden die Relationen statt:

(6.) $$\begin{cases} x = x_\sigma + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, \\ y = y_\sigma + \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3, \\ z = z_\sigma + \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3, \end{cases}$$

wo x_σ, y_σ, z_σ die Coordinaten des Schwerpunkts σ bezeichnen, während die α, β, γ die Richtungs-Cosinus der Trägheits-Axen 1, 2, 3 gegen die festen Axen x, y, z vorstellen. Dabei haben alsdann α_1, α_2, α_3 genau dieselbe Bedeutung wie früher in (1.). Denn die Richtung der x-Axe und die Richtung der im augenblicklichen Contactpunkt A errichteten *inneren Oberflächen-Normale* α sind unter einander identisch. — Aus (6.) ergeben sich durch Differentiation nach der Zeit die Formeln:

$$x' = x_\sigma' + \alpha_1' l_1 + \alpha_2' l_2 + \alpha_3' l_3,$$
$$y' = \text{etc.},$$

oder, was dasselbe ist, die Formeln:

(7.) $$\begin{cases} u = u_\sigma + \alpha_1' l_1 + \alpha_2' l_2 + \alpha_3' l_3, \\ v = v_\sigma + \beta_1' l_1 + \beta_2' l_2 + \beta_3' l_3, \\ w = w_\sigma + \gamma_1' l_1 + \gamma_2' l_2 + \gamma_3' l_3, \end{cases}$$

wo u, v, w und u_σ, v_σ, w_σ die Geschwindigkeiten von m und σ vorstellen, während die Accente Differentiationen nach der Zeit andeuten.

Bringt man die Formeln (6.), (7.) nicht auf ein *beliebiges* Körper-Molekül $m(l_1, l_2, l_3)$, sondern speciell auf *dasjenige* Molekül A (A_1, A_2, A_3) in Anwendung, welches augenblicklich die Contactstelle repräsentirt, so ergeben sich für die Coordinaten x_A, y_A, z_A und Geschwindigkeits-Componenten u_A, v_A, w_A dieses Moleküls folgende Ausdrücke:

$$(8.)\quad \begin{cases} x_A = x_\sigma + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3, \\ y_A = y_\sigma + \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3, \\ z_A = z_\sigma + \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3, \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} u_A = u_\sigma + \alpha_1' A_1 + \alpha_2' A_2 + \alpha_3' A_3, \\ v_A = v_\sigma + \beta_1' A_1 + \beta_2' A_2 + \beta_3' A_3, \\ w_A = w_\sigma + \gamma_1' A_1 + \gamma_2' A_2 + \gamma_3' A_3. \end{cases}$$

Diese Formeln mögen sich auf den Augenblick t beziehen. Im nächstfolgenden Augenblick $t + dt$ hat der Körper bereits eine etwas andere Lage. Statt des Oberflächen-Moleküls (A_1, A_2, A_3) wird alsdann bereits ein benachbartes Oberflächen-Molekül $(A_1 + dA_1, A_2 + dA_2, A_3 + dA_3)$ mit der Horizontal-Ebene in Contact getreten sein. Auch werden alsdann die x_σ, y_σ, z_σ und α, β, γ bereits etwas andere Werthe: $x_\sigma + dx_\sigma$, $y_\sigma + dy_\sigma$, $z_\sigma + dz_\sigma$ und $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ angenommen haben. Bezeichnet man also die Coordinaten der *Contactstelle* in diesem zweiten Augenblick $t + dt$ mit $x_A + \delta x_A$, $y_A + \delta y_A$, $z_A + \delta z_A$, so ergiebt sich aus (8.):

$$(10.)\quad \begin{cases} \delta x_A = (dx_\sigma + A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 + A_3 d\alpha_3) \\ \qquad\qquad + (\alpha_1 dA_1 + \alpha_2 dA_2 + \alpha_3 dA_3), \\ \delta y_A = (dy_\sigma + A_1 d\beta_1 + A_2 d\beta_2 + A_3 d\beta_3) \\ \qquad\qquad + (\beta_1 dA_1 + \beta_2 dA_2 + \beta_3 dA_3), \\ \delta z_A = (dz_\sigma + A_1 d\gamma_1 + A_2 d\gamma_2 + A_3 d\gamma_3) \\ \qquad\qquad + (\gamma_1 dA_1 + \gamma_2 dA_2 + \gamma_3 dA_3), \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass

$$(10\text{a.})\qquad \delta x_A = 0$$

sein muss, weil die Contactstelle stets auf der yz-Ebene liegt. Beachtet man nun aber, dass nicht nur $\delta x_A = 0$, sondern [zufolge (2d.)] auch $\alpha_1 dA_1 + \alpha_2 dA_2 + \alpha_3 dA_3 = 0$ ist, so reducirt sich die erste der Formeln (10.) auf:

$$dx_\sigma + A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 + A_3 d\alpha_3 = 0.$$

Hieraus folgt, falls man durch dt dividirt:

$$u_\sigma + A_1\alpha_1' + A_2\alpha_2' + A_3\alpha_3' = 0,$$

also nach (9.):

$$(11.)\qquad u_A = 0.$$

Diese Gleichung (11.) sagt aus, dass die Geschwindigkeit (u_A, v_A, w_A) des an der Contactstelle befindlichen Moleküls *horizontal* ist. Eine horizontale Geschwindigkeit kann aber dieses Molekül, weil gleitende Bewegungen (nach unserer Voraussetzung) unmöglich sind, niemals besitzen. Folglich wird dieses Molekül augenblicklich *in Ruhe* sein, mithin den Formeln entsprechen:

$$(12)\qquad u_A = 0, \qquad v_A = 0, \qquad w_A = 0;$$

wie solches bereits früher (S. 353) auf etwas einfachere Weise constatirt wurde.

Die Gleichungen (12.) erhalten, falls man für u_A, v_A, w_A ihre Werthe (9.) substituirt, folgende Gestalt:

$$(13.)\qquad \begin{aligned} u_\sigma + \alpha_1'A_1 + \alpha_2'A_2 + \alpha_3'A_3 &= 0, \\ v_\sigma + \beta_1'A_1 + \beta_2'A_2 + \beta_3'A_3 &= 0, \\ w_\sigma + \gamma_1'A_1 + \gamma_2'A_2 + \gamma_3'A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hierdurch reduciren sich die Formeln (10.), (10a.) auf:

$$(14.)\qquad \begin{aligned} 0 = \delta x_A &= \alpha_1 dA_1 + \alpha_2 dA_2 + \alpha_3 dA_3, \\ \delta y_A &= \beta_1 dA_1 + \beta_2 dA_2 + \beta_3 dA_3, \\ \delta z_A &= \gamma_1 dA_1 + \gamma_2 dA_2 + \gamma_3 dA_3; \end{aligned}$$

und hieraus folgt z. B.:

$$(14a.)\qquad \sqrt{(\delta y_A)^2 + (\delta z_A)^2} = \sqrt{(dA_1)^2 + (dA_2)^2 + (dA_3)^2},$$

eine Formel, die *a priori* zu erwarten stand. Denn beide Seiten der Formel repräsentiren die Verrückung der Contactstelle während der Zeit dt, nur mit dem Unterschiede, dass diese Verrückung das eine Mal auf der Horizontal-Ebene, das andere Mal auf der Körper-Oberfläche gemessen ist.

Es erscheint angemessen, hier noch einige Bemerkungen zuzufügen hinsichtlich der Richtungs-Cosinus α, β, γ. — Wir setzen voraus, dass die Axensysteme x, y, z und 1, 2, 3 beide *positiv* sind. Alsdann ist bekanntlich:

$$(15.)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1,$$

und folglich:

$$(16.)\quad \begin{cases} \alpha_1=\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2, \\ \beta_1=\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2, \\ \gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2=\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3, \\ \beta_2=\gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3, \\ \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1, \\ \beta_3=\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1, \\ \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1. \end{cases}$$

Wir wollen ferner unter $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ und Ω_1', Ω_2', Ω_3' folgende *unvollständige* Differentiale und *unvollständige* Differential-Quotienten verstehen:

$$(17.)\quad \begin{cases} d\Omega_1=\alpha_3 d\alpha_2+\beta_3 d\beta_2+\gamma_3 d\gamma_2, \\ d\Omega_2=\alpha_1 d\alpha_3+\beta_1 d\beta_3+\gamma_1 d\gamma_3, \\ d\Omega_3=\alpha_2 d\alpha_1+\beta_2 d\beta_1+\gamma_2 d\gamma_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega_1'=\alpha_3\alpha_2'+\beta_3\beta_2'+\gamma_3\gamma_2', \\ \Omega_2'=\alpha_1\alpha_3'+\beta_1\beta_3'+\gamma_1\gamma_3', \\ \Omega_3'=\alpha_2\alpha_1'+\beta_2\beta_1'+\gamma_2\gamma_1'. \end{cases}$$

Alsdann ist z. B.:

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_1'+\beta_1\beta_1'+\gamma_1\gamma_1' &= 0, \\ \alpha_2\alpha_1'+\beta_2\beta_1'+\gamma_2\gamma_1' &= \Omega_3', \\ \alpha_3\alpha_1'+\beta_3\beta_1'+\gamma_3\gamma_1' &= -\Omega_2'. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit α_1, α_2, α_3 oder mit β_1, β_2, β_3 oder mit γ_1, γ_2, γ_3, und addirt jedesmal, so erhält man die erste Colonne des folgenden Formelsystems:

$$(18.)\quad \begin{cases} \alpha_1'=\alpha_2\Omega_3'-\alpha_3\Omega_2', \\ \beta_1'=\beta_2\Omega_3'-\beta_3\Omega_2', \\ \gamma_1'=\gamma_2\Omega_3'-\gamma_3\Omega_2', \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2'=\alpha_3\Omega_1'-\alpha_1\Omega_3', \\ \beta_2'=\beta_3\Omega_1'-\beta_1\Omega_3', \\ \gamma_2'=\gamma_3\Omega_1'-\gamma_1\Omega_3', \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3'=\alpha_1\Omega_2'-\alpha_2\Omega_1', \\ \beta_3'=\beta_1\Omega_2'-\beta_2\Omega_1', \\ \gamma_3'=\gamma_1\Omega_2'-\gamma_2\Omega_1', \end{cases}$$

dessen zweite und dritte Colonne sich in analoger Weise ergeben. Aus diesen Formeln (18) folgt durch Quadraterhebung resp. durch Multiplication sofort:

$$(19.)\quad \begin{cases} \alpha_1'^2+\beta_1'^2+\gamma_1'^2=\Omega_2'^2+\Omega_3'^2, \\ \alpha_2'^2+\beta_2'^2+\gamma_2'^2=\Omega_3'^2+\Omega_1'^2, \\ \alpha_3'^2+\beta_3'^2+\gamma_3'^2=\Omega_1'^2+\Omega_2'^2, \\ \alpha_2'\alpha_3'+\beta_2'\beta_3'+\gamma_2'\gamma_3'=-\Omega_2'\Omega_3', \\ \alpha_3'\alpha_1'+\beta_3'\beta_1'+\gamma_3'\gamma_1'=-\Omega_3'\Omega_1', \\ \alpha_1'\alpha_2'+\beta_1'\beta_2'+\gamma_1'\gamma_2'=-\Omega_1'\Omega_2'. \end{cases}$$

Multiplicirt man ferner die erste Horizontale des Formelsystems (16.) mit Ω_1', Ω_2', Ω_3' und addirt, so erhält man:

$$\alpha_1\Omega_1'+\alpha_2\Omega_2'+\alpha_3\Omega_3'=\beta_1(\gamma_2\Omega_3'-\gamma_3\Omega_2')+\beta_2(\gamma_3\Omega_1'-\gamma_1\Omega_3') + \beta_3(\gamma_1\Omega_2'-\gamma_2\Omega_1'),$$

also mit Rücksicht auf die letzte Horizontale des Systems (18.)

$$= \beta_1 \gamma_1' + \beta_2 \gamma_2' + \beta_3 \gamma_3'.$$

In dieser und ähnlicher Weise erhält man im Ganzen folgende drei Formeln:

$$(20.) \quad \begin{cases} \alpha_1 \Omega_1' + \alpha_2 \Omega_2' + \alpha_3 \Omega_3' = \beta_1 \gamma_1' + \beta_2 \gamma_2' + \beta_3 \gamma_3'. \\ \beta_1 \Omega_1' + \beta_2 \Omega_2' + \beta_3 \Omega_3' = \gamma_1 \alpha_1' + \gamma_2 \alpha_2' + \gamma_3 \alpha_3', \\ \gamma_1 \Omega_1' + \gamma_2 \Omega_2' + \gamma_3 \Omega_3' = \alpha_1 \beta_1' + \alpha_2 \beta_2' + \alpha_3 \beta_3'. \end{cases}$$

§. 3. Berechnung der lebendigen Kraft.

Hält man fest an den im vorhergehenden Paragraph eingeführten Bezeichnungen, so ergiebt sich für die *lebendige Kraft* T des Körpers die Formel:

$$2T = \Sigma m (u^2 + v^2 + w^2).$$

Diese Formel kann, falls man für u, v, w die Werthe (7.) substituirt, und dabei die bekannten Relationen

$$\Sigma m = M, \quad \Sigma m l_1 = \Sigma m l_2 = \Sigma m l_3 = 0,$$
$$\Sigma m l_2 l_3 = \Sigma m l_3 l_1 = \Sigma m l_1 l_2 = 0$$

beachtet, auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} 2T = (u_\sigma^2 + v_\sigma^2 + w_\sigma^2) M &+ (\alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2) \Sigma m l_1^2 \\ &+ (\alpha_2'^2 + \beta_2'^2 + \gamma_2'^2) \Sigma m l_2^2 \\ &+ (\alpha_3'^2 + \beta_3'^2 + \gamma_3'^2) \Sigma m l_3^2, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (19.) auch so:

$$\begin{aligned} 2T = (u_\sigma^2 + v_\sigma^2 + w_\sigma^2) M &+ (\Omega_2'^2 + \Omega_3'^2) \Sigma m l_1^2 \\ + (\Omega_3'^2 + \Omega_1'^2) \Sigma m l_2^2 &+ (\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2) \Sigma m l_3^2, \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist, auch so:

$$(21.) \quad 2T = M(u_\sigma^2 + v_\sigma^2 + w_\sigma^2) + \mathsf{M}_1 \Omega_1'^2 + \mathsf{M}_2 \Omega_2'^2 + \mathsf{M}_3 \Omega_3'^2,$$

wo die Grössen

$$(22.) \quad \mathsf{M}_1 = \Sigma m (l_2^2 + l_3^2), \quad \mathsf{M}_2 = \Sigma m (l_3^2 + l_1^2), \quad \mathsf{M}_3 = \Sigma m (l_1^2 + l_2^2)$$

die den Axen 1, 2, 3 entsprechenden *Hauptträgheitsmomente* des Körpers bezeichnen, während M seine *Masse* vorstellt.

Nun ist nach (13.):

$$\begin{aligned} -u_\sigma &= \alpha_1' A_1 + \alpha_2' A_2 + \alpha_3' A_3, \\ -v_\sigma &= \beta_1' A_1 + \beta_2' A_2 + \beta_3' A_3, \\ -w_\sigma &= \gamma_1' A_1 + \gamma_2' A_2 + \gamma_3' A_3, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (19):

$$u_\sigma^2+v_\sigma^2+w_\sigma^2=(\Omega_2'^2+\Omega_3'^2)A_1^2+(\Omega_3'^2+\Omega_1'^2)A_2^2+(\Omega_1'^2+\Omega_2'^2)A_3^2$$
$$-2\Omega_2'\Omega_3'A_2A_3-2\Omega_3'\Omega_1'A_3A_1-2\Omega_1'\Omega_2'A_1A_2,$$

oder, was dasselbe ist:

$$u_\sigma^2+v_\sigma^2+w_\sigma^2=(A_1^2+A_2^2+A_3^2)(\Omega_1'^2+\Omega_2'^2+\Omega_3'^2)$$
$$-(A_1\Omega_1'+A_2\Omega_2'+A_3\Omega_3')^2.$$

Dies in (21.) substituirt, ergiebt sich:

$$(23.)\quad 2T=M(A_1^2+A_2^2+A_3^2)(\Omega_1'^2+\Omega_2'^2+\Omega_3'^2)$$
$$-M(A_1\Omega_1'+A_2\Omega_2'+A_3\Omega_3')^2+\mathsf{M}_1\Omega_1'^2+\mathsf{M}_2\Omega_2'^2+\mathsf{M}_3\Omega_3'^2.$$

Es handelt sich darum, diesen Ausdruck der lebendigen Kraft auf die in (3.) *genannte Form zu bringen.* Und hiezu wird, weil A_1, A_2, A_3 [vgl. (1.)] gegebene Functionen von p, q sind, nur noch erforderlich sein, zu zeigen, dass Ω_1', Ω_2', Ω_3' ausdrückbar sind durch p, q, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$, wobei allerdings das $\frac{d\Phi}{dt}$ seine Definition noch erst erwartet. Um nun den Ausdruck (23.) in jene in (3.) genannte Form zu versetzen, beginnen wir mit folgenden einfachen Betrachtungen.

Für jedwedes Zeitelement dt sind $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ definirt durch die Formeln (17.). Wir wollen nun irgendwo im Raume ein *Linienelement* $d\Omega$ uns vorstellen, welches seiner *Richtung* und *Länge* nach den Formeln entspricht:

$$(24.)\quad \begin{cases} d\Omega_1 = d\Omega\cos(d\Omega, 1), \\ d\Omega_2 = d\Omega\cos(d\Omega, 2), \\ d\Omega_3 = d\Omega\cos(d\Omega, 3). \end{cases}$$

Dabei sollen 1, 2, 3 die Richtungen der Hauptträgheitsaxen zur Zeit t, d. i. zu *Anfang* des Zeitelementes dt vorstellen. Demgemäss werden alsdann $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ die *Componenten* des Linienelementes $d\Omega$ nach jenen Richtungen 1, 2, 3, zu nennen sein.

Ueberdies wollen wir, ausser den Axensystemen 1, 2, 3 und x, y, z, noch ein drittes *positives* rechtwinkliges Axensystem f, g, h von vorläufig *beliebiger* Lage einführen. Dabei mögen, der Bequemlichkeit halber, alle in Betracht kommenden Richtungen: $d\Omega$, 1, 2. 3, x, y, z, f, g, h von *ein und demselben*

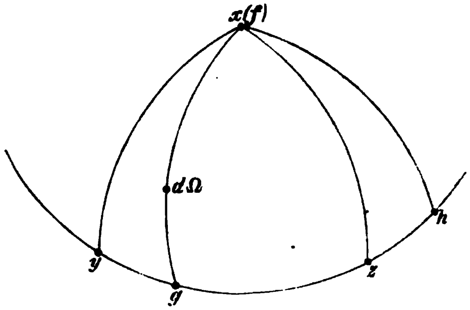
Raumpunkt ausgehend gedacht werden. Um diesen Punkt, als Centrum, sei eine Kugelfläche vom Radius *Eins* beschrieben; sodass also die genannten zehn Richtungen durch ebenso viele Punkte auf dieser Kugelfläche angedeutet werden können.

Bezeichnet man die Componenten des Linienelementes $d\Omega$ nach den Axen f, g, h mit $d\Omega_f$, $d\Omega_g$, $d\Omega_h$, so ist offenbar:

$$
\begin{aligned}
d\Omega_1 &= f_1 d\Omega_f + g_1 d\Omega_g + h_1 d\Omega_h, \\
d\Omega_2 &= f_2 d\Omega_f + g_2 d\Omega_g + h_2 d\Omega_h, \qquad (25.) \\
d\Omega_3 &= f_3 d\Omega_f + g_3 d\Omega_g + h_3 d\Omega_h,
\end{aligned}
$$

wo f_1, f_2, f_3 die Richtungs-Cosinus der Axe f in Bezug auf 1, 2, 3 verstellen, und g_1, g_2, g_3 und h_1, h_2, h_3 die analogen Bedeutungen haben für die Axen g und h. Disponirt man jetzt über die Lage des neuen Systems f, g, h in solcher Weise, dass die f-Axe mit der x-Axe zusammenfätlt, und dass ferner das Linienelement $d\Omega$ in die xg-Ebene fällt, so gewinnt unsere auf der Kugelfläche gedachte Figur folgendes Aussehen:

(26.)



Hier ist z. B. unter $d\Omega$ derjenige *Punkt* der Kugelfläche zu verstehen, durch welchen die Richtung des Linienelements $d\Omega$ dargestellt wird.

Bezeichnet man also die Componenten des Linienelementes $d\Omega$ nach den *gegenwärtigen*, in (26.) angegebenen Axen x, g, h mit $d\Phi$, $d\Theta$, $d\mathrm{H}$, so wird $d\mathrm{H} = 0$ sein, weil die h-Axe senkrecht gegen die xg-Ebene, mithin auch senkrecht gegen $d\Omega$ ist. Demgemäss nehmen die Formeln (25.) gegenwärtig die Gestalt an:

$$(27.)\quad \begin{cases} d\Omega_1 = \alpha_1 d\Phi + g_1 d\Theta, \\ d\Omega_2 = \alpha_2 d\Phi + g_2 d\Theta, \\ d\Omega_3 = \alpha_3 d\Phi + g_3 d\Theta, \end{cases}$$

wo α_1, α_2, α_3 (ebenso wie früher) die Richtungs-Cosinus der x-Axe in Bezug auf 1, 2, 3 vorstellen. Aus (27.) folgt sofort:

$$(28.)\quad \begin{cases} \alpha_1 d\Omega_1 + \alpha_2 d\Omega_2 + \alpha_3 d\Omega_3 = d\Phi, \\ g_1 d\Omega_1 + g_2 d\Omega_2 + g_3 d\Omega_3 = d\Theta, \\ h_1 d\Omega_1 + h_2 d\Omega_2 + h_3 d\Omega_3 = 0; \end{cases}$$

und die *erste* dieser Formeln (28.) gewinnt mit Rücksicht auf (20.) die Gestalt:

$$(29)\qquad d\Phi = \beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3 .$$

Dies ist die *Definition* des einzuführenden Differentials $d\Phi$, von welchem bereits in (3.) die Rede war.

Die h-Axe steht senkrecht gegen x und $d\Omega$ [vgl. (26)]. Somit ergiebt sich:

$$h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3 = 0,$$
$$h_1 d\Omega_1 + h_2 d\Omega_2 + h_3 d\Omega_3 = 0,$$

folglich:

$$h_1 : h_2 : h_3 = (\alpha_2 d\Omega_3 - \alpha_3 d\Omega_2) : (\alpha_3 d\Omega_1 - \alpha_1 d\Omega_3) : (\alpha_1 d\Omega_2 - \alpha_2 d\Omega_1),$$

also mit Rücksicht auf die erste Horizontale des Systems (18.):

$$h_1 : h_2 : h_3 = \alpha_1' : \alpha_2' : \alpha_3',$$

folglich:

$$(30.)\ h_1 = \frac{\alpha_1'}{\Delta},\ h_2 = \frac{\alpha_2'}{\Delta},\ h_3 = \frac{\alpha_3'}{\Delta},\ \text{wo } \Delta^2 = \alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2.$$

Da nun ferner das Axensystem x, g, h *positiv und rechtwinklig* sein soll, so ist (vgl. die analogen Formeln (15.), (16.)]:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = 1,$$

und:

$$g_1 = h_2\alpha_3 - h_3\alpha_2,\quad g_2 = h_3\alpha_1 - h_1\alpha_3,\quad g_3 = h_1\alpha_2 - h_2\alpha_1.$$

Hieraus folgt, falls man für h_1, h_2, h_3 die Werthe (30.) einsetzt:

$$(31.)\ g_1 = \frac{\alpha_3\alpha_2' - \alpha_2\alpha_3'}{\Delta},\ g_2 = \frac{\alpha_1\alpha_3' - \alpha_3\alpha_1'}{\Delta}\ g_3 = \frac{\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2'}{\Delta}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$g_1\Omega_1' + g_2\Omega_2' + g_3\Omega_3' = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_1'(\alpha_2\Omega_3' - \alpha_3\Omega_2') + \alpha_2'(\text{etc.}) + \alpha_3'(\text{etc.})\right],$$

also mit Rücksicht auf (18.):

$$= \frac{1}{\Delta}[\alpha_1'\alpha_1' + \alpha_2'\alpha_2' + \alpha_3'\alpha_3'],$$

also mit Rücksicht auf die in (30.) angegebene Bedeutung von Δ:

$$g_1\Omega_1' + g_2\Omega_2' + g_3\Omega_3' = \Delta,$$

also mit Hinblick auf die *zweite* der Formeln (28.):

$$(32.)\qquad \frac{d\Theta}{dt} = \Delta, \text{ d. i. } \Theta' = \Delta.$$

Substituirt man jetzt diesen Werth von Δ in den Formeln (30.), (31), so erhält man:

$$(33.)\qquad h_1 = \frac{d\alpha_1}{d\Theta},\quad h_2 = \frac{d\alpha_2}{d\Theta},\quad h_3 = \frac{d\alpha_3}{d\Theta},$$

$$(34.)\quad g_1 = \frac{\alpha_3 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3}{d\Theta},\quad g_2 = \frac{\alpha_1 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_1}{d\Theta},\quad g_3 = \frac{\alpha_2 d\alpha_1 - \alpha_1 d\alpha_2}{d\Theta}.$$

Hierdurch aber gewinnen die Formeln (27.) die Gestalt:

$$(35.)\qquad \begin{cases} d\Omega_1 = \alpha_1 d\Phi + \alpha_3 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3, \\ d\Omega_2 = \alpha_2 d\Phi + \alpha_1 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_1, \\ d\Omega_3 = \alpha_3 d\Phi + \alpha_2 d\alpha_1 - \alpha_1 d\alpha_2; \end{cases}$$

woraus z. B. folgt:

$$(36.)\quad (d\Omega_1)^2 + (d\Omega_2)^2 + (d\Omega_3)^2 = (d\Phi)^2 + (d\alpha_1)^2 + (d\alpha_2)^2 + (d\alpha_3)^2.$$

Durch (35.), (36.) erhält schliesslich der in (23.) für die lebendige Kraft T aufgestellte Ausdruck folgende Gestalt:

$$(37.)\quad 2T = M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\left[\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)^2\right]$$
$$- M\left[A_1\left(\alpha_1\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\alpha_3 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3}{dt}\right) + \dots\right]^2$$
$$+ \left[\mathsf{M}_1\left(\alpha_1\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\alpha_3 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3}{dt}\right)^2 + \dots\right],$$

wobei unter $d\Phi$ das in (29.) angegebene *unvollständige Differential* zu verstehen ist:

$$(37a.)\qquad d\Phi = \beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3.$$

Nun sind $A_1, A_2, A_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ [vgl. (1.)] gegebene Functionen von p, q. *Demgemäss hat der Ausdruck* (37.) *in der That die in* (3.) *angegebene Beschaffenheit.*

§ 4. Die dynamischen Differentialgleichungen.

Nach Constatirung der Formeln (3.), (5.):

$$(38.)\qquad T = T\left(p,\ q,\ \frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt},\ \frac{d\Phi}{dt}\right),\qquad U = U(p,\ q),$$

handelt es sich nun darum, *die dynamischen Differentialgleichungen zu bilden*, auf Grund des Hamilton-Jacobi'schen *Princips:*

$$(39.)\qquad \delta\int (T+U)\,dt = 0 \quad \text{d. i.} \quad \int [\delta(T+U)]\,dt = 0\,.$$

Schwierigkeiten sind dabei nur insofern zu überwinden, als $d\Phi$ ein *unvollständiges* Differential ist, mithin $\delta d\Phi$ wesentlich verschieden ist von $d\delta\Phi$. Um die gegenseitige Beziehung zwischen $\delta d\Phi$ und $d\delta\Phi$ zu ermitteln, werden wir, ausser $d\Phi$ selber, gleichzeitig noch *andere*, ebenfalls *unvollständige* Differentiale in Betracht zu ziehen haben, nämlich $d\Theta$, $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$. Zwischen diesen und $d\Phi$ finden nach (27) die Relationen statt:

$$(40.)\quad \begin{cases} d\Omega_1 = \alpha_1 d\Phi + g_1 d\Theta, \\ d\Omega_2 = \alpha_2 d\Phi + g_2 d\Theta, \\ d\Omega_3 = \alpha_3 d\Phi + g_3 d\Theta, \end{cases} \text{mithin ist auch} \begin{cases} \delta\Omega_1 = \alpha_1 \delta\Phi + g_1 \delta\Theta, \\ \delta\Omega_2 = \alpha_2 \delta\Phi + g_2 \delta\Theta, \\ \delta\Omega_3 = \alpha_3 \delta\Phi + g_3 \delta\Theta. \end{cases}$$

Unterwirft man nun das $d\Omega_1$, welches [nach seiner ursprünglichen Definition (17.)] die Bedeutung hat:

$$(\alpha.)\qquad d\Omega_1 = \alpha_3 d\alpha_2 + \beta_3 d\beta_2 + \gamma_3 d\gamma_2,$$

der Operation δ, so ergiebt sich:

$$(\beta.)\qquad \delta d\Omega_1 = (\alpha_3 \delta d\alpha_2 + \beta_3 \delta d\beta_2 + \gamma_3 \delta d\gamma_2) + (\delta\alpha_3\, d\alpha_2 + \delta\beta_3\, d\beta_2 + \delta\gamma_3\, d\gamma_2).$$

Nach den beiden letzten Colonnen des Systems (18.) ist aber (falls man in der einen d mit δ vertauscht):

$$\begin{cases} d\alpha_2 = \alpha_3 d\Omega_1 - \alpha_1 d\Omega_3, \\ d\beta_2 = \beta_3 d\Omega_1 - \beta_1 d\Omega_3, \\ d\gamma_2 = \gamma_3 d\Omega_1 - \gamma_1 d\Omega_3, \end{cases} \text{und} \begin{cases} \delta\alpha_3 = \alpha_1 \delta\Omega_2 - \alpha_2 \delta\Omega_1, \\ \delta\beta_3 = \beta_1 \delta\Omega_2 - \beta_2 \delta\Omega_1, \\ \delta\gamma_3 = \gamma_1 \delta\Omega_2 - \gamma_2 \delta\Omega_1; \end{cases}$$

woraus durch Multiplication folgt:

$$d\alpha_2 \delta\alpha_3 + d\beta_2 \delta\beta_3 + d\gamma_2 \delta\gamma_3 = - d\Omega_3 \delta\Omega_2;$$

so dass also die Formel (β.) die einfachere Gestalt erhält:

$$(\gamma.)\qquad \delta d\Omega_1 = (\alpha_3 \delta d\alpha_2 + \beta_3 \delta d\beta_2 + \gamma_3 \delta d\gamma) - d\Omega_3 \delta\Omega_2\,.$$

Subtrahirt man von dieser Formel diejenige, welche aus ihr

durch Vertauschung der Operationen d und δ entsteht, so erhält man sofort:

$$(\delta_1.)\qquad \delta d\Omega_1 - d\delta\Omega_1 = d\Omega_2\,\delta\Omega_3 - d\Omega_3\,\delta\Omega_2.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$(\delta_2.)\qquad \delta d\Omega_2 - d\delta\Omega_2 = d\Omega_3\,\delta\Omega_1 - d\Omega_1\,\delta\Omega_3,$$

$$(\delta_3.)\qquad \delta d\Omega_3 - d\delta\Omega_3 = d\Omega_1\,\delta\Omega_2 - d\Omega_2\,\delta\Omega_1.$$

Substituirt man jetzt in (δ_1.) für $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ und $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, $\delta\Omega_3$ die Werthe (40.), so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\delta(\alpha_1 d\Phi + g_1 d\Theta) - d(\alpha_1\delta\Phi + g_1\delta\Theta) = {} & (\alpha_2 d\Phi + g_2 d\Theta)(\alpha_3\delta\Phi + g_3\delta\Theta)\\ & - (\alpha_3 d\Phi + g_3 d\Theta)(\alpha_2\delta\Phi + g_2\delta\Theta),\end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\varepsilon_1.)\qquad \begin{aligned} & \alpha_1(\delta d\Phi - d\delta\Phi) + g_1(\delta d\Theta - d\delta\Theta) + \\ & + (\delta\alpha_1 d\Phi - d\alpha_1\delta\Phi) + (\delta g_1 d\Theta - dg_1\delta\Theta) = \\ & = (\alpha_2 g_3 - \alpha_3 g_2)(d\Phi\delta\Theta - d\Theta\delta\Phi).\end{aligned}$$

Ebenso wie diese Formel (ε_1.) aus (δ_1.) entstanden ist, ebenso entstehen analoge Formeln (ε_2.) und (ε_3.) aus (δ_2.) und (δ_3.). Auch übersieht man sofort, dass die Formeln (ε_1.), (ε_2.), (ε_3.) in einfacher Beziehung *zu einander* stehen, nämlich in einander übergehen durch cyklische Progression der Indices 1, 2, 3. Multiplicirt man daher die Formeln (ε_1.), (ε_2.), ε_3.) respective mit α_1, α_2, α_3, und addirt, so erhält man:

$$(\zeta.)\qquad \begin{aligned}&\delta d\Phi - d\delta\Phi + (\alpha_1\delta g_1 + \alpha_2\delta g_2 + \alpha_3\delta g_3)\,d\Theta\\ &- (\alpha_1 dg_1 + \alpha_2 dg_2 + \alpha_3 dg_3)\,\delta\Theta = 0.\end{aligned}$$

Nach (26.) ist $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0$, mithin:

$$\alpha_1 dg_1 + \alpha_2 dg_2 + \alpha_3 dg_3 = -(g_1 d\alpha_1 + g_2 d\alpha_2 + g_3 d\alpha_3).$$

Das hier auf der *rechten* Seite stehende Trinom ist aber $= 0$. weil $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$ [vgl. (33.)] mit h_1, h_2, h_3 proportional sind. und die beiden Axen g und h zu einander senkrecht stehen. Demgemäss wird also:

$$\alpha_1 dg_1 + \alpha_2 dg_2 + \alpha_3 dg_3 = 0,$$

wodurch die Formel (ζ.) die einfachere Gestalt erhält:

$$(\eta.)\qquad \delta d\Phi - d\delta\Phi + (\alpha_1\delta g_1 + \alpha_2\delta g_2 + \alpha_3\delta g_3)\,d\Theta = 0.$$

Hieraus aber folgt sofort:

$$(\vartheta.)\qquad \delta d\Phi - d\delta\Phi = (g_1\delta\alpha_1 + g_2\delta\alpha_2 + g_3\delta\alpha_3)\,d\Theta,$$

oder, mit Rücksicht auf (34.):

$(\iota.)$ $\delta d\Phi - d\delta\Phi = (\alpha_3 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3)\,\delta\alpha_1 + (\alpha_1 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_1)\,\delta\alpha_2 + (\alpha_2 d\alpha_1 - \alpha_1 d\alpha_2)\,\delta\alpha_3.$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine *Determinante*, und kann (falls man jede Determinante durch Niederschrift ihrer ersten Horizontal-Reihe andeutet) folgendermassen dargestellt werden:

$$\left|\ \delta\alpha_1,\ d\alpha_1,\ \alpha_1\ \right|,$$

oder, weil α_1, α_2, α_3 [vgl. (1.)] gegebene Functionen von p, q sind, auch so:

$$\left|\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial p}\delta p + \frac{\partial\alpha_1}{\partial q}\delta q,\quad \frac{\partial\alpha_1}{\partial p}dp + \frac{\partial\alpha_1}{\partial q}dq,\quad \alpha_1\ \right|,$$

oder, was dasselbe ist, auch so:

$$\left|\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial p},\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial q},\ \alpha_1\ \right| \cdot (\delta p\, dq - \delta q\, dp)\,.$$

Die Formel $(\iota.)$ gewinnt daher folgende Gestalt:

$$(41.)\qquad \delta d\Phi = d\delta\Phi + S\,(\delta p\, dq - dp\,\delta q)\,,$$

wo der Factor S die Bedeutung hat:

$$(41\text{ a.})\qquad S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \frac{\partial\alpha_1}{\partial p} & \frac{\partial\alpha_1}{\partial q} \\ \alpha_2 & \frac{\partial\alpha_2}{\partial p} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial q} \\ \alpha_3 & \frac{\partial\alpha_3}{\partial p} & \frac{\partial\alpha_3}{\partial q} \end{vmatrix},$$

und wo also S [ebenso wie α_1, α_2, α_3, vgl. (1.)] eine *gegebene* Function von p, q vorstellt.

Nachdem in dieser Weise die gegenseitige Beziehung zwischen $\delta d\Phi$ und $d\delta\Phi$ zu Tage gefördert ist, kehren wir zurück zu den zu Anfang dieses Paragraphen genannten Formeln (38.), (39.). Aus (38.) folgt sofort:

$$(42.)\qquad \delta(T+U) = \frac{\partial(T+U)}{\partial p}\delta p + \frac{\partial(T+U)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial p'}\delta p' + \frac{\partial T}{\partial q'}\delta q' + \frac{\partial T}{\partial\Phi'}\delta\Phi',$$

wo die Accente Differentialquotienten nach der Zeit andeuten. Nun ist ohne Weiteres:

$$(\alpha.)\qquad \delta p' = \delta\frac{dp}{dt} = \frac{d\,(\delta p)}{dt}\,,$$

$$(\beta.)\qquad \delta q' = \delta\frac{dq}{dt} = \frac{d\,(\delta q)}{dt}\,,$$

hingegen nach (41.):

$$(\gamma.)\qquad \delta\Phi' = \delta\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(\delta\Phi)}{dt} + S\left(\frac{dq}{dt}\delta p - \frac{dp}{dt}\delta q\right).$$

Diese Werthe (α.), (β.), (γ.) in (42.) substituirt, erhält man:

$$(43.)\quad \delta(T+U) = \left(\frac{\partial(T+U)}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial\Phi'}Sq'\right)\delta p + \left(\frac{\partial(T+U)}{\partial q} - \frac{\partial T}{\partial\Phi'}Sp'\right)\delta q$$
$$+ \frac{\partial T}{\partial p'}\frac{d(\delta p)}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q'}\frac{d(\delta q)}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\Phi'}\frac{d(\delta\Phi)}{dt}.$$

Lässt man aber diesen Werth von $\delta(T+U)$ eintreten in die Formel (39.) des *Hamilton-Jacobi'schen Princips*, so gelangt man in bekannter Weise zu folgenden Gleichungen:

$$(44.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(T+U)}{\partial p} + \dfrac{\partial T}{\partial\Phi'}Sq' = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p'}, \\[2ex] \dfrac{\partial(T+U)}{\partial q} - \dfrac{\partial T}{\partial\Phi'}Sp' = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'}, \\[2ex] 0 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\Phi'}. \end{cases}$$

Aus der letzten Formel folgt sofort

$$\frac{\partial T}{\partial\Phi'} = \text{Const.} = C.$$

Und hierdurch gewinnen die Gleichungen (44.) folgendes Aussehen:

$$(45.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial\Phi'} = C, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p'} - \dfrac{\partial(T+U)}{\partial p} = +CSq', \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'} - \dfrac{\partial(T+U)}{\partial q} = -CSp'. \end{cases}$$

Dies dürfte die einfachste Gestalt der hier aufzustellenden dynamischen Differentialgleichungen sein. Dabei ist zu beachten, dass C eine durch den Anfangszustand zu bestimmende Constante, S hingegen eine gegebene Function von p, q vorstellt [vgl. (41 a.)].

§ 5. Das Princip der lebendigen Kraft.

Multiplicirt man die drei Gleichungen (44.) respective mit p', q', Φ', und addirt, so erhält man:

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial p} p' + \frac{\partial (T+U)}{\partial q} q' =$$
$$= p' \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'} + q' \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'} + \Phi' \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \Phi'},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial p} p' + \frac{\partial (T+U)}{\partial q} q' + \frac{\partial T}{\partial p'} p'' + \frac{\partial T}{\partial q'} q'' + \frac{\partial T}{\partial \Phi'} \Phi'' =$$
$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial p'} p' + \frac{\partial T}{\partial q'} q' + \frac{\partial T}{\partial \Phi'} \Phi' \right).$$

Die *linke* Seite dieser Formel ist offenbar nichts Anderes, als der vollständige Differentialquotient von $(T + U)$ nach der Zeit. Andererseits ist das auf der *rechten* Seite in Parenthese gestellte Trinom identisch mit $2\,T$, wie sich sofort ergiebt, falls man nur beachtet, dass T eine homogene Function zweiten Grades von p', q', Φ' ist. Demgemäss geht also die Formel über in:

$$\frac{d\,(T+U)}{dt} = \frac{d\,(2\,T)}{dt};$$

woraus durch Integration sich ergiebt:

(46.) $$T - U = \text{Const.} = H;$$

dies aber ist das *Princip der lebendigen Kraft.*

Bemerkung. — Von ähnlicher Einfachheit wie die Formel (46.) ist offenbar die erste der Formeln (45.):

(47.) $$\frac{\partial T}{\partial \Phi'} = \text{Const.} = C.$$

Wir werden weiterhin zeigen, dass diese letztere Formel einen *Flächensatz* repräsentirt, oder wenigstens einen Satz repräsentirt, der dem Flächensatz *nahe verwandt* ist. Einstweilen sei nur bemerkt, dass die doppelte lebendige Kraft [nach (23.) und (27.)] folgendermassen darstellbar ist:

(48.) $$\begin{aligned} 2\,T = {} & M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(\Phi'^2 + \Theta'^2) \\ & - M[(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)\Phi' + (A_1 g_1 + A_2 g_2 + A_3 g_3)\Theta']^2 \\ & + \mathsf{M}_1(\alpha_1\Phi' + g_1\Theta')^2 + \mathsf{M}_2(\alpha_2\Phi' + g_2\Theta')^2 + \mathsf{M}_3(\alpha_3\Phi' + g_3\Theta')^2, \end{aligned}$$

dass mithin die linke Seite der Formel (47.) den Werth besitzt:

(49.) $$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \Phi'} = {} & M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\Phi' \\ & - M[(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)\Phi' + (A_1 g_1 + \cdots)\Theta'](A_1\alpha_1 + \cdots) \\ & + (\mathsf{M}_1\alpha_1^2 + \mathsf{M}_2\alpha_2^2 + \cdots)\Phi' + (\mathsf{M}_1\alpha_1 g_1 + \cdots)\Theta'. \end{aligned}$$

Der Uebergang von (48.) zu (49.) d. i. die Differentiation von T nach Φ' ist völlig correct. [Man erkennt solches am Einfachsten, wenn man statt der soeben benutzten Formeln (27.) die etwas umständlicheren Formeln (35.) anwendet, und dabei beachtet, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, A_1, A_2, A_3$ *gegebene* Functionen von p, q vorstellen.]

§ 6. Die instantane Drehungs-Axe.

Substituirt man in den Formeln (7.) für $u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$ die aus (13.) sich ergebenden Werthe, so erhält man sofort:

$$(50.)\quad \begin{aligned} u &= \alpha_1'(l_1 - A_1) + \alpha_2'(l_2 - A_2) + \alpha_3'(l_3 - A_3), \\ v &= \beta_1'(l_1 - A_1) + \beta_2'(l_2 - A_2) + \beta_3'(l_3 - A_3), \\ w &= \gamma_1'(l_1 - A_1) + \gamma_2'(l_2 - A_2) + \gamma_3'(l_3 - A_3). \end{aligned}$$

Hier bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeits-Componenten eines *ganz beliebigen* Körpermoleküls $m(l_1, l_2, l_3)$. Und gleichzeitig sind A_1, A_2, A_3 die (den Axen 1, 2, 3 entsprechenden) Coordinaten des augenblicklichen Contactpunctes.

Denkt man sich die Geschwindigkeit (u, v, w) des Moleküls $m(l_1, l_2, l_3)$ in drei Componenten zerlegt nach den Axen 1, 2, 3, und diese Componenten mit $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$ bezeichnet, so ist offenbar z. B.:

$$\mathfrak{v}_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w,$$

also nach (50.):

$$\mathfrak{v}_1 = (\alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2')(l_2 - A_2) + (\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3')(l_3 - A_3),$$

also mit Rücksicht auf (17.):

$$(51.)\quad \begin{cases} \mathfrak{v}_1 = \Omega_2'(l_3 - A_3) - \Omega_3'(l_2 - A_2). \text{ Ebenso ergiebt sich:} \\ \mathfrak{v}_2 = \Omega_3'(l_1 - A_1) - \Omega_1'(l_3 - A_3), \\ \mathfrak{v}_3 = \Omega_1'(l_2 - A_2) - \Omega_2'(l_1 - A_1). \end{cases}$$

Diese Formeln (51.) zeigen von Neuem, dass dasjenige Molekül m, welches an der Berührungsstelle sich befindet, dessen Coordinaten l_1, l_2, l_3 also gleich A_1, A_2, A_3 sind, *augenblicklich in Ruhe* ist. Sie zeigen ferner aber auch, dass Gleiches von all' denjenigen Molekülen m gilt, deren Coordinaten l_1, l_2, l_3 der Formel entsprechen:

$$(52.)\quad l_1 - A_1 : l_2 - A_2 : l_3 - A_3 = \Omega_1' : \Omega_2' : \Omega_3'.$$

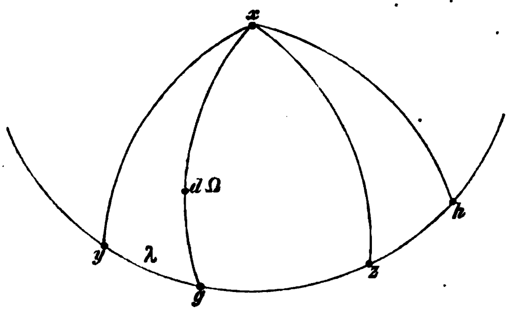
Diese *augenblicklich ruhenden* Moleküle bilden daher zusammengenommen eine gerade Linie, — die *instantane Drehungs-*

axe. Diese Axe geht, wie aus (52.) ersichtlich, durch den Contactpunkt (A_1, A_2, A_3), und ist gegen die Trägheits-Axen 1, 2, 3 unter Winkeln geneigt, deren Cosinus proportional sind mit Ω_1', Ω_2', Ω_3', d. i. mit $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$. *Das früher von uns construirte Linienelement* $d\Omega$ [vergl. (24.)] *repräsentirt daher die Richtung der instantanen Axe.*

§ 7. Das horizontale Azimuth der instantanen Axe.

Die im Contactpunkt errichtete (der x-Axe parallele) *Normale* und die durch den Contactpunkt gehende *instantane Axe* bilden zusammengenommen eine Verticalebene, die im Allgemeinen *in Drehung begriffen* sein wird. Es soll das Azimuth dieser Verticalebene gegen die *feste* Verticalebene xy mit λ bezeichnet, und näher untersucht werden. In der schon früher (26.) entworfenen Figur

(53.)



ist offenbar λ derjenige Winkel, unter welchem die beiden Axen y und g gegen einander geneigt sind.

Aus dieser Figur ergiebt sich sofort:

$$(54.)\quad \begin{cases} g_1 = \beta_1 \cos\lambda + \gamma_1 \sin\lambda, \\ g_2 = \beta_2 \cos\lambda + \gamma_2 \sin\lambda, \\ g_3 = \beta_3 \cos\lambda + \gamma_3 \sin\lambda, \end{cases} \quad (54\text{a.})\quad \begin{cases} h_1 = -\beta_1 \sin\lambda + \gamma_1 \cos\lambda, \\ h_2 = -\beta_2 \sin\lambda + \gamma_2 \cos\lambda, \\ h_3 = -\beta_3 \sin\lambda + \gamma_3 \cos\lambda, \end{cases}$$

und hieraus durch Umkehrung:

$$(55.)\quad \begin{cases} \beta_1 = g_1 \cos\lambda - h_1 \sin\lambda, \\ \beta_2 = g_2 \cos\lambda - h_2 \sin\lambda, \\ \beta_3 = g_3 \cos\lambda - h_3 \sin\lambda, \end{cases} \quad (55\text{a.})\quad \begin{cases} \gamma_1 = g_1 \sin\lambda + h_1 \cos\lambda, \\ \gamma_2 = g_2 \sin\lambda + h_2 \cos\lambda, \\ \gamma_3 = g_3 \sin\lambda + h_3 \cos\lambda. \end{cases}$$

Durch Differentiation der Formeln (55a.) folgt mit Rücksicht auf (55.):

$$(56.)\quad \begin{cases} d\gamma_1 - \beta_1 d\lambda = \sin\lambda\,.\,dg_1 + \cos\lambda\,.\,dh_1, \\ d\gamma_2 - \beta_2 d\lambda = \sin\lambda\,.\,dg_2 + \cos\lambda\,.\,dh_2, \\ d\gamma_3 - \beta_3 d\lambda = \sin\lambda\,.\,dg_3 + \cos\lambda\,.\,dh_3. \end{cases}$$

Nunmehr folgt aus den Formeln (55.) und (56.) durch Multiplication:

$$(\beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3) - d\lambda = (g_1 dh_1 + g_2 dh_2 + g_3 dh_3)\cos^2\lambda \\ - (h_1 dg_1 + h_2 dg_2 + h_3 dg_3)\sin^2\lambda,$$

also mit Rücksicht auf (37a.):

$$(57.)\qquad d\Phi - d\lambda = g_1 dh_1 + g_2 dh_2 + g_3 dh_3,$$

oder, falls man für g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3 die Werthe (30.), (31.) substituirt, nach leichter Reduction:

$$(58.)\qquad \frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' & \alpha_1'' \\ \alpha_2 & \alpha_2' & \alpha_2'' \\ \alpha_3 & \alpha_3' & \alpha_3'' \end{vmatrix},$$

wo die Accente Differentiationen nach der Zeit vorstellen. Diese Formel zeigt, dass $d\lambda$ und $d\Phi$ *keineswegs* unter einander identisch sind.

Der innere Grund dieser Nichtübereinstimmung ist leicht angebbar. Es repräsentirt nämlich $d\Phi$, wie aus (25.), (26.), (27.) folgt, den Winkel, um welchen sich der *starre Körper* während der Zeit dt um die x-Axe dreht. Hingegen repräsentirt $d\lambda$ den der Zeit dt entsprechenden Drehungswinkel *der Ebene* xg um jene Axe. Diese beiden Dinge, der starre Körper und die Ebene xg, sind aber keineswegs starr miteinander verbunden, und werden also im Allgemeinen mit *verschiedenen* Geschwindigkeiten um die x-Axe sich drehen.

Beiläufige Formeln. — Aus (31.) folgt durch Multiplication mit $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$ und Addition:

$$(\alpha.)\qquad g_1 d\alpha_1 + g_2 d\alpha_2 + g_3 d\alpha_3 = 0.$$

In gleicher Weise folgt aus (30.):

$$(\beta.)\quad h_1 d\alpha_1 + h_2 d\alpha_2 + h_3 d\alpha_3 = \frac{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2}{\Delta}dt = \Delta\,dt = d\Theta;$$

denn nach (32.) ist $\Delta\,dt = d\Theta$. Fügt man nun zu diesen beiden Formeln (α.), (β.) noch die Gleichung (57.) hinzu, so erhält man folgendes Formelsystem:

$$(59.)\quad \begin{cases} g_1 dh_1 + g_2 dh_2 + g_3 dh_3 = d\Phi - d\lambda, \\ h_1 d\alpha_1 + h_2 d\alpha_2 + h_3 d\alpha_3 = d\Theta, \\ \alpha_1 dg_1 + \alpha_2 dg_2 + \alpha_3 dg_3 = 0. \end{cases}$$

Andererseits folgt aus (55.), (55a.) durch Multiplication mit $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$, und mit Rücksichtnahme auf (59.):

$$\beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 + \beta_3 d\alpha_3 = -\sin\lambda\,.\,d\Theta,$$
$$\gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2 + \gamma_3 d\alpha_3 = +\cos\lambda\,.\,d\Theta.$$

Fügt man hierzu noch die Gleichung (37a.) hinzu, so erhält man folgendes Formelsystem:

$$(60.)\quad \begin{cases} \beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3 = d\Phi \qquad\quad = dA, \\ \gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2 + \gamma_3 d\alpha_3 = \cos\lambda\,.\,d\Theta = dB, \\ \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2 + \alpha_3 d\beta_3 = \sin\lambda\,.\,d\Theta = d\Gamma, \end{cases}$$

wo die rechts beigefügten dA, dB, $d\Gamma$ als blosse Abbreviaturen dienen sollen für spätere Zwecke.

§ 8. Ueber ein dem Flächensatz verwandtes Theorem.

Das hier darzulegende Theorem ist mit dem Flächensatz keineswegs identisch, besitzt aber mit demselben gewisse Aehnlichkeit. Das Theorem lautet:

Rollt der gegebene Körper unter dem Einfluss der Schwere auf einer festen Horizontalebene, und bezeichnet man die augenblicklichen Coordinaten und Geschwindigkeits-Componenten der einzelnen Körpermoleküle m mit x, y, z und u, v, w, ferner die augenblicklichen Cordinaten des Contactpunktes mit x_A, y_A, z_A, so wird die über alle Körpermoleküle ausgedehnte Summe

$$(61.)\qquad \Sigma m\,[(y - y_A)\,w - (z - z_A)\,v]$$

constant sein, d. h. ein und denselben Werth haben für alle Augenblicke der betrachteten Bewegung.

Dabei ist das zu Grunde gelegte feste Axensystem x, y, z der Art zu denken, dass seine yz-Ebene identisch ist mit der gegebenen Horizontalebene. (Mithin ist z. B. x_A stets $= 0$.)

Beweis. — Nach (6.) und (7.) ist:

$$x = x_\sigma + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, \quad u = u_\sigma + \alpha_1' l_1 + \alpha_2' l_2 + \alpha_3' l_3,$$

ferner nach (8.) und (13.):

$$x_A = x_\sigma + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3, \quad 0 = u_\sigma + \alpha_1' A_1 + \alpha_2' A_2 + \alpha_3' A_3.$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$(\alpha.)\quad \xi = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3, \quad u = \alpha_1'\lambda_1 + \alpha_2'\lambda_2 + \alpha_3'\lambda_3,$$

falls man nämlich ξ, η, ζ und λ_1, λ_2, λ_3 als augenblickliche Abkürzungen benutzt für folgende Differenzen:

$$(\beta.)\quad \xi = x - x_A, \quad \eta = y - y_A, \quad \zeta = z - z_A,$$

$$(\gamma.)\quad \lambda_1 = l_1 - A_1, \quad \lambda_2 = l_2 - A_2, \quad \lambda_3 = l_3 - A_3.$$

Die Formeln (α.) repräsentiren offenbar folgende *Formelsysteme*:

$$(\delta.)\begin{cases} \xi = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3, \\ \eta = \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \beta_3\lambda_3, \\ \zeta = \gamma_1\lambda_1 + \gamma_2\lambda_2 + \gamma_3\lambda_3, \end{cases} \qquad (\varepsilon.)\begin{cases} u = \alpha_1'\lambda_1 + \alpha_2'\lambda_2 + \alpha_3'\lambda_3, \\ v = \beta_1'\lambda_1 + \beta_2'\lambda_2 + \beta_3'\lambda_3, \\ w = \gamma_1'\lambda_1 + \gamma_2'\lambda_2 + \gamma_3'\lambda_3. \end{cases}$$

Substituirt man die aus (δ.) für λ_1, λ_2, λ_3 entspringenden Werthe:

$$\lambda_1 = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta,$$
$$\lambda_2 = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta,$$
$$\lambda_3 = \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta$$

in die Formeln (ε.), so ergiebt sich mit Rücksicht auf (60.):

$$(\zeta.)\qquad \begin{cases} u = \mathrm{B}'\zeta - \Gamma'\eta, \\ v = \Gamma'\xi - \mathrm{A}'\zeta, \\ w = \mathrm{A}'\eta - \mathrm{B}'\xi. \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort:

$$\eta w - \zeta v = \mathrm{A}'(\eta^2 + \zeta^2) - \mathrm{B}'\xi\eta - \Gamma'\xi\zeta,$$

oder, falls man für A', B', Γ' ihre eigentlichen Bedeutungen aus (60.) substituirt:

$$\eta w - \zeta v = \Phi'(\eta^2 + \zeta^2) - \Theta' \cos\lambda \,.\, \xi\eta - \Theta' \sin\lambda \,.\, \xi\zeta.$$

Multiplicirt man diese Formel mit der Masse m desjenigen Moleküls, auf welches u, v, w und x, y, z, mithin [nach (β.)] auch ξ, η, ζ sich beziehen, und summirt sodann über *alle* Moleküle des ganzen Körpers, so ergiebt sich:

$$(\eta.)\ \Sigma m(\eta w - \zeta v) = \Phi'\Sigma m(\eta^2 + \zeta^2) - \Theta'\cos\lambda\Sigma m\xi\eta - \Theta'\sin\lambda\Sigma m\xi\zeta.$$

Die Summen rechter Hand sind leicht berechenbar auf Grund der Formeln (δ.), wobei für λ_1, λ_2, λ_3 die Werthe (γ.) zu substituiren sind. Man findet:

$$(\vartheta.)\quad \Sigma m(\eta^2+\zeta^2) = M(A_1^2+A_2^2+A_3^2) - M(A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+A_3\alpha_3)^2 + \mathsf{M}_1\alpha_1^2+\mathsf{M}_2\alpha_2^2+\mathsf{M}_3\alpha_3^2,$$

$$\Sigma m\xi\eta = M(A_1\alpha_1+\cdot\cdot)(A_1\beta_1+\cdots) - (\mathsf{M}_1\alpha_1\beta_1+\cdots),$$

$$\Sigma m\xi\zeta = M(A_1\alpha_1+\cdot\cdot)(A_1\gamma_1+\cdot\cdot) - (\mathsf{M}_1\alpha_1\gamma_1+\cdot\cdot),$$

wo M die Masse des Körpers und M_1, M_2, M_3 seine Hauptträgheitsmomente vorstellen. Multiplicirt man die beiden letzten Formeln mit $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$, und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (54.):

$$(\iota.)\quad \cos\lambda\Sigma m\xi\eta + \sin\lambda\Sigma m\xi\zeta = M(A_1\alpha_1+\cdot\cdot)(A_1g_1+\cdots) - (\mathsf{M}_1\alpha_1g_1+\ldots).$$

Durch Substitution der Werthe (ϑ.), (ι.) gewinnt jetzt die Formel (η.) folgendes Aussehen:

$$(\varkappa.)\quad \Sigma m(\eta w-\zeta v) = [M(A_1^2+\cdot\cdot) - M(A_1\alpha_1+\cdot\cdot)^2 + (\mathsf{M}_1\alpha_1^2+\cdot\cdot)]\Phi' - [M(A_1\alpha_1+\cdot\cdot)(A_1g_1+\cdot\cdot) - (\mathsf{M}_1\alpha_1g_1+\cdot\cdot)]\Theta'.$$

Zufolge (49.) ist aber die rechte Seite dieser Gleichung nichts Anderes, als der Werth von $\frac{dT}{d\Phi'}$. Somit erhält man:

$$(\lambda.)\qquad \Sigma m(\eta w-\zeta v) = \frac{dT}{d\Phi'};$$

also *zufolge des Satzes* (47.):

$$(\mu.)\qquad \Sigma m(\eta w-\zeta v) = \text{Const.}$$

Dies aber ist, falls man für η, ζ ihre Werthe (β.) einsetzt, das zu beweisende Theorem.

§ 9. Ueber die Bestimmung sämmtlicher Variablen als Functionen der Zeit.

Durch die drei Differentialgleichungen (45.) *bestimmen sich zuvörderst*

$$(\mathfrak{A}.)\qquad p,\ q,\ \Phi'$$

als Functionen der Zeit. Solches aber ausgeführt gedacht, werden [zufolge (1.)]

$$(\mathfrak{B}.)\qquad A_1,\ A_2,\ A_3,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,$$

und [zufolge (30.), (31.)]

$$(\mathfrak{C}.)\qquad \Delta,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ g_1,\ g_2,\ g_3$$

ebenfalls *bekannte Functionen der Zeit* sein. Dabei bleibt das Vorzeichen von Δ willkürlich, was darin seinen Grund hat, dass die auxiliaren Axen g, h durch unsere Determinationen noch nicht völlig bestimmt sind. In der That kann man diesen Axen g, h, statt der ihnen in der Figur (26.) zuertheilten Richtungen, ebensogut auch die *entgegengesetzten* Richtungen verleihen.

Sind nun die Grössen (𝔄.), (𝔅.), (ℭ.) *bekannte Functionen der Zeit*, so gilt [nach (58.)] Gleiches auch von

(𝔇.) $$\lambda,$$

also [nach (55.)] Gleiches auch von

(𝔈.) $$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,$$

also [nach (13.)] Gleiches auch von

(𝔉.) $$u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma \quad \text{und} \quad x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma.$$

Endlich ergeben sich alsdann auch die Coordinaten y, z der *Contactstelle* als *Functionen der Zeit*. Und zwar erhält man in dieser Beziehung [durch Integration der Gleichungen (10.)] folgende Formeln:

(𝔊.) $$\begin{aligned} y - y_0 &= [y_\sigma + A_1\beta_1 + A_2\beta_2 + A_3\beta_3]_{t=t_0}^{t=t}, \\ z - z_0 &= [z_\sigma + A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + A_3\gamma_3]_{t=t_0}^{t=t}, \end{aligned}$$

wo y_0, z_0 die Coordinaten der Contactstelle zur Zeit $t = t_0$ vorstellen sollen.

§ 10. Beiläufige Bemerkung.

Mit Rücksicht darauf, dass die Ermittelung der gegenseitigen Beziehung zwischen δd und $d\delta$ meistentheils eine etwas *mühsame Aufgabe* ist [vgl. Seite 365—367], mag hier eine diesem Zweck entsprechende und *verhältnissmässig einfache* Methode angedeutet werden.

Dreht sich ein starrer Körper um einen *festen* Punkt O, und lässt man von O zwei Axensysteme 1, 2, 3 und x, y, z ausgehen, das erstere starr mit dem Körper verbunden, das letztere unbeweglich im Raume, so gelten für die Coordinaten l_1, l_2, l_3 und x, y, z, welche irgend ein Körpermolekül m in diesen beiden Systemen besitzt, die Formeln:

$$(A.)\quad \begin{cases} x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, \\ y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3, \\ z = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3, \end{cases}$$

wo die α, β, γ die Richtungs-Cosinus des einen Axensystems in Bezug auf das andere vorstellen. Aus (A.) folgt durch Differentiation:

$$dx = l_1 d\alpha_1 + l_2 d\alpha_2 + l_3 d\alpha_3,$$

oder, falls man für l_1, l_2, l_3 die aus (A.) sich ergebenden Werthe substituirt:

$$dx = y(\beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 + \beta_3 d\alpha_3) + z(\gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2 + \gamma_3 d\alpha_3).$$

Diese Formel aber gewinnt, falls man die Abkürzungen einführt:

$$(B.)\quad \begin{cases} \beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3 = d\mathrm{A}, \\ \gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2 + \gamma_3 d\alpha_3 = d\mathrm{B}, \\ \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2 + \alpha_3 d\beta_3 = d\Gamma, \end{cases}$$

folgende Gestalt:

$$(C.)\quad \begin{cases} dx = z d\mathrm{B} - y d\Gamma. \text{ Und ebenso erhält man:} \\ dy = x d\Gamma - z d\mathrm{A}. \\ dz = y d\mathrm{A} - x d\mathrm{B}. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Ausführung der Operation δ:

$$\delta dx = z\delta d\mathrm{B} - y\delta d\Gamma + \delta z d\mathrm{B} - \delta y d\Gamma,$$

oder, falls man in den beiden letzten Gliedern für δy und δz die aus (C.) ersichtlichen Werthe:

$$\delta y = x\delta\Gamma - z\delta\mathrm{A},$$
$$\delta z = y\delta\mathrm{A} - x\delta\mathrm{B}$$

substituirt:

$$\delta dx = z\delta d\mathrm{B} - y\delta d\Gamma - x(d\mathrm{B}\delta\mathrm{B} + d\Gamma\delta\Gamma) + y d\mathrm{B}\delta\mathrm{A} + z d\Gamma\delta\mathrm{A}.$$

Nun ist offenbar, was die *linke* Seite dieser Formel betrifft, $\delta dx = d\delta x$. Demgemäss muss also die *rechte* Seite ebenfalls bei einer Vertauschung von d und δ *sich gleich* bleiben. Die so entstehende Gleichung zerfällt aber, weil x, y, z willkürlich sind, in *drei* Gleichungen. Von diesen *drei* Gleichungen ist *eine*

(nämlich die durch Vergleichung der Coefficienten von x entstehende) *identisch*, während die *beiden andern* (d. i. die durch Vergleichung der Coefficienten von y respective z entstehenden) dargestellt sind durch die *beiden letzten* Formeln des folgenden Systems:

$$(D.)\quad \begin{cases} \delta d\mathsf{A} - d\delta\mathsf{A} = d\Gamma\delta\mathsf{B} - \delta\Gamma d\mathsf{B}, \\ \delta d\mathsf{B} - d\delta\mathsf{B} = d\mathsf{A}\delta\Gamma - \delta\mathsf{A}d\Gamma, \\ \delta d\Gamma - d\delta\Gamma = d\mathsf{B}\delta\mathsf{A} - \delta\mathsf{B}d\mathsf{A}, \end{cases}$$

Dass sich die *erste* Formel dieses Systems in analoger Weise herleiten lässt, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Leipzig, Juni 1885.

Inhaltsübersicht.

		Seite
§ 1.	Die anzuwendenden Coordinaten	353
§ 2.	Allgemeine Formeln für die Bewegung des Körpers	356
§ 3.	Berechnung der lebendigen Kraft	360
§ 4.	Die dynamischen Differentialgleichungen	365
§ 5.	Das Princip der lebendigen Kraft	368
§ 6.	Die instante Drehungsaxe	370
§ 7.	Das horizontale Azimuth derselben	371
§ 8.	Ueber ein dem Flächensatz verwandtes Theorem	373
§ 9.	Ueber die Bestimmung sämmtlicher Variabeln als Functionen der Zeit	375
§ 10.	Beiläufige Bemerkung	376

SITZUNG AM 21. NOVEMBER 1885.

Axel Harnack, *Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrales.*

§ 1. Definition des Integrales.

Besitzt die Function $u + iv$ einer complexen Variabelen z am Rande eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden, ebenen Gebietes, in dessen Innern die Function regulär ist, die Werthe $U + iV$, so stellt das Integral

$$(1) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int \frac{U + iV}{z - \varrho e^{i\alpha}}\, dz\,,$$

erstreckt in positivem Umlauf (d. h. die eingeschlossene Fläche bleibt zur Linken) über alle Randpunkte z, den Werth der Function $u + iv$ für alle inneren Punkte dar. Dieselbe muss dabei »im allgemeinen gleichmässig stetig« in die Randwerthe übergehen. Das ebene Gebiet nehmen wir als ein einblättriges an.

Durch Zerlegen des Integrales in seinen reellen und imaginären Bestandtheil erhält man die Gleichungen:

$$u = \quad \frac{1}{2\pi}\int U\,\frac{\cos\varepsilon}{l}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int V\,\frac{dl}{l}\,,$$

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int U\,\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V\,\frac{\cos\varepsilon}{l}\,d\sigma\,.$$

Hier bedeutet $d\sigma$ das Bogenelement der Randcurve, l die positiv genommene Entfernung des Elementes $d\sigma$ von dem betrachteten Punkte $x + iy = \varrho e^{i\alpha}$, für welchen die Werthe u und v ermittelt werden sollen, und ε den Winkel, welchen die nach innen gerichtete Normale des Elementes $d\sigma$ mit der Geraden l (in der Richtung von $d\sigma$ nach dem Punkt (x, y) bildet. Die Grösse $\frac{\cos\varepsilon}{l}\,d\sigma$

ist die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ vom Punkte (x, y) aus, und wird von Herrn C. Neumann mit $(d\sigma)_x$ bezeichnet. Dieser Werth ist überall positiv, wenn die Fläche nur von *einer* Randcurve begrenzt ist, die überdies stets ihre convexe Seite nach aussen richtet, und weder nach innen gerichtete Spitzen noch Ecken besitzt, oder allgemeiner, wenn keine Tangente der Randcurve in das Innere der Fläche eintritt. In allen anderen Fällen wird $(d\sigma)_x$ wenigstens für gewisse Gebiete von x auch negativ. Es tritt dies ein, sobald die Fläche des vom Punkte x und dem Bogenelemente $d\sigma$ gebildeten Dreiecks beim Durchlaufen des Elementes $d\sigma$ zur Rechten bleibt; $(d\sigma)_x$ soll daher der *algebraische* scheinbare Winkel heissen.

Auch das Differential $\frac{dl}{l}$ kann durch $d\sigma$ ausgedrückt werden. Bezeichnet man nämlich mit ε' den Winkel zwischen der positiven Richtung des Bogenelementes und der Richtung l, so ist in allen Fällen, auch dem Zeichen nach: $dl = -\cos\varepsilon' d\sigma$.

Der Kürze wegen werde ich indessen im Folgenden stets die Form benutzen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int U\,(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l}\,, \\ v &= -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V\,(d\sigma)_x\,. \end{aligned}$$

§ 2. Die Relationen zwischen den Functionen U und V.

Die Functionen u und v sind nicht unabhängig von einander, denn sie genügen für jeden Punkt (x, y) im Innern des Gebietes den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Functionen, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, werde ich zwei conjugirte Functionen nennen; man hat dabei noch zu unterscheiden, welche Function den reellen, und welche den imaginären Bestandtheil der complexen Function bildet.

Auch die Functionen U und V können daher an den Randcurven eines Gebietes nicht willkürlich gewählt werden; vielmehr müssen zwischen den Randwerthen U und denen der conjugirten Function V, und folglich auch zwischen den vier

Integralen der Gleichungen (2) Relationen bestehen. Dieselben sollen zuerst ermittelt werden. Setzt man

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x\,, & u_2 &= \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l}\,,\\
v_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l}\,, & v_2 &= \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x\,,
\end{aligned}
$$

so ist

$$
u_1 + iv_1 = \frac{1}{2i\pi}\int U\frac{dz}{z-\varrho e^{i\omega}}\,,\qquad u_2 + iv_2 = \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dz}{z-\varrho e^{i\omega}}\,.
$$

Demnach sind $u_1 + iv_1$ und $u_2 + iv_2$ Functionen einer complexen Variabelen, und daraus folgt, dass sich diese Functionen aus ihren Randwerthen ebenso darstellen lassen müssen, wie u und v. Bezeichnet man also mit U_1, V_1, U_2, V_2 die Werthe, welche u_1, v_1, u_2, v_2 am Rande annehmen, so ist

$$
U = U_1 + U_2\,,\qquad V = V_1 + V_2
$$

und es bestehen die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi}\int U_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V_1\frac{dl}{l}\,,\\
u_2 &= \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l} \quad = \frac{1}{2\pi}\int U_2(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V_2\frac{dl}{l}\,,\\
v_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} = -\frac{1}{2\pi}\int U_1\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V_1(d\sigma)_x\,,\\
v_2 &= \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x = -\frac{1}{2\pi}\int U_2\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V_2(d\sigma)_x\,.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt, indem man für U und V die obigen Werthe einführt,

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int U_2(d\sigma)_x &= \frac{1}{2\pi}\int V_1\frac{dl}{l}\,,\\
-\frac{1}{2\pi}\int U_2\frac{dl}{l} &= \frac{1}{2\pi}\int V_1(d\sigma)_x\,.
\end{aligned}
$$

Die beiden Gleichungen lassen sich in den einen Ausdruck vereinigen:

$$
\frac{1}{2i\pi}\int\frac{(U_2 - iV_1)}{z-\varrho e^{i\omega}}\,dz = 0\,.
$$

Derselbe lehrt, dass ein complexes Integral dieser Art im Inneren eines beliebigen Gebietes allenthalben Null sein kann, ohne dass die im Zähler stehende Function verschwindet. Diese

Function ist aber nicht als Randwerth einer »Function einer complexen Variabelen« zu betrachten, und deshalb ist das Integral nicht als ein »Integral von Cauchy« zu bezeichnen.

Bei der Ableitung der Gleichungen (4) ist vorausgesetzt, dass die Functionen u_1, u_2, ... im allgemeinen gleichmässig stetig in bestimmte Randwerthe übergehen, was noch zu beweisen ist. Zu dem Zwecke muss die Function

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x$$

nebst der conjugirten

$$v_1 = -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l}$$

näher untersucht werden. Ich beschränke mich dabei auf den Fall, dass U längs des Randes eine eindeutige und stetige Function ist. Auch soll der Rand von Curven gebildet sein, die bis auf einzelne Eckpunkte überall eine bestimmte, sich stetig ändernde Tangente besitzen, und die weder unendlich viele Wendungen machen, noch sich selbst oder unter einander durchschneiden. Alsdann sind die Functionen u_1 und v_1 im Inneren des Gebietes allenthalben stetig, und dasselbe gilt für die ersten partiellen Ableitungen, zwischen denen die bekannten Relationen bestehen, wie direct aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}[(d\sigma)_x] = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dl}{l}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}[(d\sigma)_x] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dl}{l}\right)$$

hervorgeht. Es werde nun am Rande ein bestimmter Punkt s betrachtet. Um diesen Punct s als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis mit beliebig kleinem Radius, der durch seine äussersten Schnittpunkte auf dem Rande den Bogen σ' bestimmt. Ein Element dieses Bogens werde mit $d\sigma'$ bezeichnet, während alle übrigen Randelemente $d\sigma''$ heissen mögen. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma')_x + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_x\,.$$

Der Werth der Function U im Punkte s heisse U_s. Im ersten Integral der rechten Seite unterscheiden sich sämmtliche Werthe von U von dem Werthe U_s um eine Grösse, deren Betrag durch Verkleinerung von σ' kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig gewählte Grösse δ. Zufolge der Stetigkeit von U kann

diese obere Grenze δ gleichzeitig für alle Punkte s fixirt werden. Also ist

$$\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_x + \frac{1}{2\pi} U_s \int (d\sigma')_x \pm (< \delta \frac{1}{2\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma')_x \,.$$

Das Integral $\int (d\sigma')_x$ giebt, mit Unterscheidung positiver und negativer Elemente, den Winkel an, unter welchem der Bogen σ' von dem inneren Punkte x aus gesehen wird. Rückt der Punkt x in den Randpunkt s, so geht dieser Winkel in denjenigen über, unter welchem der Bogen σ' vom Punkte s aus gesehen wird. Drehrichtung und Grösse dieses Winkels, der durch ω bezeichnet werden soll, ergiebt sich unzweideutig aus dem Grenzprocess. Kehrt die Randcurve an der Stelle s ihre concave Seite nach innen, so ist er ein überstumpfer Winkel, an einer convexen Stelle dagegen ein stumpfer oder spitzer.

Der Uebergang in den Werth ω ist für alle Randpunkte s ein gleichmässig stetiger, d. h. man kann nicht nur um jeden Punkt s einen Kreis angeben, so dass der scheinbare Winkel des Bogens σ' für alle Punkte x im Inneren dieses Kreises von dem Werthe ω beliebig wenig abweicht, sondern es lässt sich auch für den Radius dieses Kreises die nämliche obere Grenze bei allen Werthen s bestimmen.

Der Nachweis dieser Behauptung folgt aus elementaren Betrachtungen, wenn man beachtet, dass die vom Punkte s ausgehenden Schenkel des Winkels ein gleichschenkliges Dreieck mit der Sehne des Bogens σ' bestimmen.

Das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_x = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\cos\varepsilon}{l}\, d\sigma''$$

ändert sich stetig, und zwar gleichmässig. Denn es erstreckt sich nur über solche Bogenelemente, für welche l niemals Null wird, auch wenn der Punkt x in den Punkt s hineinrückt. Demnach wird der Werth dieses Integrales schliesslich gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_x$$

und so erhält man vorläufig das Resultat: Rückt der innere Punkt x in den Randpunkt s, so wird

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\omega\, U_s + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_s \pm \left(< \delta \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{abs}\,(d\sigma')_x\right).$$

In dieser Formel ist $\int \mathrm{abs}\,(d\sigma')_x$ jedenfalls eine endliche Grösse; denn entweder ist der Grenzwerth dieses Integrales gleich ω, falls der Bogen σ' seine concave Seite nach innen kehrt, oder er ist grösser als ω, aber endlich, weil der Bogen nicht unendlich viele Wendungen macht. Es ist ferner

$$\int U(d\sigma'')_s = \int U(d\sigma)_s - \int U(d\sigma')_s$$

und das zweite Integral der rechten Seite wird gleich $U_s\int(d\sigma')_s$ bis auf eine Grösse, die wiederum kleiner ist als

$$\delta\int \mathrm{abs}\,(d\sigma')_s\,.$$

Da nun die Grösse δ durch Verkleinerung von σ' beliebig klein gemacht werden kann, so folgt, dass

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,U_s \lim\omega - \frac{1}{2\pi}\,U_s \lim\int (d\sigma')_s + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s$$

ist. In einem gewöhnlichen Curvenpunkte, in welchem die Tangenten, vor- und rückwärts genommen, den Winkel π bilden, ist

$$\lim\omega = \pi\,,\quad \lim\int(d\sigma')_s = 0\,,$$

also

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2}\,U_s + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s\,.$$

In einem Eckpunkte der Curve, in welchem die Tangenten den Winkel α bilden, ist

$$\lim\omega = 2\pi - \alpha\,,\quad \lim\int(d\sigma')_s = 0\,,$$

also

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi}(2\pi - \alpha)\,U_s + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s\,.$$

Auch diese Grenzübergänge erfolgen nach Ausschluss der Eckpunkte durch beliebig kleine Umgebungen mit gleichmässiger

Stetigkeit, wie aus dem Mittelwerthsatz der Differentialrechnung hervorgeht. Damit ist die ursprüngliche Behauptung vollständig bewiesen.

Zu einer Randfunction U gehört also eine bestimmte Function der Randpunkte, nämlich $\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s$. Ich werde diese Function mit $\frac{1}{2}P_s$ oder auch kürzer mit $\frac{1}{2}P$ bezeichnen, und P die zugeordnete Function von U nennen*).

Es ist für einen regulären Randpunkt

$$(5) \qquad \lim_{x=s} \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \lim u_1 = U_1 = \frac{1}{2}U_s + \frac{1}{2}P_s .$$

Dagegen für Eckpuncte mit der Winkelöffnung α, die aber im Folgenden nicht weiter berücksichtigt werden sollen:

$$(5\,a) \qquad \lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = $$

$$= \lim u_1 = U_1 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U_s + \frac{1}{2}P_s .$$

Die zugeordnete Function ist eine stetige Function von s, solange keine Eckpunkte auf dem Rande vorhanden sind (Neumann, a. a. O., p. 139 und 150).

Dieselben Betrachtungen gelten auch für die Function

$$v_2 = \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x ,$$

wobei wiederum V als eine stetige Function vorausgesetzt wird. Es ist für einen regulären Randpunkt s

$$(6) \qquad \lim_{x=s} \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x = \lim v_2 = V_2 = \frac{1}{2}V_s + \frac{1}{2}Q_s .$$

Q bedeutet die der Function V zugeordnete Function, d. h. es ist

$$Q_s = \frac{1}{\pi}\int V(d\sigma)_s .$$

---

*) Von dieser zugeordneten Function handelt Herr C. Neumann bei der Theorie der Doppelbelegungen im 4. Capitel seines Buches: »Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential« (Leipzig, 1877). Der Beweis des Satzes von der gleichmässigen Convergenz ist jedoch daselbst nicht mitgetheilt (vergl. die Bemerk. pag. 152 daselbst).

Für die zu u_1 und v_2 conjugirten Functionen

$$v_1 = -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l}$$

lässt sich der Nachweis, dass sie stetig nach bestimmten Randwerthen V_1 und U_2 convergiren, nicht in derselben directen Weise führen. Da aber

$$u = u_1 + u_2\,, \quad v = v_1 + v_2$$

ist, so folgt, weil u und v der Voraussetzung nach in die bestimmten Werthe U_s und V_s übergehen, während x nach s convergirt:

$$(7) \qquad \lim_{x=s} u_2 = U_2 = U - U_1 = \tfrac{1}{2}U_s - \tfrac{1}{2}P_s\,,$$

$$(8) \qquad \lim_{x=s} v_1 = V_1 = V - V_2 = \tfrac{1}{2}V_s - \tfrac{1}{2}Q_s\,.$$

Trägt man diese Werthe von U_2 und V_1 in die Gleichungen (4) ein, so erhält man den folgenden Satz:

Besitzt die Function $u + iv$ einer complexen Variabelen z an dem Rande eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes die stetig sich ändernden Werthe $U + iV$, so bestehen zwischen den Functionen U und V die Relationen:

$$(9) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int P(d\sigma)_x = \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l} - \frac{1}{2\pi}\int Q\frac{dl}{l}\,, \\ &-\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int P\frac{dl}{l} = \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int Q(d\sigma)_x\,. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten P und Q die den Functionen U und V zugeordneten Functionen, und sämmtliche Integrale sind auf den Randcurven zu bilden, während der Punkt x, y im Inneren des Gebietes beliebig gewählt wird.

Man kann die Voraussetzungen, unter denen dieses Resultat bewiesen wurde, noch erweitern. Ist z. B. nur U im Cauchy'schen Integrale eine stetige oder eine überall endliche, integrirbare Function, so dass die Function u im allgemeinen gleichmässig stetig in die Randwerthe U übergeht, so gilt das Cauchy'sche Integral für diesen Rand, sobald man unter den

übrigen Integralen der Gleichung (2) die Grenzwerthe versteht, welche dieselben annehmen, wenn man von einer innerhalb der Fläche gelegenen Integrationscurve zum Rande selbst übergeht. In diesem Sinne gelten dann auch die vorstehenden Gleichungen, ohne dass V eine stetige Function zu sein braucht.

Der vorstehende, ganz allgemeine Satz erhält eine sehr einfache und bekannte Form, sobald der Rand nur aus einem einzigen Kreise besteht. Denn für einen Kreis werden die zugeordneten Functionen P und Q constant. Es ist, wenn R den Radius des Kreises angiebt, und $d\sigma = Rd\varphi$ gesetzt wird:

$$P_s = \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_s = \frac{1}{\pi}\int U\frac{\cos\varepsilon}{l}d\sigma = \frac{1}{2\pi R}\int Ud\sigma = \frac{1}{2\pi}\int Ud\varphi,$$

$$Q_s = \frac{1}{\pi}\int V(d\sigma)_s = \frac{1}{\pi}\int V\frac{\cos\varepsilon}{l}d\sigma = \frac{1}{2\pi R}\int Vd\sigma = \frac{1}{2\pi}\int Vd\varphi,$$

so dass hier der Satz lautet:

Besitzt die im Inneren des Kreises R reguläre Function $u + iv$ am Rande der Kreisperipherie die Werthe $U + iV$, so bestehen zwischen den Functionen U und V die Relationen:

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int Ud\varphi &= \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l}, \\ -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} &= \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int Vd\varphi. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Gleichungen ist die Randwerthaufgabe, d. h. die Bestimmung der complexen Function aus dem reellen Randwerthe *U für den Kreis* ohne Weiteres lösbar; denn es bekommen die Gleichungen (2) hierbei die Form

$$u = \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int Ud\varphi,$$

$$v = -\frac{1}{\pi}\int U\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int Vd\varphi,$$

wodurch u vollständig, und v bis auf eine additive Constante bestimmt ist.

Die speciellen Gleichungen (10) liefern für den Kreis die bekannten Relationen

$$\int U\cos k\varphi\, d\varphi = \int V\sin k\varphi\, d\varphi,$$

$$\int U\sin k\varphi\, d\varphi = -\int V\cos k\varphi\, d\varphi,$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots \infty),$$

welche hier die Anwendbarkeit der FOURIER'schen Reihe für die Darstellung der Functionen u und v begründen. Analoge Relationen gelten für einen beliebig zusammengesetzten Rand.

Wird nämlich die Randcurve auf ein Polarcoordinatensystem mit beliebigem Anfangspunkt bezogen, so dass $r = f(\varphi)$ die Gleichung der Randcurve wird, so bestehen die Gleichungen:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
\int (U - P)\, d\varphi &= \int (V - Q)\, d \log r\,, \\
-\int (U - P)\, d \log r &= \int (V - Q)\, d\varphi\,, \\
\int (U - P)\, d\left(\frac{\sin k\varphi}{k r^k}\right) &= -\int (V - Q)\, d\left(\frac{\cos k\varphi}{k r^k}\right), \\
\int (U - P)\, d\left(\frac{\cos k\varphi}{k r^k}\right) &= \int (V - Q)\, d\left(\frac{\sin k\varphi}{k r^k}\right), \\
(k &= 1, 2, 3, \ldots \infty)\,.
\end{aligned}
$$

§. 3. Die Eindeutigkeit der Darstellung einer complexen Function mittelst des Cauchy'schen Integrales.

Der oben gefundene allgemeine Satz gestattet folgende Umkehrung:

Ist für den Rand eines ebenen Gebietes eine stetige Function U gegeben, und kann man eine Function V vermitteln, für welche die Gleichungen (4) oder (9) erfüllt sind, so stellt die Gleichung

$$u = \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l}$$

eine Function dar, welche im Inneren des Gebietes die Bedingung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllt und an dem Rande den Werth U besitzt.

Der Beweis ergiebt sich durch eine Umkehrung der vorigen Betrachtung. Indem man nämlich die Functionen u_1, u_2, v_1, v_2 einführt (Gleichungen 3), und die Function U' durch die Gleichung definirt:

$$U' = U_1 + U_2\,,$$

erhält man aus den Gleichungen (2) zusammen mit den Gleichungen (4) die Relationen:

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi}\int U_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V_1\frac{dl}{l}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int U_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int U_2(d\sigma)_x,$$
$$v_1 = -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} = -\frac{1}{2\pi}\int U_1\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V_1(d\sigma)_x$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int U_1\frac{dl}{l} - \frac{1}{2\pi}\int U_2\frac{dl}{l}.$$

Hieraus folgt:

$$\int U(d\sigma)_x = \int U'(d\sigma)_x,\quad \int U\frac{dl}{l} = \int U'\frac{dl}{l}$$

und aus diesen Gleichungen ist zu schliessen, dass die stetigen Functionen U und U' identisch sind.

Dazu bedarf man des folgenden Satzes:

Wenn eine stetige, nur für den Rand eines Gebietes definirte Function W die Eigenschaft hat, dass für jeden Punkt im Inneren des einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes

$$\frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_x \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl}{l}$$

constant gleich Null sind, so ist W für alle Puncte des Randes ebenfalls gleich Null.

Der Beweis für diesen Satz ist meines Wissens noch nicht ausgeführt worden, und in der That nicht ganz einfach, wenn man in Bezug auf die Function W keine weiteren, beschränkenden Voraussetzungen einführen will. Aber der Inhalt des Satzes ist von Bedeutung, weil aus ihm unmittelbar hervorgeht, dass die Integralrelationen (4) oder (9) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Zusammenhang der Functionen U und V bilden, und dass eine complexe Function nur auf eine einzige Weise in der Form des Cauchy'schen Integrales und der in demselben enthaltenen Reihenentwickelung darstellbar ist. Ich halte es daher für gerechtfertigt, auf den Beweis ausführlich einzugehen.

Lässt man den inneren Punct x an einen Randpunkt s heranrücken, so wird

$$(12)\qquad \lim \frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_x = \frac{1}{2}W_s + \frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_s = 0,$$

daher

$$W_s = -\frac{1}{\pi}\int W(d\sigma)_s .$$

Hat man es mit einem ebenen Gebiete zu thun, das nur von einer einzigen Randcurve begrenzt ist, die ohne nach innen gerichtete Spitzen oder Ecken nach aussen überall convex ist, oder allgemeiner ausgedrückt, deren Tangenten nicht in das Innere der Fläche eintreten, so kann man schon aus dieser letzten Gleichung unmittelbar schliessen, dass $W = 0$ ist. Denn in diesem Falle ist $(d\sigma)_s$ eine durchweg positive Grösse und

$$\frac{1}{\pi}\int (d\sigma)_s$$

im allgemeinen (d. h. abgesehen von etwaigen Eckpunkten) gleich Eins. Bezeichnet nun M denjenigen Werth von W, dessen Betrag am grössten ist, so ist auch

$$\frac{1}{\pi}\int (M + W)(d\sigma)_s = 0 .$$

Da in diesem Integral alle Elemente von gleichem Zeichen sind, so muss im allgemeinen

$$M + W = 0$$

gleich sein; und da W stetig sein sollte, so ist überall W constant gleich $-M$. Diese Constante kann aber nur Null sein, zufolge der Gleichung

$$-\frac{1}{2\pi}\int M(d\sigma)_x = -M = 0 .$$

Im allgemeinen Falle aber sind zunächst die Functionen

$$\frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_{x'} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl'}{l'}$$

gebildet *für einen ausserhalb der Fläche gelegenen Punct* (x', y') zu untersuchen. Die Richtung der Normale ist bei diesen Integralen dieselbe wie früher.

Lässt man nun den äusseren Punkt an den Randpunkt s heranrücken, so gelten immer, d. h. bei jeder stetigen Function W die Gleichungen:

(13) $$\lim \frac{1}{2\pi}\int W(dx)_{x'} = -\frac{1}{2} W_s + \frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_s$$

(14) $$\lim \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl'}{l'} = \lim \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl}{l}$$

Die erste Gleichung ergiebt sich ebenso wie im vorigen Paragraph die Gleichung (5), wenn man nur beachtet, dass beim Heranrücken eines äusseren Punktes an das Element $d\sigma$ der Winkel $(d\sigma)_{x'}$ negativ wird und den Grenzwerth $-\pi$ erhält*). Aus den Gleichungen (12) und (13) folgt dann

$$(15) \qquad -\lim \frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_{x'} = W_s \, .$$

Es muss also W_s constant sein, wenn der Nachweis geführt werden kann, dass auch für alle äusseren Punkte das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int W(dx)_{x'} = \text{const.}$$

ist. Diese Constante kann dann nur Null sein, weil das Integral für den unendlich fernen Punkt diesen Werth hat.

Die Eigenschaft der Constanz folgt aber unmittelbar aus der noch zu beweisenden Gleichung (14). Denn da in dieser Gleichung unserer Voraussetzung zu Folge die rechte Seite constant gleich Null ist, so ist auch die linke Seite constant gleich Null, und die Function

$$\frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl'}{l'}$$

ist dann überhaupt gleich Null, weil sie auch im Unendlichen diesen Werth hat. Folglich muss auch die conjugirte Function

$$\frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma')_x$$

Null sein.

Der Beweis für die Gleichung (14) lässt sich folgendermassen führen:

Auf der Normale im Randpunkte s seien zu verschiedenen Seiten von s die Punkte x und x' in der beliebig kleinen Entfernung a von s gewählt. Indem wir annehmen, dass die Randcurve an keiner Stelle unendlich viele Wendungen besitzt, und nun den Punkt s nicht etwa in einen Wendepunkt verlegen, lässt sich eine convexe und eine concave Seite in der Umgebung von s unterscheiden. Mit x möge der Punkt bezeichnet sein, welcher auf der concaven Seite von s liegt, mit x' der andere.

*) Aus dieser Gleichung folgt, dass die Existenz einer Lösung der Randwerthaufgabe gezeigt ist, sobald die Möglichkeit nachgewiesen ist, das innere Gebiet einer Fläche derart eindeutig auf das äussere conform abzubilden, dass die Punkte der Randcurve sich selbst entsprechen.

Es kann jetzt also x auch den äusseren Punkt bezeichnen, wenn die Curve bei s ihre concave Seite nach aussen kehrt, x' ist dann ein innerer Punkt. Der Punkt s sei zum Anfangspunkte eines Polarcoordinatensystemes gewählt, die Tangente in s sei die Coordinatenaxe; $r = f(\varphi)$ die Gleichung der Curve. Indem man zu beiden Seiten von s einen beliebig kleinen Bogen von der Gesammtlänge σ' abschneidet, von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = \varphi'$ auf der einen Seite der Normalen, und von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = \varphi''$ auf der anderen Seite, sind nur die Integrale zu betrachten, welche sich auf diesen Bogen σ' beziehen. Denn für den übrigen Theil des Randes, σ'', ist die Gleichung:

$$\lim \int_{\sigma''} W \frac{dl}{l} = \lim \int_{\sigma''} W \frac{dl'}{l'}$$

für $x = x' = s$ selbstverständlich.

Der Winkel von 0 bis φ' (und ebenso von 0 bis φ'') sei so klein gewählt, dass zu jedem Werthe von φ zwischen 0 und φ' nur *ein* Werth von r gehört; ferner sei nicht nur r für dieses Bogenstück eine durchaus wachsende Function, sondern es sei auch a so klein gewählt, dass für diesen Werth von a, sowie für alle kleineren die Grösse l immer grösser als a ist. Da

$$l^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = r^2 + a^2 - 2ar\sin\varphi\ ,$$

so verlangt diese Bedingung, dass $r^2 - 2ar\sin\varphi > 0$, d. h. $a < \frac{r}{2\sin\varphi}$ ist. Diese Forderung ist immer erfüllbar, wenn sich die Randcurve in der Umgebung des Punktes s verhält, wie eine analytische Curve in einem regulären Punkte, wenn also daselbst z. B. r durch eine nach ganzen Potenzen von φ fortschreitende Reihe darstellbar ist, die mit der ersten Potenz von φ beginnt. Es ist nun

$$(16)\quad \begin{aligned} l^2 &= r^2 + a^2 - 2ar\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = r^2 + a^2 - 2ar\sin\varphi \\ l'^2 &= r^2 + a^2 - 2ar\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = r^2 + a^2 + 2ar\sin\varphi\ , \end{aligned}$$

ferner

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W\frac{dl}{l} - \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W\frac{dl'}{l'} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d\lg\left(\frac{l}{l'}\right) = \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d\lg\left(\frac{l^2}{l'^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{l^2}{l'^2} &= \frac{r^2 + a^2 - 2ar\sin\varphi}{r^2 + a^2 + 2ar\sin\varphi}\,, \\ \frac{1}{2}d\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) &= \frac{4r\,dr\,ar\sin\varphi - 2(r^2 + a^2)\,a\,d(r\sin\varphi)}{l'^4} \\ &= \frac{(r^2 - a^2)\,2a[\sin\varphi\,dr - r\cos\varphi\,d\varphi] - 4ra^3\cos\varphi\,d\varphi}{l'^4}\,.\end{aligned}$$

Das Differential $\sin\varphi\,dr - r\cos\varphi\,d\varphi$ wird, wenn man es wie oben mit einem regulären Punkte zu thun hat, nicht unendlich oft sein Vorzeichen wechseln, sondern während φ das Intervall von 0 bis φ' durchläuft, stets positiv oder negativ, oder auch gleich Null bleiben. Ist längs eines ganzen Bogenstückes

$$\sin\varphi\,dr - r\cos\varphi\,d\varphi = 0\,,$$

so ist dieser Bogen ein Kreisbogen oder eine Gerade. Unsere Voraussetzung lässt sich geometrisch durch die etwas engere ersetzen, dass ein Kreis, welcher die Curve im Punkte s tangirt, nicht in beliebiger Nähe des Punktes s, und also auch nicht auf dem beliebig kleinen zu φ' gehörigen Bogen einen weiteren Berührungspunkt mit der Curve besitzt.

Die Grösse $(r^2 - a^2)$ wechselt ihr Zeichen, indem r durch den Werth a hindurchgeht. Setzt man zur Abkürzung das obige Differential

$$\frac{1}{2}d\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) = \frac{(r^2 - a^2)\,2a\,du - 4a^3r\,dv}{l'^4}\,,$$

so behält jedes der Differentiale du und dv, während φ von 0 bis φ' variirt, ein unverändertes Zeichen, und es ist

$$\begin{aligned}(17)\qquad &\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W\,d\lg\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_{r=0}^{r=a} W\frac{(r^2 - a^2)2a}{l^2l'^2}du + \frac{1}{2}\int_{r=a}^{\varphi=\varphi'} W\frac{(r^2 - a^2)2a}{l^2l'^2}du - \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W\frac{4a^3r}{l^2l'^2}dv\,.\end{aligned}$$

In Bezug auf das Differential du ist also eine Theilung des Integrationsintervalles vollzogen worden, weil $r^2 - a^2$ sein Vorzeichen wechselt. Auf jedes der Integrale rechts lässt sich nun der erste Mittelwerthsatz anwenden. Man bezeichne drei mittlere Werthe von W im Intervall von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi'$ mit

$$W_{\theta\varphi'}\,,\quad W_{\theta'\varphi'}\,,\quad W_{\theta''\varphi'}\,,$$

so ist die rechte Seite gleich:

$$\frac{1}{2} W_{\theta\varphi'} \int_{r=0}^{r=a} \frac{(r^2 - a^2)\, 2a\, du}{l^2 l'^2} + \frac{1}{2} W_{\theta'\varphi'} \int_{r=a}^{\varphi=\varphi'} \frac{(r^2 - a^2)\, 2a\, du}{l^2 l'^2}$$

$$- \frac{1}{2} W_{\theta''\varphi'} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} \frac{4a^3 r}{l^2 l'^2} dv \; .$$

Die Grösse φ' kann von vornherein so gewählt werden, dass die Werthe der stetigen Function W in diesem Intervall um weniger als eine Grösse δ sich unterscheiden. Also ist, wenn man

$$W_{\theta\varphi'} = W_{\theta'\varphi'} \pm (<\delta)$$
$$W_{\theta''\varphi'} = W_{\theta'\varphi'} \pm (<\delta)$$

setzt, die obige Summe gleich

$$(18) \qquad W_{\theta\varphi'} \left[\lg \frac{l}{l'}\right]_0^{\varphi'}$$

bis auf eine Grösse, deren Betrag kleiner ist als

$$(19) \qquad \frac{\delta}{2} \left[\text{abs} \int_{r=0}^{r=a} \frac{(r^2 - a^2)\, 2a}{l^2 l'^2} du + \text{abs} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} \frac{4a^3 r}{l^2 l'^2} dv \right] .$$

In dem Ausdruck (18) verschwindet $\lg \frac{l}{l'}$ für $\varphi = 0$ und stellt für $\varphi = \varphi'$ eine endliche Grösse dar, die mit a nach Null convergirt. Es ist also nur noch zu zeigen, dass die beiden in (19) enthaltenen Integrale jedenfalls endlich bleiben, wenn a nach Null convergirt. Das erste dieser Integrale ist gleich

$$\int_{r=0}^{r=a} \frac{2a(r^2 - a^2)}{l^2 l'^2} (\sin\varphi\, dr - r\cos\varphi\, d\varphi\, .)$$

Da nun l^2 und l'^2 gleich oder grösser sind wie a^2, und da der Betrag von $r^2 - a^2$ gleich oder kleiner ist wie a^2, so ist der Betrag dieses Integrales kleiner wie

$$\frac{2}{a} \int_{r=0}^{r=a} dr + 2 \int_{r=0}^{r=a} \cos\varphi\, d\varphi = 2 + 2\,[\sin\varphi]^{r=a} \; ,$$

also jedenfalls endlich. Desgleichen ist in dem anderen Integrale

$$\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} \frac{4a^3 r\cos\varphi}{l^2 l'^2}\,d\varphi$$

$l^2 > a^2$, $l'^2 > ar$, also wird der Betrag des Integrales kleiner als

$$\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} 4\cos\varphi\,d\varphi = 4\sin\varphi'.$$

Damit ist bewiesen, dass

$$\lim \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d\lg\left(\frac{l^2}{l'^2}\right)$$

beliebig klein wird für $a = 0$. Dasselbe gilt auch für den anderen Theil des Bogens σ'. Sonach ist der Satz vollständig bewiesen, und zwar für jede Randcurve, die im allgemeinen, d. h. bis auf einzelne singuläre Punkte, in Bezug auf ihre Tangente und deren Aenderung dieselben Eigenschaften besitzt, wie eine analytische Curve in einem regulären Punkt.

Man kann den obigen Satz auch noch in folgender Weise erweitern:

Wenn eine integrirbare, überall endliche Randfunction W die Eigenschaft hat, dass für jeden Punkt (x, y) im Innern eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes

$$\frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_x \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl}{l}$$

constant gleich Null sind, so ist W für die Punkte des Randes im allgemeinen gleich Null, d. h. die Stellen, an denen W um mehr als irgend eine bestimmte Grösse von Null verschieden ist, bilden eine »discrete Menge«.

Der Beweis ergiebt sich, indem man an Stelle der Function W aus der Gleichung (12) die ihr »im allgemeinen« gleiche Function $-\frac{1}{\pi}\int W(d\sigma)_s$ einführt; denn diese Function ist ausser in etwaigen Eckpunkten der Randcurve stetig.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass der Satz

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl}{l} = \lim \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl'}{l'}$$

aussagt: Bezeichnen W_i und W_a die inneren und äusseren logarithmischen Potentiale einer Doppelbelegung, so besteht zwischen den Differentialquotienten nach der inneren und äusseren Normale des Randes in jedem Randpunkte die Gleichung

$$\frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_a}{dn_1} = 0 \; ,$$

vorausgesetzt, dass diese Ableitungen überhaupt bestimmte stetige Werthe haben.

§. 4. Die Neumann'sche Lösung der Randwerthaufgabe für eine Fläche ohne einspringende Randtangenten.

Die weitere Anwendung der Gleichung (9) liefert unter gewissen Bedingungen eine Lösung der Aufgabe, die Function u (und v) zu bestimmen, wenn die Werthe der Function U längs des Randes gegeben sind. Es ist das die Lösung, welche Herr Neumann in seiner oben genannten Schrift gegeben hat. Sie führt auf dem directesten Wege zum Ziele, daher ich sie im Zusammenhange mit meinen Untersuchungen noch kurz angeben möchte.

Es ist

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l} \; .$$

Ist also U gegeben, so ist nur das zweite Integral noch unbekannt. Für dieses ergiebt die erste der Gleichungen (9):

$$\frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int P(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int Q\frac{dl}{l} \; .$$

Hier ist die Function $Q = \frac{1}{\pi}\int V(d\sigma)_s$ unbekannt. Beachtet man nun, dass $-Q$ die conjugirte Function zu P ist, so kann man dieselbe Relation zwischen P und $-Q$ entwickeln, wie zwischen U und V. Sind also P_1 und Q_1 die zugeordneten Functionen zu P und $-Q$, so wird

$$-\frac{1}{2\pi}\int Q\frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi}\int P(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int P_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int Q_1\frac{dl}{l} \; ,$$

Setzt man dieses Verfahren fort, indem man zu P_1, $-Q_1$ die zugeordneten Functionen P_2, Q_2 bestimmt, so erhält man schliesslich die Gleichung:

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int P(d\sigma)_x + \frac{1}{\pi}\int P_1(d\sigma)_x + \dots\\
+ (-1)^n\cdot\frac{1}{\pi}\int P_{n-1}(d\sigma)_x + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int P_n(d\sigma)_x\\
+ (-1)^n\cdot\frac{1}{2\pi}\int Q_n\frac{dl}{l}\,.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung bestimmt das gesuchte Integral, und zwar in Form einer unendlichen Reihe, wenn die Function P_n, und also auch Q_n, mit wachsenden Werthen von n immer mehr einer Constante sich nähert. Es wird dann

$$
\lim\int Q_n\frac{dl}{l} = 0\;, \qquad \lim\frac{1}{2\pi}\int P_n(d\sigma)_x = C
$$

und man erhält die Function in der Form:

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
u = C + \frac{1}{\pi}\int(U - P)(d\sigma)_x + \frac{1}{\pi}\int(P_1 - P_2)(d\sigma)_x + \dots\\
+ \frac{1}{\pi}\int(P_{2n-1} - P_{2n})(d\sigma)_x + \dots
\end{aligned}
$$

oder auch

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
u = -C + \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int(P - P_1)(d\sigma)_x\\
- \frac{1}{\pi}\int(P_2 - P_3)(d\sigma)_x - \dots\\
- \frac{1}{\pi}\int(P_{2n} - P_{2n+1})(d\sigma)_x - \dots
\end{aligned}
$$

Für eine Fläche, deren Randcurve so gestaltet ist, dass die Tangenten derselben nicht in das Innere eintreten, bei welcher also $(d\sigma)_x$ und $(d\sigma)_s$ stets positiv ist, lässt sich die Convergenz dieser Reihe nachweisen; und zwar ergiebt sich dieselbe aus dem Satze, dass bei diesen Flächen die Schwankungen der Functionen U, P, P_1, P_2, ... stärker wie eine geometrische Progression abnehmen. Der Fall der Dreiecks- und Vierecksfläche ist dabei noch besonders zu berücksichtigen.

Die vorstehende Entwickelung bleibt auch dann noch gültig, wenn für U bloss die Voraussetzung der Endlichkeit und Integrirbarkeit gemacht wird. Auch ist die ganze Betrachtung (wie überhaupt ohne jede Einschränkung die Sätze in §. 2 und §. 3) auf die von der Curve begrenzte äussere Fläche mit geringer Modification übertragbar. Für eine beliebig gestaltete

Randcurve aber lässt sich die Convergenz dieser Reihen, die man mit Einführung eines festen Punktes a, b in der Form

$$u(x, y) - u(a, b) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int U(d\sigma)_x - \int U(d\sigma)_a\right] - \frac{1}{\pi}\left[\int P(d\sigma)_x - \int P(d\sigma)_a\right] + \dots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\left[\int P_n(d\sigma)_x - \int P_n(d\sigma)_a\right] \dots$$

zusammenfassen kann, allgemein noch nicht nachweisen. Auch ist es bisher nicht gelungen, verwandte Reihen dieser Art für den allgemeinen Fall zu bilden. Derselbe erfordert, zumal bei den räumlichen Problemen in der Potentialtheorie, eine andere Methode des Beweises.

J. **Thomae**, *Ueber eine einfache Aufgabe aus der Theorie der Elasticität.*

Wird ein Stück eines elastischen homogenen Kreiscylinders, welcher durch zwei auf die Cylinderaxe senkrechte Ebenen begrenzt ist, auf eine horizontale feste ebene Unterlage gestellt, so muss er vermöge seiner eigenen Schwere deformirt werden. Welches ist unter diesen Umständen sein Zustand? Diese so einfache Aufgabe ist, wie ich glaube, noch nirgend gelöst. Man hat sich auf unendlich dünne Cylinder beschränkt. Auch hier soll diese Aufgabe nur mit einer gewissen Einschränkung gelöst werden, nämlich mit der, dass auf der oberen Endfläche des Cylinders ein zweites von einer festen Ebene begrenztes Gewicht laste, welches gross genug ist, den Endflächen des Cylinders auch nach der Deformation die ebene Gestalt zu erhalten. Ich habe einige Hoffnung, die Aufgabe auch ohne diese Einschränkung mit den hier anzuwendenden Mitteln lösen zu können, und werde, falls dies gelingt, der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften seiner Zeit davon Mittheilung machen. Sollte das Problem an sich als geringfügig erscheinen, so glaube ich doch, dass die zu seiner Bewältigung angewandten Methoden einiges Interesse beanspruchen können, ein Resultat, mit dem man in der mathematischen Physik sich ja so oft begnügen muss.

Ich werde nun, um die analytischen Hülfsmittel bei der Hand zu haben, sogleich im Artikel I. einige Eigenschaften *Bessel*'scher Functionen herleiten. Wenn ich dabei von der üblichen Bezeichnungsweise etwas abweiche, so geschieht es deshalb, weil die Variable in einer andern als der gewöhnlichen Form auftritt. Im Art. II. stelle ich sodann die elastischen Differentialgleichungen und Oberflächenbedingungen in geeigneten Coordinaten auf. Im Art. III. suche ich particuläre Lösungen der sich ergebenden Differentialgleichungen, und gebe im Art. IV. die eigentliche Lösung der Aufgabe.

Art. I. **Bessel'sche Functionen.**

Setzen wir zur Abkürzung

$$\tau = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2 t}{d\lg r^2} + 2\,\frac{dt}{d\lg r}\right) - \varepsilon^2 t\,,$$

so ist es die folgende Differentialgleichung, auf welche unsere Aufgabe führen wird:

$$(1)\qquad \frac{d^2\tau}{d\lg r^2} + 2\,\frac{d\tau}{d\lg r} - \varepsilon^2 r^2 \tau = 0\,,$$

oder mit Entfernung der Abkürzung τ:

$$(1^a)\qquad \frac{d^4 t}{d\lg r^4} - 2\,(2 + \varepsilon^2 r^2)\,\frac{d^2 t}{d\lg r^2} - 4\,\varepsilon^2 r^2\,\frac{dt}{d\lg r} + \varepsilon^4 r^4 t = 0\,.$$

Dieselbe muss integrirt werden. Dabei wird am Besten der Fall $\varepsilon = 0$ für sich genommen. Es mag dann t durch t_0 ersetzt werden, so dass (1^a) die Form gewinnt

$$\frac{d^4 t_0}{d\lg r^4} - 4\,\frac{d^2 t_0}{d\lg r^2} = 0\,,$$

welche Gleichung durch den Ausdruck

$$t_0 = C_0 + C_1 r^2 + C_2 \lg r + C_3 r^{-2}$$

vollständig integrirt wird. — Im allgemeinen Falle bedenken wir, dass die Coefficienten der Differentialgleichung ganz und rational bleiben, wenn wir r^2 oder $(\varepsilon r)^2$ statt r als unabhängige Veränderliche einführen, und versuchen deshalb die Differentialgleichung durch Reihen zu integriren, welche nach Potenzen von $(\varepsilon r)^2$ fortschreiten. Zur Bestimmung des Anfangsexponenten m_0 einer solchen Reihe erhalten wir nach bekannten Regeln die Gleichung

$$m_0{}^4 - m_0{}^2 = 0\,,$$

woraus sich für m_0 die Werthe

$$-1,\ 0,\ 0,\ 1$$

ergeben, und woraus sogleich folgt, dass das eine particuläre Integral ein r^{-2} proportionales Glied, das andere ein logarithmisches Glied enthält. Von der Untersuchung dieser beiden particulären im Punkte Null singulären Integrale können wir hier aus Gründen, die sich später ergeben werden, absehen; es fragt sich aber, was für uns wichtig ist, ob überhaupt zwei im Punkte Null reguläre, ich meine nach ganzen Potenzen von r fortschreitende, Reihen als Integrale von (1) vorhanden sind,

was nicht unmittelbar einleuchtet, weil die Exponenten dieses Integrals sich um *ganze* Zahlen unterscheiden. Diese Frage zu beantworten, setzen wir die Reihe:

$$a_0 + a_1\varepsilon^2 r^2 + a_2\varepsilon^4 r^4 + \cdots + a_m \varepsilon^{2m} r^{2m} + \cdots$$

in die Differentialgleichung (1^a) ein, und erhalten dadurch die Gleichung:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} a_m \varepsilon^{2m} r^{2m} \left(2^4 (m^4 - m^2) - \varepsilon^2 r^2 2^3 (m^2 + m) + \varepsilon^4 r^4\right) = 0,$$

in welchem Ausdrucke mit $(\varepsilon r)^0$, $(\varepsilon r)^2$, $(\varepsilon r)^4$, .. $(\varepsilon r)^{2m}$ .. bez. die Grössen multiplicirt sind:

$$0a_0,\quad 0a_1 - 0a_0,\quad a_2 2^4 . 12 - a_1 2^3 . 2 + a_0, \ldots$$
$$\ldots, a_m 2^4 (m^4 - m^2) + a_{m-1} 2^3 m (m + 1) + a_{m-2}, \ldots$$

Diese sind gleich Null zu setzen und liefern eine Recursionsformel für a_m. Da aber die beiden ersten Gleichungen *von selbst* erfüllt sind, so enthält die Reihe *zwei* willkürliche Constanten a_0 und a_1, und es giebt also in der That *zwei* im Punkte Null reguläre Integrale der Differentialgleichung (1). Um die Integration wirklich auszuführen, bemerken wir, dass die Gleichung erfüllt ist, wenn

$$r^2 \tau = \frac{d^2 t}{d \lg r^2} + 2 \frac{dt}{d \lg r} - \varepsilon^2 r^2 t = 0$$

ist. Bezeichnen wir die im Punkte Null nicht singuläre Lösung dieser Differentialgleichung mit $f_1(\varepsilon r)$, so haben wir

$$f_1(\varepsilon r) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\varepsilon^{2m} r^{2m}}{2^{2m}\, fac\, m\, fac\, m+1}$$

als das eine particuläre Integral von (1). Diese Gleichung wird aber auch befriedigt, wenn

$$\frac{d^2 t}{d \lg r^2} + 2 \frac{dt}{d \lg r} - \varepsilon^2 r^2 t = \varepsilon^2 r^2 f_1(\varepsilon r)$$

gesetzt wird. Integrirt man diese Differentialgleichung durch eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 \varepsilon^2 r^2 + a_2 \varepsilon^4 r^4 + \cdots + a_m \varepsilon^{2m} r^{2m} + \cdots,$$

so ergiebt sich

$$a_m 4 m (m + 1) - a_{m-1} = \frac{4}{2^{2m}\, fac\, m-1\, fac\, m},$$

welche Recursionsformel durch den Ausdruck

$$a_m = \frac{1}{2^{2m}\, fac\, m\; fac\, m}$$

befriedigt wird, so dass wir als zweites Integral der Gleichung (1) die Function erhalten:

$$f_0(\varepsilon r) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\varepsilon^{2m} r^{2m}}{2^{2m}\, fac\, m\; fac\, m},$$

und es sind die im Punkte Null regulären Integrale in der Form enthalten

$$Af_0(\varepsilon r) + Bf_1(\varepsilon r).$$

Es wird also unsere Differentialgleichung *vierter* Ordnung durch Functionen integrirt, welche für sich je einer Differentialgleichung *zweiter* Ordnung Genüge leisten, durch *Bessel*'sche Functionen. Wir entwickeln einige Eigenschaften dieser Functionen.

Die Reihen $f_0(\varepsilon r)$, $f_1(\varepsilon r)$ oder allgemeiner die Reihen

$$f_\vartheta(r) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{r^{2m}}{2^{2m}\, fac\, m\; fac\, m+\vartheta},$$

worin ϑ nur keine ganze negative Zahl sein darf, hier aber nur als eine ganze positive Zahl auftritt, sind überall convergent, die durch sie dargestellten Functionen sind also ganze transcendente. Ihre sämmtlichen Terme sind positiv, wenn r bez. εr reell ist, diese Functionen wachsen daher, wenn r von 0 bis ∞ zu-, oder von 0 bis $-\infty$ abnimmt, fortwährend von 1 bis ∞ und nehmen den Werth 0 nicht an. Der Quotient $f_0(r) : f_1(r)$ wächst ebenfalls fortwährend, weil, vom dritten ab, jeder einzelne Term des Zählers schneller zunimmt als der entsprechende des Nenners, mithin wächst auch der Ausdruck $f_0(r)M_1 - f_1(r)M_0$, wenn M_1, M_0 positive Constanten sind, mit wachsendem r fortwährend, hat seinen kleinsten Werth für $r = 0$, und kann sein Zeichen, wenn überhaupt, nur einmal wechseln. Speciell der Ausdruck

$$K(r) = f_0(r)\, f_1(k) - f_1(r)\, f_0(k),$$

für welchen wir das Zeichen $K(r)$ auch ferner gebrauchen wollen, ist für $r = 0$ negativ, gleich $-\frac{1}{4}k^2 f_2(k)$ und bleibt fortwährend wachsend negativ, bis er für $r = k$ Null wird. Ebenso ist der Ausdruck

$$\tfrac{1}{4}\,\varepsilon^2 r^2 f_1(\varepsilon r) M_0 - f_0(\varepsilon r) M_1$$

eine mit zunehmendem εr fortwährend wachsende und daher ihr Zeichen nur einmal wechselnde Function, weil offenbar von den Reihen

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\varepsilon r)^{2(m+1)}}{2^{2(m+1)}\, fac\, m\; fac\, m+1}, \quad 1 + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\varepsilon r)^{2(m+1)}}{2^{2(m+1)}\, fac\, m+1\; fac\, m+1}$$

die erste rascher wächst als die zweite.

Aus dem blossen Anblick der f_0, f_1 definirenden Reihen erschliesst man die Formeln:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{df_0(\varepsilon r)}{d\lg r} = \dfrac{\varepsilon^2 r^2}{2} f_1(\varepsilon r), \quad \dfrac{d^2 f_0(\varepsilon r)}{d\lg r^2} = \varepsilon^2 r^2 f_0(\varepsilon r), \\ \tfrac{1}{2}\dfrac{df_1(\varepsilon r)}{d\lg r} = f_0(\varepsilon r) - f_1(\varepsilon r) = \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 r^2 f_2(\varepsilon r), \\ \dfrac{d^2 f_1(\varepsilon r)}{d\lg r^2} = \varepsilon^2 r^2 f_1(\varepsilon r) + 4\,[f_1(\varepsilon r) - f_0(\varepsilon r)]\,. \end{cases}$$

Setzt man $\qquad t = Af_0(\varepsilon r) + Bf_1(\varepsilon r)$,

so folgt:

$$(3^a)\quad \begin{cases} \dfrac{dt}{d\lg r} + 2t = 2A\,[\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 r^2 f_1(\varepsilon r) + f_0(\varepsilon r)] + 2Bf_0(\varepsilon r), \\ r^2\tau = A\varepsilon^2 r^2 f_1(\varepsilon r), \\ \dfrac{d\tau}{d\lg r} + 2\tau = 2\varepsilon^2 A f_0(\varepsilon r)\,. \end{cases}$$

Differenzirt man

$$P(\varepsilon r) = f_0^2(\varepsilon r) - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 r^2 f_1^2(\varepsilon r) = (f_0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon r f_1)(f_0 - \tfrac{1}{2}\varepsilon r f_1)$$

nach $\lg r$, so erhält man

$$\frac{dP(\varepsilon r)}{d\lg r} = \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 r^2 f_1^2(\varepsilon r)$$

und mithin ist

$$(4)\quad P(\varepsilon r) = f_0^2 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 r^2 f_1^2 = 1 + \tfrac{1}{4}\int_0^r \varepsilon^2 r^2 f_1^2(\varepsilon r)\, d\lg r$$

eine Grösse, welche für reelle r stets positiv ist. Da dieser Ausdruck öfter vorkommen wird, so wird $P(\varepsilon r)$ als abkürzende Bezeichnung auch fernerhin eingeführt.

Durch Ausführung der Differentiation erhält man ferner

$$\frac{d\,[\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 r^2 f_1^2(\varepsilon r) - f_0^2(\varepsilon r) + f_0(\varepsilon r) f_1(\varepsilon r)]}{d\lg r} = f_1(\varepsilon r)\,\frac{df_0(\varepsilon r)}{d\lg r},$$

und mithin ist

$$(4^e) \qquad \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 r^2 f_1^2 - f_0^2 + f_0 f_1 = \int_0^r f_0 \frac{df_1}{d\lg r}\, d\lg r$$

für reelle εr positiv.

Es ist für die folgenden Untersuchungen sehr wichtig zu wissen, wie sich $f_0(r)$, $f_1(r)$ für sehr grosse r verhalten. Hierzu dient die Darstellung dieser Functionen durch bestimmte Integrale, man gelangt zu derselben mittels der Gleichung

$$\int_0^1 (1-\sigma)^{\delta-\frac{1}{2}} \sigma^{m-\frac{1}{2}} d\sigma = \frac{fac(-\frac{1}{2})\, fac(\delta-\frac{1}{2})\, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}}{fac\, m+\delta},$$

aus welcher folgt:

$$\frac{r^{2m}}{2^{2m}\, fac\, m\, fac\, \delta+m} = \frac{r^{2m}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}}{fac\, 2m\; fac\, \delta+m} =$$

$$= \frac{r^{2m}}{\sqrt{\pi}\, fac\, \delta-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^{\delta-\frac{1}{2}}\,.\,\sigma^{m-\frac{1}{2}} d\sigma}{fac\, 2m}$$

$$= \frac{2\, r^{2m}}{\sqrt{\pi}\, fac\, \delta-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{(1-\sigma^2)^{\delta-\frac{1}{2}} \sigma^{2m} d\sigma}{fac\, 2m},$$

und also:

$$(5) \qquad f_\delta(r)\,.\,\sqrt{\pi}\, fac(\delta-\tfrac{1}{2}) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\sqrt{\pi}\, fac(\delta-\frac{1}{2})\, r^{2m}}{2^{2m}\, fac\, m\, fac\, \delta+m}$$

$$= 2\int_0^1 \Sigma \frac{(\sigma r)^{2m}(1-\sigma^2)^{\delta-\frac{1}{2}} d\sigma}{fac\, m} = \int_0^1 (e^{r\sigma} + r^{-r\sigma})(1-\sigma^2)^{\delta-\frac{1}{2}} d\sigma.$$

Hierfür schreiben wir:

$$f_\delta(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, fac\, \delta-\frac{1}{2}} \int_0^1 (e^{r\sigma}(1-\sigma^2)^{\delta-\frac{1}{2}} d\sigma + R_\delta.$$

bemerkend, dass R_δ für ein wachsendes r verschwindet. Sodann wenden wir auf das stehengebliebene Integral die Substitution an $r\sigma = r - \sigma'$ und erhalten so (mit Unterdrückung des Striches an σ):

$$f_\delta(r) = R_\delta + \frac{e^r 2^\delta}{\sqrt{2\pi}\, fac\,(\delta - \frac{1}{2})} \int_0^r e^{-\sigma} \sigma^{\delta - \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma}{2r}\right)^{\delta - \frac{1}{2}} d\sigma .$$

Aus dieser Darstellung schliesst man auf die Gleichung:

$$(6) \qquad \lim_{r = \infty} r^{\delta + \frac{1}{2}} e^{-r} f_\delta(r) = 2^\delta : \sqrt{2\pi} .$$

Setzen wir:

$$\left(1 - \frac{\sigma}{2r}\right)^{\delta - \frac{3}{2}} - \frac{\sigma}{2r}\left(1 - \frac{\sigma}{2r}\right)^{\delta - \frac{3}{2}} \quad \text{für} \quad \left(1 - \frac{\sigma}{2r}\right)^{\delta - \frac{1}{2}},$$

so erhalten wir etwas genauer:

$$f_\delta(r) = \frac{e^r 2^\delta}{\sqrt{2\pi}\, r^{\delta + \frac{1}{2}}} - \frac{e^r 2^\delta (\delta + \frac{1}{2})}{2\sqrt{2\pi}\, r^{\delta + \frac{3}{2}}} + \frac{R'_\delta e^r}{r^{\delta + \frac{3}{2}}} + R_\delta ,$$

worin R_δ und R'_δ mit wachsendem r verschwinden. Gehen wir mit diesen Werthen in den Ausdruck $P(r) = f_0^2(r) - \frac{1}{4} r^2 f_1^2(r)$ ein, so finden wir, dass

$$(7) \qquad P(r) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 r^2 f_1^2(r)\, d\lg r = \frac{e^{2r}(1 + R'')}{4\pi rr}$$

ist, worin R'' mit wachsendem R gegen Null convergirt. $P(r)$ wächst daher wie $f_0 f_1$, jedoch rascher als $f_1 f_1$ gegen Unendlich.

Dies etwa sind die Eigenschaften *Bessel*'scher Functionen, deren wir nachher bedürfen. Wir wollen jedoch nebenbei noch bemerken, dass das Quadrat zweier *Bessel*'schen Functionen eine hypergeometrische Reihe dritter Ordnung ist, und also einer Differentialgleichung dritter Ordnung Genüge leistet. Man hat nämlich:

$$f_\delta^2(2\sqrt{\zeta}) = \sum_{(m)} \zeta^m \sum_{(m')} \frac{1}{fac\, m'\, fac\, m' + \delta\, fac\, m - m'\, fac\, m - m' + \delta}$$

$$= \frac{1}{fac\,\delta} \sum_{(m)} \frac{\zeta^m}{fac\, m\, fac\, m + \delta}$$

$$\cdot \sum_{(m')} \frac{-m'}{1} \cdot \frac{-m' + 1}{2} \cdots \frac{-m' + m - 1}{m'} \cdot \frac{-m' - \delta}{\delta + 1} \cdots \frac{-m' - \delta + m - 1}{\delta + m'}$$

$$= \frac{1}{fac\,\delta} \sum_{(m)} \frac{\zeta^m F(-m', -m' - \delta, \delta + 1, 1)}{fac\, m\, fac\, m + \delta}$$

und also (*Gauss*' Werke Bd. III. pag. 147):

$$(8)\qquad f_\delta^2(2\sqrt{\zeta}) = \sum_{(m)} \frac{\zeta^m \, fac\,(2\delta + 2m)}{fac\, m \, fac\, m + \delta \, fac\, m + \delta \, fac\, m + 2\delta}$$

$$= \sum_{(m)} \frac{4^m \zeta^m \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2(\delta + m) - 1}{2}}{fac\, m \, fac\, m + \delta \, fac\, m + 2\delta}.$$

Zuletzt mögen noch zwei trigonometrische Reihen hier Platz finden, von denen wir im Laufe unserer Untersuchungen Gebrauch machen werden und welche den neben ihnen stehenden Functionen so lange gleich sind, als z zwischen 0 und l liegt. Es sind die Reihen

$$z - \tfrac{1}{2} l = -\frac{4l}{\pi^2} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos \frac{(2m+1)\pi z}{l},$$

$$z^2 - 2l = -\frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{l}.$$

Art. II. Die Differentialgleichungen der Elasticität und die Grenzbedingungen.

Das Problem, um welches es sich handelt, ist in der Einleitung aufgestellt, wir müssen uns noch über die Bezeichnung einigen. Die Achse des homogenen elastischen Cylinders sei die z-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und die xy-Ebene sei die untere horizontale Grundfläche desselben, während die obere Grenzebene durch die Gleichung $z = l$ bestimmt ist, so dass l die Länge des Cylinders bedeutet. Die Verschiebungen seien in üblicher Bezeichnung u, v, w, und es werde

$$u = xs, \quad v = ys, \quad r = \sqrt{xx + yy}$$

gesetzt, sodass rs die Verschiebung in der Richtung des Fahrstrahls r ist, welcher den verschobenen Punkt mit der z-Achse verbindet, und daher die radiale Verschiebung genannt werden kann, während s das radiale Verschiebungsmass heissen mag. Es sind dann bei den hier gemachten Voraussetzungen s und w Functionen von r und z. Der Winkel ϑ, den r mit x einschliesst, wird beinahe gar nicht vorkommen. Der Radius des Cylinders sei k.

Wir transformiren die bekannten Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer homogener Körper, auf deren Inneres nur die Schwere wirkt, während ϱ die Dichte bedeutet, — die Differentialgleichungen

$$\nu\Delta u + (\lambda + \nu)\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0, \quad \nu\Delta v + (\lambda + \nu)\frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0,$$

$$\nu\Delta w + (\lambda + \nu)\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \varrho g, \quad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

dadurch, dass wir r, ϑ, z als unabhängige Coordinaten einführen. So ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = s + \frac{x^2}{r}\frac{\partial s}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{r}\frac{\partial s}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial w}{\partial r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{\partial s}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = s + \frac{y^2}{r}\frac{\partial s}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial w}{\partial r},$$

$$\Theta = 2s + r\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2s + \frac{\partial s}{\partial \lg r} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x(3r^2 - x^2)}{r^3}\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{x^3}{r^2}\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^3}{r^3}\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{xy^2}{r^2}\frac{\partial^2 s}{\partial r^2},$$

$$\Delta u = x\left(\frac{3}{r}\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = x(\bar{s} + \bar{w}), \quad \frac{\partial\Theta}{\partial y} = y(\bar{s} + \bar{w}),$$

$$\bar{w} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \lg r}, \quad \bar{s} = \frac{3}{r}\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial s}{\partial \lg r} + \frac{\partial^2 s}{\partial \lg r^2}\right),$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial z} = 2\frac{\partial s}{\partial z} + r\frac{\partial^2 s}{\partial z\,\partial \lg r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Mit Anwendung der eben eingeführten Abkürzungen liefern die beiden ersten Elasticitätsgleichungen die eine neue:

$$(9) \qquad (\lambda + 2\nu)\bar{s} + \nu\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + (\lambda + \nu)\bar{w} = 0,$$

wogegen die dritte zu der Gleichung führt:

$$(10) \quad \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \lg r^2} + (\lambda + 2\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\lambda + \nu)\left(2\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial^2 s}{\partial z\,\partial \lg r}\right) = \varrho g.$$

Differenziren wir (10) nach z und $\lg r$, so folgt noch:

$$(10^a) \quad \nu\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \lg r^2} + 2\nu\frac{\partial \bar{w}}{\partial \lg r} + (\lambda + 2\nu)r^2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} + (\lambda + \nu)r^2\bar{s} = 0.$$

Eliminirt man $\bar{w}$ zwischen (9) und (10^a), so erhält man für s eine Differentialgleichung, welche die bemerkenswerthe Eigen-

schaft hat, von den Elasticitätscoefficienten λ und ν frei zu sein, nämlich die Gleichung:

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial \lg r^2} + 2\frac{\partial \bar{s}}{\partial \lg r} + 2r^2\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial z^2} + r^4\frac{\partial^4 s}{\partial z^4} = 0\,.$$

Um die Bedingungen für die Oberfläche zu erhalten, wollen wir für den Augenblick mit α, β, γ die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die nach *Innen* gerichtete Normale bez. mit der x, y, z-Achse bildet. Dann sind die Bedingungen im Allgemeinen

$$\alpha\left(\lambda\Theta + 2\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \gamma\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \Xi = 0\,,$$

$$\alpha\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \beta\left(\lambda\Theta + 2\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \gamma\nu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + H = 0\,,$$

$$\alpha\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \beta\nu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \gamma\left(\lambda\Theta + 2\nu\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right) + Z = 0\,.$$

Hier sind Ξ und H überall gleich Null, für die Mantelfläche ist Z ebenfalls gleich Null. Für $z = 0$, $z = l$ ist bez.

$$D_0 = -Z\,,\quad D_l = -Z$$

der noch unbekannte Druck, welchen die Unterlage bez. die aufgelegte Ebene auszuhalten haben, und diese Druckkräfte sind Functionen von r. — Für die Mantelfläche ist

$$\alpha = -x : r\,,\quad \beta = -y : r\,,\quad \gamma = 0\,,\quad r = k\,,$$

und wir erhalten für dieselbe aus den allgemeinen Bedingungen die beiden Gleichungen:

$$(12^a)\qquad (\lambda + 2\nu)\left(2s + \frac{\partial s}{\partial \lg r}\right) + \lambda\frac{\partial w}{\partial z} = 0\,,$$

$$(12^b)\qquad \frac{1}{k^2}\frac{\partial w}{\partial \lg r} + \frac{\partial s}{\partial z} = 0\,.$$

Für $z = 0$, wo $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ ist, erhalten wir:

$$(13)\qquad w = 0\,,\quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0\,,$$

während der Druck auf die Unterlage

$$(13^a)\quad D_0 = \lambda\Theta + 2\nu\frac{\partial w}{\partial z} = \lambda\left(2s + \frac{\partial s}{\partial \lg r}\right) + (\lambda + 2\nu)\frac{\partial w}{\partial z}$$

ist. Für $z = l$, wo $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$ ist, folgt:

$$(14)\qquad \frac{\partial w}{\partial r} = 0\,,\quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0$$

und der Druck auf diese Ebene ist

$$(14^a)\quad D_l = -\left(\lambda\Theta + 2\nu\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\lambda\left(2s + \frac{\partial s}{\partial \lg r}\right) - (\lambda + 2\nu)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Art. III. **Aufsuchung particulärer Integrale.**

Wir wollen, unser Problem in zwei zerlegend,

$$s = s_0 + s', \quad w = w_0 + w'$$

setzen, und annehmen, dass s_0, w_0 die Gleichungen (9) und (10) befriedigen, während s', w' dieselben Gleichungen befriedigen, wenn in (10) Null an Stelle von ϱg gesetzt wird. Es genügen dann s, w offenbar ebenfalls den Gleichungen (9) und (10), während s_0, w_0 sowohl als auch s', w' den Gleichungen (9) und (10^a) Genüge leisten.

Für s_0, w_0 können wir die Functionen wählen:

$$s_0 = C_0'r^2 + C', \quad w_0 = -z(C_0r^2 + C) + z(z - l)C''.$$

Führen wir diese Werthe in (9) ein, so folgt:

$$8(\lambda + 2\nu)C_0' - 2(\lambda + \nu)C_0 = 0,$$

und (10) liefert:

$$-4\nu z C_0 + 2(\lambda + 2\nu)C'' = \varrho g.$$

Soll diese Gleichung für jedes z zwischen 0 und l erfüllt sein, so muss C_0, also auch C_0' verschwinden, und wir erhalten daher, wenn wir noch C' durch $C' \cdot \lambda$ ersetzen, was für später bequem ist, für s_0, w_0 die Functionen:

$$(15)\quad s_0 = \lambda C', \quad w_0 = \frac{z(z - l)\varrho g}{2(\lambda + 2\nu)} - Cz.$$

Was die Oberflächenbedingungen anbetrifft, so werden die für $z = 0$ und $z = l$, also (13) und (14), durch s_0, w_0 von selbst erfüllt, ebenso wird die zweite Mantelflächenbedingung (12^b) von selbst befriedigt. Die erste aber kann nicht für jedes z befriedigt werden, wenn man auch über C und C' verfügen wollte. Bezeichnen wir die Zugkraft, welche an der Mantelfläche normal zu ihr angebracht werden müsste, damit das Gleichgewicht hergestellt würde, mit $(z - \frac{1}{2}l)\Pi_0 + \Pi'$, so erhalten wir die Beziehung

$$(16)\quad 2C'(\lambda + 2\nu)\lambda + \frac{(z - \frac{1}{2}l)\lambda\varrho g}{\lambda + 2\nu} - C\lambda = (z - \tfrac{1}{2}l)\Pi_0 + \Pi',$$

$$\Pi_0 = \frac{\lambda\varrho g}{\lambda + 2\nu}, \quad \Pi' = 2C'(\lambda + 2\nu)\lambda - C\lambda.$$

Der Druck, den unter Annahme der Verschiebungen s_0, w_0 die Unterlage bez. die aufgelegte Ebene auszuhalten hat, ist

$$(17)\quad \begin{cases} D_{0,0} = 2\lambda^2 C' - (\lambda+2\nu)C - \frac{1}{2}\varrho g l\ , \\ D_{l,0} = -2\lambda^2 C' + (\lambda+2\nu)C - \frac{1}{2}\varrho g l\ , \end{cases}$$

und es ist dieser Druck in allen Punkten einer Endfläche der nämliche, so dass man den Gesammtdruck auf eine derselben erhält, wenn man den in jedem Element auf die Einheit der Fläche bezogenen eben gefundenen Druck mit πk^2 multiplicirt.

Um aber Ausdrüche für s', w' zu erhalten, suchen wir particuläre Integrale von (9) und (10), wenn dort ϱg durch Null ersetzt wird, und zwar suchen wir solche Ausdrücke in der Form

$$s_n = t_n \cos \varepsilon_n z\ , \qquad t_n' \sin \varepsilon_n z\ ,$$

worin ε_n eine Constante ist, und t_n und t_n' nur von r abhängen sollen. Wir beschränken uns jedoch auf die erste Form, weil sie für unsere Zwecke genügt. Führen wir $s_n = t_n \cos \varepsilon_n z$ in (11) ein, von der im Art. I eingeführten Abkürzung

$$\tau_n = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2 t_n}{d \lg r^2} + 2\frac{d t_n}{d \lg r}\right) - \varepsilon_n^2 r^2 t_n$$

Gebrauch machend, so erhalten wir die Differentialgleichungen

$$(18)\qquad \frac{d^2\tau_n}{d\lg r^2} + 2\frac{d\tau_n}{d\lg r} - r^2\varepsilon_n^2\tau_n = 0\ ,$$

$$(18^a)\quad \frac{d^4 t_n}{d\lg r^4} - (4 + 2r^2\varepsilon_n^2)\frac{d^2 t_n}{d\lg r^2} - 4\varepsilon_n^2 r^2\frac{d t_n}{d\lg r} + \varepsilon_n^4 r^4 t_n = 0\ ,$$

welche mit (1) und (1^a) übereinstimmen. Ist diese Gleichung integrirt, so ergiebt sich die particuläre Lösung

$$(19)\quad \begin{cases} s_n = t_n \cos \varepsilon_n z\ , \\ w_n = \frac{\sin \varepsilon_n z}{\varepsilon_n}\left[\frac{\nu}{\lambda+\nu}\int \varepsilon_n^2 r^2 t_n \, d\lg r - \frac{\lambda+2\nu}{\lambda+\nu}\left(\frac{d t_n}{d\lg r} + 2t_n\right)\right]. \end{cases}$$

Die Grösse t_n, aus vier particulären Integralen zusammengesetzt, enthält im Grunde vier willkürliche Constanten, die man auch alle brauchen würde, wenn man einen Hohlcylinder untersuchen wollte. Wenn wir uns aber auf einen *vollen Cylinder beschränken*, so ergiebt sich daraus, dass rs und w für $r = 0$ bez. verschwinden und endlich bleiben müssen, dass die im Punkte Null singulären Lösungen der Differentialgleichung (1) oder (18) fortfallen müssen, und es ist daher

$$(20)\qquad t_n = A_n f_0(\varepsilon_n r) + B_n f_1(\varepsilon_n r)$$

zu setzen, worin A_n, B_n Constanten sind. — Aus dem Ausdrucke für w_n kann man noch mittelst (18) das Integralzeichen entfernen. Es folgt daraus

$$\varepsilon_n^2 \int \varepsilon_n^2 r^2 t_n \, d\lg r = \varepsilon_n^2 \left(\frac{dt_n}{d\lg r} + 2t_n\right) - 2\tau_n - \frac{d\tau_n}{d\lg r} ,$$

was für w_n die neue Form ergiebt

$$(19^a) \quad w_n = -\frac{\sin\varepsilon_n z}{\varepsilon_n}\left[\frac{\nu}{\lambda+\nu}\left(\frac{d\tau_n}{d\lg r} + 2\tau_n\right) + \varepsilon_n^2\left(\frac{dt_n}{d\lg r} + 2t_n\right)\right]$$
$$= -\frac{2\sin\varepsilon_n z}{\varepsilon_n}\left[A_n\left(\tfrac{1}{4}\varepsilon_n^2 r^2 f_1(\varepsilon_n r) + \frac{\lambda+2\nu}{2\,\lambda+\nu} f_0(\varepsilon_n r)\right) + \right.$$
$$\left. + B_n f_0(\varepsilon_n \nu)\right] .$$

Hierin muss eigentlich in der Klammer noch eine Integrationsconstante etwa C_n' hinzugefügt werden, die aber weggelassen ist, weil sie, wie sogleich nachgewiesen wird, verschwindet. Es müssen nämlich s_n, w_n die Gleichungen (9) und (10) befriedigen, wenn darin ϱg durch Null ersetzt wird, während bei der Herleitung (9) und (10^a) benutzt wurden. Wir bilden zunächst den Ausdruck

$$-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{d\lg r^2} =$$
$$\frac{\sin\varepsilon_n z}{\varepsilon_n}\left[\frac{d\tau_n}{d\lg r} + 2\tau_n + \varepsilon_n^2\left(\frac{dt_n}{d\lg r} + 2t_n\right) - \frac{\nu}{\varepsilon_n^2(\lambda+\nu)}\left(\frac{d^3\tau_n}{d\lg r^3} + 2\frac{d^2\tau}{d\lg r^2}\right)\right] ,$$

oder, wenn man mittels (18) den dritten Differentialquotienten fortschafft,

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{d\lg r^2} = -\frac{\sin\varepsilon_n z}{\varepsilon_n}\left[\varepsilon_n^2\left(\frac{dt_n}{d\lg r} + 2t_n\right) + \frac{\lambda+2\nu}{\lambda+\nu}\left(\frac{d\tau_n}{d\lg r} + 2\tau_n\right)\right] ,$$

und setzen dies in (10) ein (Null für ϱg darin gesetzt), wodurch wir zu der Gleichung gelangen

$$0 = -\frac{\nu(\lambda+2\nu)}{\varepsilon_n(\lambda+\nu)}\sin\varepsilon_n z \cdot T_n ,$$
$$T_n = \frac{d\tau_n}{d\lg r} - \frac{(\lambda+\nu)C_n'}{\nu(\lambda+2\nu)} - \frac{d\tau_n}{d\lg r} = -\frac{(\lambda+\nu)C_n'}{\nu(\lambda+2\nu)} .$$

Es muss also $C_n' = 0$ sein, w. z. b. w.

Die Grössen s_n, w_n genügen den Grenzbedingungen (13) und (14), wenn $\varepsilon_n = n\pi : l$ gesetzt wird, denn dann sind für $z = 0$ und $z = l$ die Grössen w_n und $\partial s_n : \partial z$ gleich Null.

Die Gleichung (12^b) aber liefert für die in t_n enthaltenen Constanten A_n, B_n die Gleichung

$$(21) \qquad (\lambda + 2\nu)\tau_n + 2(\lambda + \nu)\varepsilon_n^2 t_n = 0 ,$$

oder

$$(21^a) \qquad A_n[(\lambda + 2\nu) f_1(\varepsilon_n k) + 2(\lambda + \nu) f_0(\varepsilon_n k)] + B_n 2(\lambda + \nu) f_1(\varepsilon_n k) = 0 ,$$

welche Gleichung wir dadurch erfüllen, dass wir

$$(22) \qquad \begin{aligned} A_n &= C_n 2(\lambda + \nu) f_1(\varepsilon_n k) , \\ B_n &= -C_n[(\lambda + 2\nu) f_1(\varepsilon_n k) + 2(\lambda + \nu) f_0(\varepsilon_n k)] \end{aligned}$$

setzen. Die Bedingung (12^a) wird durch die Grössen s_n, w_n *nicht* befriedigt, sondern man muss, um das Gleichgewicht herzustellen, an dem Mantel eine normale Zugkraft anbringen, die wir mit $\Pi_n \cos \varepsilon_n z$ bezeichnen wollen. Alsdann bestimmt sich Π_n aus der Bedingung

$$(23) \qquad 2\nu\left(\frac{dt_n}{d \lg r} + 2t_n\right) - \frac{\lambda\nu}{\varepsilon_n(\lambda + \nu)}\left(\frac{d\tau_n}{d \lg r} + 2\tau_n\right) = \Pi_n .$$

Es ist bemerkenswerth, dass die linke Seite durch Differentiation nach $\lg r$ und Division mit νr^2 in die linke Seite von (21) übergeht, wenn man nach jenen Operationen noch k für r setzt. Stellen wir noch t_n und τ_n durch *Bessel*'sche Functionen dar, so erhalten wir in der im Art. I eingeführten Bezeichnungsweise

$$(23^a) \qquad \begin{aligned} \Pi_n &= 4\nu A_n\left(\tfrac{1}{4}\varepsilon_n^2 k^2 f_1(\varepsilon_n k) + \frac{\lambda + 2\nu}{\lambda + \nu} f_0(\varepsilon_n k)\right) + 4\nu B_n f_0(\varepsilon_n k) \\ &= 8\nu(\lambda + \nu)\, C_n[\tfrac{1}{4}\varepsilon_n^2 k^2 f_1^2(\varepsilon_n k) - f_0(\varepsilon_n k)] \\ &= -8\nu(\lambda + \nu)\, C_n P(\varepsilon_n k) , \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(24) \qquad \begin{cases} C_n = -\Pi_n : 8\nu(\lambda + \nu) P(\varepsilon_n k) , \\ A_n = -\dfrac{\Pi_n f_1(\varepsilon_n k)}{4\nu P(\varepsilon_n k)} , \quad B_n = \dfrac{\Pi_n\left(f_0(\varepsilon_n k) + \dfrac{\lambda + 2\nu}{2(\lambda + \nu)} f_1(\varepsilon_n k)\right)}{4\nu P(\varepsilon_n k)} . \end{cases}$$

Das Verschiebungsmass

$$s_n = \frac{\Pi_n}{4\nu P(\varepsilon_n k)} \cos\frac{n\pi z}{l}\left[\frac{\lambda + 2\nu}{2(\lambda + \nu)} f_1(\varepsilon_n r) f_1(\varepsilon_n k) - K(\varepsilon_n r)\right]$$

hat für $z = z'$ und $r = 0$ bez. $r = k$ die beiden Werthe

$$s_n(r=0) = \frac{\Pi_n}{4\nu P(\varepsilon_n k)} \cos\frac{n\pi z'}{l}\left(f_0(\varepsilon_n k) - \frac{\lambda}{2(\lambda+\nu)} f_1(\varepsilon_n k)\right) ,$$

$$s_n(r=k) = \frac{\Pi_n \cos\frac{n\pi z'}{l}(\lambda+2\nu) f_1{}^2(\varepsilon_n k)}{8\nu(\lambda+\nu) P(\varepsilon_n k)} .$$

Diese beiden Grössen haben das Zeichen von $\Pi_n \cos(n\pi z' : l)$ und mithin findet die Verschiebung rs_n in der Ebene $z = z'$ überall in derselben Richtung statt.

Der Druck, welcher bei den Verschiebungen s_n, w_n auf die Endflächen ausgeübt wird, $D_{0,n}$, $D_{l,n}$, ist

$$(25)\quad \begin{cases} D_{0,n} = 2\nu\left(\dfrac{dt_n}{d\lg r} + 2t_n\right) + \dfrac{\nu(\lambda+2\nu)}{\varepsilon_n{}^2(\lambda+\nu)}\left(\dfrac{d\tau_n}{d\lg r} + 2\tau_n\right) \\ \qquad = 4\nu B_n f_0(\varepsilon_n r) \\ \qquad\quad + 4\nu A_n\left(\dfrac{1}{4}\varepsilon_n{}^2 r^2 f_2(\varepsilon_n r) + \dfrac{3\lambda+4\nu}{2(\lambda+4\nu)} f_0(\varepsilon_n r)\right) , \\ D_{l,n} = (-1)^{n+1} D_{0,n} . \end{cases}$$

Für $r = 0$ und $r = k$ giebt dies

$$\begin{aligned} D_{0,n}(r=0) &= 8\nu(\lambda+\nu)[f_1(\varepsilon_n k) - f_0(\varepsilon_n k) C_n] \\ &= \Pi_n . \varepsilon_n{}^2 k^2 f_2(\varepsilon_n k) : 4P(\varepsilon_n k) , \\ D_{0,n}(r=k) &= 4\nu C_n\left[2(\lambda+\nu) f_1 . \left(\frac{1}{4}\varepsilon_n{}^2 k^2 f_1 + \frac{3\lambda+2\nu}{2(\lambda+\nu)} f_0\right) - \right. \\ &\qquad\left. - f_0\left((\lambda+2\nu) f_1 + 2(\lambda+\nu) f_0\right)\right] \\ &= 8\nu(\lambda+\nu) C_n (f_0 f_1 - P) \\ &= -\Pi_n [f_0(\varepsilon_n k) f_1(\varepsilon_n k) - P(\varepsilon_n k)] : P(\varepsilon_n k) . \end{aligned}$$

Der Druck ist für $r = 0$ positiv, wenn Π_n positiv ist, und nimmt ab, wenn r zunimmt, für $r = k$ ist er (vergl. 4ª) negativ, derselbe wechselt daher und zwar fortwährend abnehmend sein Zeichen.

Der Gesammtdruck auf die Unterlage ist bei Annahme der Verschiebungen s_n, w_n Null, es ist nämlich

$$\int_0^{2\pi}\int_0^k D_{0,n}\, r\,dr\,d\vartheta = 2\pi\int_0^k r^2 D_{0,n}\, d\lg r$$

$$= -4\nu\pi\int_0^k \frac{dr^2 t_n}{d\lg r} d\lg r - \frac{2\nu\pi(\lambda+2\nu)}{\varepsilon_n{}^2(\lambda+\nu)}\int_0^k \frac{dr^2\tau_n}{d\lg r} d\lg r$$

$$= -4\nu\pi k^2 t_n(k) - \frac{2\nu\pi(\lambda+2\nu)}{\varepsilon_n{}^2(\lambda+\nu)} k^2 \tau_n(k) = 0 ,$$

Die Gleichung (1 … $(\lambda+\nu)\,t_n$ für $r = k$ ist.
stanten A_n … würde nur auf s_0, w_0 führen, wenn darin
(21) … substituirt würde. Es brächte keinen Nutzen, wollte
oder … selbst noch in zwei Theile zerlegen, von denen der
(21ª) … durch die Specialisirung $n = 0$ entstünde, der
… und (10) befriedigte. Es wird deshalb im Fol-
… andere aber (9) und … das früher gefundene Werthsystem bedeuten,
v … genden s_0, w_0 welches nicht durch blosse Specialisirung aus s_n, w_n gefunden
wird, und es werden deshalb für n künftig nur die ganzen
Zahlen 1, 2, 3, .. n .. zu setzen sein.

Art. IV. Lösung des Problems.

Setzen wir

$$s = s_0 + \Sigma s_n\ , \qquad w = w_0 + \Sigma w_n$$

(und werde unter $\Sigma F(n)$ die Summe $F(1) + F(2) + F(3)\ldots$ verstanden) und werden für s_0, w_0; s_n, w_n die im vorigen Artikel gefundenen Ausdrücke genommen, so befriedigen wir durch die Grössen s, w die Differentialgleichungen (9) und (10) und die Oberflächenbedingungen (12ᵇ), (13) und (14). Damit Gleichgewicht bestehe, muss noch am Mantel eine normale Zugkraft Π angebracht werden, welche den Werth hat

$$\Pi = \Pi' + (z - \tfrac{1}{2}l)\Pi_0 + \Sigma \Pi_n \cos\frac{n\pi z}{l}$$

$$= 2C'\lambda(\lambda + 2\nu) - C\lambda + \frac{(z - \frac{1}{2}l)\lambda\varrho g}{\lambda + 2\nu} + \Sigma \Pi_n \cos\frac{n\pi z}{l}\ .$$

Soll das Gleichgewicht für $\Pi = 0$ bestehen, wie unser Problem fordert, so muss der für Π gefundene Ausdruck für alle z zwischen 0 und l verschwinden. Um aus diesem Umstande Gleichungen für die Π_n zu erhalten, ersetzen wir nach *Fourier* $z - \frac{1}{2}l$ durch die am Ende des Art. I schon aufgestellte Cosinusreihe, und gelangen so zu der Gleichung

$$0 = 2C'\lambda(\lambda + 2\nu) - C\lambda$$

$$+ \Sigma \Pi_{2n} \cos\frac{2n\pi z}{l} + \Sigma\left(\Pi_{2n+1} - \frac{4\lambda\varrho g l}{\pi^2(\lambda + 2\nu)(2n + 1)^2}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi z}{l}\ ,$$

so dass also

$$(26)\quad \begin{cases} 2C'(\lambda + 2\nu) - C = 0\ , \\ \Pi_{2n} = 0\ , \qquad \Pi_{2n+1} = \dfrac{4\lambda\varrho g l}{\pi^2(2n+1)^2(\lambda + 2\nu)}\ . \end{cases}$$

sein muss. Hiernach ergiebt sich als vollständige Lösung des Problems

$$(27)\qquad s = \lambda C' + \frac{\lambda \varrho g l}{\nu(\lambda+2\nu)\pi^2}\sum \cos\frac{(2n+1)\pi z}{l}\cdot S_n\,,$$

$$S_n = \frac{\left[\frac{\lambda+2\nu}{2(\lambda+\nu)} f_1\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) f_1\frac{(2n+1)\pi k}{r} - K\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right]}{(2n+1)^2 P\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}\,,$$

$$w = \frac{z(z-l)\varrho g}{2(\lambda+2\nu)} - 2zC'(\lambda+2\nu) - \frac{2\lambda\varrho g l^2}{\nu(\lambda+2\nu)\pi^3}\sum\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi z}{l}\,W_n}{(2n+1)^3 P\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}$$

$$W_n = \begin{vmatrix} f_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right), & \frac{(2n+1)^2\pi^2 r^2}{4l^2} f_1\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) + \frac{(\lambda+2\nu)}{\lambda+\nu} f_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) \\ f_1\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right), & f_0\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right) + \frac{\lambda+2n}{2(\lambda+\nu)} f_1\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right) \end{vmatrix}$$

$$= f_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) f_0\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right) - \frac{(2n+1)^2\pi^2 r^2}{4l^2} f_1\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) f_1\left(\frac{2n+1\,\pi k}{l}\right)$$

$$- \frac{\lambda+2\nu}{2(\lambda+\nu)} f_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) f_1\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)\,.$$

Aus den unter (6) und (7) Art. I gefundenen Verhältnissen des Anwachsens der Functionen f_0, f_1, P für ein wachsendes Argument, also auch für den Fall, dass in $(2n+1)\pi r : l$ die Zahl n grösser und grösser wird, folgt, so lange $r < k$ ist, also für das ganze Innere des untersuchten Körpers, dass die Reihen s und w sammt ihren sämmtlichen Diffentialquotienten nach z und r unbedingt convergent sind. An der Oberfläche sind aber wenigstens diejenigen Differentialquotienten convergente Reihen, welche in den Oberflächenbedingungen vorkommen, so dass wir überall nur erlaubte Operationen vorgenommen haben.

Der Druck, den die untere Grenzfläche auszuhalten hat, ist

$$(28)\qquad D_0 = D_{0,0} + \Sigma D_{0,\,2n+1}$$

$$= -8\nu(\lambda+\nu)C' - \tfrac{1}{2}\varrho g l + \frac{4\lambda\varrho l}{(\lambda+2\nu)\pi^2}\sum\frac{Q_n}{(2n+1)^2 P\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}\,,$$

$$Q_n = f_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) f_0\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)$$

$$- \frac{(2n+1)^2\pi^2 r^2}{4l^2} f_1\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) f_1\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right) - f_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) f_1\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)$$

$$= \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}\left[k^2 f_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) f_2\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right) - \right.$$

$$\left. - r^2 f_1\left(\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right) f_1\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)\right]\,.$$

Der Druck, den die oben aufgelegte Ebene auszuhalten hat, ist

$$(28^a)\quad D_l = D_{l,0} + \Sigma D_{l,2u+1} = D_{l,0} + \Sigma D_{0,2u+1} =$$
$$= 8\nu(\lambda+\nu)C' - \tfrac{1}{2}\varrho g l_n + \frac{4\lambda\varrho g l}{(\lambda+2\nu)\pi^2}\sum \frac{Q_n}{(2n+1)^2 P\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}\,.$$

Der Gesammtdruck auf die Unterlage bez. aufgelegte Ebene ist

$$(29)\qquad \begin{gathered} -8\nu(\lambda+\nu)k^2\pi C' - \tfrac{1}{2}\varrho g l k^2\pi\;;\\ 8\nu(\lambda+\nu)k^2\pi C' - \tfrac{1}{2}\varrho g l k^2\pi\,. \end{gathered}$$

Ist der Gesammtdruck auf die obere Ebene Null, so ist der auf die Unterlage dem Gewichte des Cylinders gleich. Der Druck auf die Unterlage ist nach (28) in jedem Punkte ein völlig bestimmter. Wäre der Körper nicht elastisch, sondern starr, so würde die analytische Mechanik über diesen Punkt keinen Aufschluss geben, er würde unbestimmt sein. Für $r = 0$ und $r = k$ hat der Druck die Werthe

$$D_0(r=0) = -8\nu(\lambda+\nu)C' - \tfrac{1}{2}\varrho g l$$
$$+ \frac{\lambda\varrho g k^2}{(\lambda+2\nu)l}\sum \frac{f_2\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}{P\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}\,,$$

$$D_0(r=k) = -8\nu(\lambda+\nu)C' - \tfrac{1}{2}\varrho g l$$
$$+ \frac{\lambda\varrho g k^2}{(\lambda+2\nu)l}\sum \frac{f_0\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right) f_2\frac{(2n+1)\pi k}{l} - f_1^2\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}{P\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}\,.$$

Die letzte Summe hat einen negativen Werth (vergl. (25) Art. III). Damit aber der Druck überall einen negativen Werth habe, wie es für die experimentelle Behandlung des Problems nöthig ist, muss

$$8\nu(\lambda+\nu)C' + \tfrac{1}{2}\varrho g l > \frac{\lambda\varrho g k^2}{\lambda+2\nu}\sum f_2\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right) : P\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)$$

sein, was immer möglich ist, weil man den Gesammtdruck beliebig gross machen kann. Soll aber zugleich auch der Druck auf die obenauf gelegte Ebene ebenfalls des Experimentes wegen überall positiv sein, so muss

$$8\nu(\lambda+\nu)C' - \tfrac{1}{2}\varrho g l \geqq$$
$$\frac{\lambda\varrho g k^2}{(\lambda+2\nu)l}\sum\frac{f_1{}^2\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right) - f_0\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)f_2\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}{p\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}$$

sein, was ebenfalls möglich ist. — In der Grenzfläche $z = 0$ hat das radicale Verschiebungsmass den Werth

$$s_{(z=0)} = \lambda C' + \frac{\lambda\varrho g}{\nu(\lambda+2\nu)\pi^2}\cdot\Sigma S_n\ ,$$

und ist positiv, wenn C' positiv ist, für $z = l$ aber hat es den Werth

$$s_{(z=l)} = \lambda C' - \frac{\lambda\varrho g}{\nu(\lambda+2\nu)\pi^2}\cdot\Sigma S_n\ .$$

Diese Verschiebung kann, wenn C' nicht zu gross ist, negativ sein, und kann an einer bestimmten Stelle ihr Zeichen wechseln. Die Summe dieser Grössen in entsprechenden Punkten der oberen und unteren Grenzfläche ist constant. In der Ebene $z = \frac{1}{2}l$ ist $s = C'$, es ist also dort das Verschiebungsmass unabhängig von der Entfernung von der Achse. In ihr ist auch $\frac{\partial w}{\partial z}$ von r unabhängig und also auch θ die Dilatation. Eine Faser, welche die Entfernung r' von der Achse hat, und ihr parallel ist, hat nach der Deformation die Gleichung

$$\xi = r's = r'C'\lambda + \Sigma\frac{\lambda\varrho g l k}{2\nu(\lambda+\nu)\pi^2}S_n\cos\frac{(2n+1)\pi z}{l}\ ,$$

wenn ξ die Abscisse und z die Ordinate ist. An der Stelle $z = \frac{1}{2}l$ hat diese Curve einen Wendepunkt, weil $\partial^2\xi : \partial z^2$ dort verschwindet. Setzt man, um von der äusseren Gestalt eine Vorstellung zu erhalten, k für r', so folgt als Gleichung der Oberflächenmeridiancurve

$$(30)\qquad \xi = k\lambda C' + \sum\frac{\lambda\varrho g l k}{2\nu(\lambda+\nu)\pi^2}\cdot\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi z}{l}\cdot f_1{}^2\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}{(2n+1)^2\,p\left(\frac{(2n+1)\pi k}{l}\right)}\ .$$

Wäre $\lambda = 0$, wäre also mit dem Zusammendrücken keine seitliche Ausdehnung verbunden, und betrachten wir der Einfachheit halber nur den Fall, in welchem der Gesammtdruck auf die obere Fläche Null ist, in welchem also $8\nu\nu C' = \frac{1}{2}\varrho g l$ ist, so würde sich ergeben

$$w = \frac{z(z-l)}{4\nu}\varrho g - 4\nu C z' = \frac{z(z-2l)\varrho g}{4\nu}\,, \qquad s = 0\,.$$

Wenn wir aber λ nicht Null setzen, r und k aber so klein annehmen, dass wir die zweiten Potenzen vernachlässigen dürfen, so erhalten wir unter derselben Voraussetzung über den Gesammtdruck durch Summation der trigonometrischen Reihen

$$s = \lambda C' + \frac{\lambda\varrho g}{2\nu(\lambda+\nu)}\cdot\frac{l-2z}{8l} = \frac{\lambda\varrho g(\lambda - z)}{4\nu(\lambda+\nu)}\,,$$

$$w = \frac{z(z-l)\varrho g}{2(\lambda+\nu)} - \frac{z(\lambda+2\nu)\varrho g l}{8\nu(\lambda+\nu)} - \frac{\lambda\varrho g l^2}{\nu(\lambda+\nu)(\lambda+2\nu)\pi^3}\sum\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi z}{l}}{(2n+1)^3}$$

$$= \frac{\varrho g(\lambda+2\nu)}{8\nu(\lambda+\nu)}(z^2 - 2zl)\ ;$$

wir erhalten also das vorige Resultat für w wieder, nur mit einem anderen Factor versehen.

Damit haben wir das gestellte Problem gelöst. Auf die Untersuchung des Elasticitätsellipsoids einzugehen unterlasse ich wegen der zu umfangreichen Formeln.

SITZUNG AM 7. DECEMBER 1885.

Wilibald Reichardt, *Ein Beitrag zur Theorie der Gleichungen sechsten Grades.* (Vorgelegt von *F. Klein.*)

Für die Anwendbarkeit der von Herrn Prof. Klein im 15. Bande der Math. Annalen mitgetheilten Methode zur Lösung einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

ist ein erstes Erforderniss die Kenntniss von Grössen y_1, y_2, ..., y_μ (wobei μ möglichst klein ist), die sich bei allen Vertauschungen oder (falls man die Quadratwurzel aus der Discriminante adjungirt) wenigstens bei den geraden Vertauschungen der n Wurzeln k_1, k_2, ... k_n linear mit bekannten Coefficienten substituiren.

Im Falle $n = 5$ z. B. ist durch die Existenz zweier Grössen y_1, y_2, zu denen eine Gruppe linearer Substitutionen (die Gruppe der 120 Ikosaëdersubstitutionen) gehört, die mit den 60 geraden Vertauschungen der Wurzeln k_1, k_2, ... k_5 isomorph ist, ein Weg zur Lösung der allgemeinen Gleichung 5ten Grades indicirt.

In seinen Seminarvorträgen im Sommersemester 1885 und auch bei anderer Gelegenheit[1]) hat nun Herr Prof. Klein darauf aufmerksam gemacht, dass im Falle $n = 6$ die homogenen Coordinaten $w : x : y : z$ eines Knotens der zu der Complexschaar

$$\sum_1^6 {}_i \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0$$

als Singularitätenfläche gehörigen Kummer'schen Fläche, wenn man als Coordinatentetraëder eines der 15 Fundamentaltetraëder zu Grunde legt, Grössen $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ der gewollten

[1]) Vergl. die Fussnote pag. 126 in F. Klein: Vorlesungen über das Ikosaëder und die Auflösung der Gleichungen vom 5ten Grade.

Art sind[1]), und zwar solche, zu denen eine Gruppe gehört, die mit allen 720 Vertauschungen der k_i isomorph ist. Als gleichberechtigt mit den Coordinaten $w : x : y : z$ eines Knotens in Bezug auf ein erstes Fundamentaltetraëder erscheinen doch nämlich einmal die Coordinaten der anderen 15 Doppelpunkte in Bezug auf dasselbe Fundamentaltetraëder, dann aber auch die Coordinaten der Knoten in Bezug auf die anderen Fundamentaltetraëder; oder, präciser ausgedrückt: $w : x : y : z$ hängen in der Weise irrational von den k_i ab, dass mit einem ersten Werthsysteme $w : x : y : z$ alle übrigen zu denselben Werthen k_i gehörigen Werthsysteme durch lineare Relationen verbunden sind, welche der Ausdruck der folgenden 16 . 720 Collineationen sind:

1) Der 16 . 360 Collineationen, welche je der Combination einer geraden Anzahl von Vorzeichenwechseln der Liniencoordinaten x_i mit einer geraden Vertauschung der x_i entsprechen.

2) Der 16 . 360 Collineationen, die je durch Combination einer ungeraden Anzahl von Vorzeichenwechseln der x_i mit einer ungeraden Vertauschung der x_i entstehen.

Zu den homogenen Coordinaten w, x, y, z eines Knotens in Bezug auf ein Fundamentaltetraëder gehört also eine Gruppe homogener linearer Substitutionen, welche den 16 . 720 Umsetzungen

$$3) \qquad x_i' = \pm x_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots 6$$

entsprechen, und die mit den 720 Vertauschungen der k_i (meroëdrisch) isomorph ist, wie es verlangt wurde.

Zunächst wird nun behauptet, *die zugehörige quaternäre Gruppe homogener linearer Substitutionen bestehe nicht aus blos 16 . 720, sondern aus 2 . 16 . 720 Operationen.* Die Möglichkeit hierzu ist dadurch gegeben, dass, wenn

$$w' = W, \quad x' = X, \quad y' = Y, \quad z' = Z$$

eine homogene lineare Substitution von w, x, y, z ist, die einer bestimmten Operation 3) entspricht, die Substitution

$$w' = -W, \quad x' = -X, \quad y' = -Y, \quad z' = -Z$$

---

[1]) Es sind dies dieselben Grössen, welche Borchardt als Moduln in die Theorie der zum Falle $p = 2$ gehörigen hyperelliptischen Thetafunctionen einführt (Comptes rendus, t. 88).

derselben Operation 3) zugehört, weil ja ein solcher simultaner Zeichenwechsel der Punktcoordinaten auf den Werth der Liniencoordinaten x_i keinen Einfluss hat.

Zum Beweise unserer Behauptung genügt es offenbar zu zeigen, dass der *Isomorphismus der Gruppe* 1) mit der ihr entsprechenden Gruppe quaternärer Substitutionen hemiëdrisch ist; und hierzu wiederum hat man sich nur zu überzeugen, dass die Gruppe quaternärer Substitutionen, die einer der beiden Gruppen

4) $x_i' = \pm x_i,$

5) $x_i' = x_k$

correspondirt (wobei immer nur eine gerade Anzahl von Vorzeichenwechseln resp. Vertauschungen gemeint ist), aus doppelt so viel Operationen besteht, wie 4) resp. 5). Wie zu erwarten steht, gestaltet sich der auf die kleinere Gruppe 4) bezügliche Nachweis einfacher als der die Gruppe 5) betreffende. In der That erkennt man leicht die Richtigkeit des folgenden (diesen Theil unserer Behauptung ausdrückenden) Satzes:

I. *Aus den 32 sich paarweise nur durch das Vorzeichen unterscheidenden linearen Substitutionen von w, x, y, z, welche der Gruppe 4) entsprechen, kann man keine aus 16 Operationen bestehende Gruppe G zusammensetzen, die mit 4) holoëdrisch isomorph wäre.*

Zum Beweise dieses Satzes macht sich natürlich die wirkliche Berechnung wenigstens einiger der zu untersuchenden linearen Substitutionen der w, x, y, z nothwendig. Dies geschieht unter Benutzung der folgenden Gleichungen, die den Zusammenhang der x_i mit den auf ein Fundamentaltetraëder bezüglichen Liniencoordinaten p_{ik} und also mit den Coordinaten w, x, y, z vermitteln[1]):

$$6^a) \quad \begin{cases} x_1 = p_{12} + p_{34}, & x_3 = p_{13} + p_{42}, & x_5 = p_{14} + p_{23}, \\ x_2 = -i(p_{12} - p_{34}), & x_4 = -i(p_{13} - p_{42}), & x_6 = -i(p_{14} - p_{23}). \end{cases}$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen lauten folgendermassen:

$$6^b) \quad \begin{cases} p_{12} = \frac{1}{2}(x_1 + ix_2), & p_{13} = \frac{1}{2}(x_3 + ix_4), & p_{14} = \frac{1}{2}(x_5 + ix_6), \\ p_{34} = \frac{1}{2}(x_1 - ix_2), & p_{42} = \frac{1}{2}(x_3 - ix_4), & p_{23} = \frac{1}{2}(x_5 - ix_6), \end{cases}$$

[1]) Vergl. Rohn, Math. Annalen Band 18.

Den Operationen

$$(S):\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = -x_2 \\ x_k' = x_k \;\; (k = 3, 4, 5, 6), \end{cases} \qquad (T):\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_i' = x_i \;\; (i = 2, 3, 4, 5) \\ x_6' = -x_6 \end{cases}$$

der Gruppe 4) entsprechen nach diesen Formeln 6) die quaternären Substitutionen

$$[S]:\begin{cases} w' = \pm iw \\ x' = \pm ix \\ y' = \mp iy \\ z' = \mp iz \end{cases} \qquad [T]:\begin{cases} w' = \pm iy \\ x' = \pm iz \\ y' = \pm iw \\ z' = \pm ix. \end{cases}$$

Das heisst also: Bildet man durch Einführung der Werthe w', x', y', z' statt der w, x, y, z aus den p_{ik} die Grössen p'_{ik}, und drückt man diese durch die x_i aus, so erhält man für die p'_{ik} Ausdrücke, die aus den rechten Seiten der Gleichungen 6[b]) durch die Operationen (S) resp. (T) hervorgehen. Nun ist

$$(S)^2 = 1, \qquad (T)^2 = 1.$$

Sollen also $[S]$ und $[T]$ einer Gruppe G der verlangten Art angehören, so muss auch

$$[S]^2 = 1, \qquad [T]^2 = 1$$

sein. Die beiden hingeschriebenen Substitutionen $[S]$ sowohl, wie die beiden Substitutionen $[T]$ führen aber, zweimal hintereinander angewendet, w, x, y, z nicht wieder in w, x, y, z, sondern in $-w$, $-x$, $-y$, $-z$ über; sie können also nicht der gesuchten Gruppe G angehören. Es fragt sich nun aber, *ob man sie nicht durch Zufügung geeigneter Proportionalitätsfactoren so modificiren kann, dass sie doch einer Gruppe G von der verlangten Beschaffenheit angehören dürfen.* Da die hingeschriebenen Operationen $[S]$ und $[T]$ bei zweimaliger Anwendung w, x, y, z in $-w$, $-x$, $-y$, $-z$ überführen, so gewinnt man die allgemeinsten Operationen $[S]$ und $[T]$ von der Periode 2 durch Zufügung des Proportionalitätsfactors $\sqrt{-1} = \pm i$:

$$[S]:\begin{cases} w' = (-1)^\mu w \\ x' = (-1)^\mu x \\ y' = -(-1)^\mu y \\ z' = -(-1)^\mu z \end{cases} (\mu = 0, 1), \qquad [T]:\begin{cases} w' = (-1)^\nu y \\ x' = (-1)^\nu z \\ y' = (-1)^\nu w \\ z' = (-1)^\nu x. \end{cases} (\nu = 0, 1).$$

Aber auch diese Operationen können unmöglich einer Gruppe G angehören. Denn es ist ja

$$(S)(T) = (T)(S);$$

die Operationen $[S]\,[T]$ und $[T]\,[S]$ dagegen können bei keinen Werthen von μ und ν identisch sein, vielmehr ist

$$[S]\,[T]: \begin{cases} w' = -(-1)^{\mu+\nu} y \\ x' = -(-1)^{\mu+\nu} z \\ y' = (-1)^{\mu+\nu} w \\ z' = (-1)^{\mu+\nu} x \end{cases} \qquad [T]\,[S]: \begin{cases} w' = (-1)^{\mu+\nu} y \\ x' = (-1)^{\mu+\nu} z \\ y' = -(-1)^{\mu+\nu} w \\ z' = -(-1)^{\mu+\nu} x. \end{cases}$$

Nachdem so der Nachweis erbracht ist, dass der Isomorphismus der Gruppe 4) mit einer ihr entsprechenden quaternären Gruppe nothwendig hemiëdrisch ist, hat zugleich, wie schon oben gesagt wurde, die Frage nach der Art des Isomorphismus der Gruppen 1) und 3) mit den ihnen entsprechenden quaternären Gruppen ihre Erledigung gefunden: *Auch dieser Isomorphismus ist hemiëdrisch; die den senären Gruppen* 1) *resp.* 3) *entsprechenden quaternären Gruppen bestehen also nothwendig aus* $2 \cdot 16 \cdot 360$ *resp.* $2 \cdot 16 \cdot 720$ *Substitutionen, mag nun der Isomorphismus der Gruppe* 5) *mit der ihr entsprechenden quaternären Gruppe ebenfalls nothwendig hemiëdrisch sein oder nicht.*

Der Entscheid dieser letzteren Frage ist aber an sich von Interesse, weil man doch schliesslich vorziehen wird, statt der homogenen Coordinaten w, x, y, z eines Knotens, die bei den Vertauschungen der k_i $16 \cdot 720$ Collineationen erleiden, solche Grössen y_1, y_2, y_3, y_4 zu benutzen, zu denen eine Gruppe linearer Substitutionen gehört, die mit der Gruppe der 360 geraden Vertauschungen der k_i womöglich hemiëdrisch oder gar holoëdrisch isomorph ist, in welch letzterem Falle man ja sogar die Grössen y_i rational bilden könnte[1]). Eben dieser Fall tritt nun aber nicht ein; es gilt vielmehr der folgende Satz:

II. *Es ist unmöglich, eine Gruppe G von 360 Substitutionen der* w, x, y, z *anzugeben, die der Gruppe der 360 geraden Vertauschungen der* x_i *(der Gruppe* 5)*) entspräche und mit ihr holoëdrisch isomorph wäre.*

Um dies zu beweisen, fassen wir diejenigen drei ungeraden Vertauschungen der x_i ins Auge, die aus der Identität

---

[1]) Vergl. F. Klein, l. c.

$$(J) : x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$$

die Permutationen

$$(A) : x_2\ x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$$
$$(B) : x_1\ x_3\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6$$
$$(C) : x_1\ x_2\ x_4\ x_3\ x_5\ x_6$$

machen, und setzen aus ihnen die folgenden drei geraden Vertauschungen zusammen

$$(BA) : x_3\ x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6$$
$$(AC) : x_2\ x_1\ x_4\ x_3\ x_5\ x_6$$
$$(BC) : x_1\ x_3\ x_4\ x_2\ x_5\ x_6 .$$

Wir wollen beachten, dass

$$(BA)^3 = 1 , \quad (AC)^2 = 1 , \quad (BC)^3 = 1 ,$$

so dass also die quaternären Substitutionen

$$[BA] , \quad [AC] , \quad [BC] ,$$

falls sie einer Gruppe G der genannten Art angehörig sein sollen, ebenfalls resp. die Perioden 3, 2, 3 haben müssen. Nun ergeben sich aber nach den Gleichungen 6) Substitutionen

$$[AC] : \begin{cases} w' = \pm iz \\ x' = \mp y \\ y' = \pm x \\ z' = \pm iw , \end{cases}$$

von denen jede, zweimal hintereinander angewendet, w, x, y, z nicht in w, x, y, z, sondern in $-w, -x, -y, -z$ überführt. Aus den 720 sich paarweise nur durch das Vorzeichen unterscheidenden Substitutionen der w, x, y, z, wie sie sich direct nach den Gleichungen 6) ergeben, lässt sich also sicher nicht eine Gruppe G der verlangten Art zusammensetzen. Es ist nun aber wieder die Frage, ob man nicht diese Substitutionen der w, x, y, z durch Zufügung geeigneter Proportionalitätsfactoren so modificiren kann, dass sie doch eine Gruppe G bilden. Die allgemeinste Operation $[AC]$ von der Periode 2 gewinnt man, indem man in die hingeschriebenen Substitutionen den Proportionalitätsfactor $\sqrt{-1} = \pm i$ einfügt:

$$[AC] : \begin{cases} w' = \mp z \\ x' = \mp iy \\ y' = \pm ix \\ z' = \mp w . \end{cases}$$

Berechnet man weiterhin nach den Relationen 6) die den Operationen (BA) und (BC) entsprechenden quaternären Substitutionen $[BA]$ und $[BC]$ und versieht diese in allgemeinster Weise mit Proportionalitätsfactoren derart, dass

$$[BA]^3 = 1, \qquad [BC]^3 = 1$$

wird, so erhält man:

$$[BA]: \begin{cases} w' = -e^{\frac{2hi\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1+i)(w - iz) \\ x' = -e^{\frac{2hi\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1+i)(x - iy) \\ y' = +e^{\frac{2hi\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1+i)(x + iy) \\ z' = +e^{\frac{2hi\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1+i)(w + iz); \end{cases} \quad (h = 0, 1, 2)$$

$$[BC]: \begin{cases} w' = -e^{\frac{2ki\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1-i)(w + iz) \\ x' = -e^{\frac{2ki\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1+i)(x + iy) \\ y' = -e^{\frac{2ki\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1+i)(x - iy) \\ z' = +e^{\frac{2ki\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1-i)(w - iz). \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2)$$

Nun ist doch

$$(BA)\,(AC) = (BC).$$

Soll also eine Gruppe G der gewollten Art existiren, so muss nothwendig auch durch Verbindung einer der zulässigen Substitutionen $[BA]$ mit einer der zulässigen Substitutionen $[AC]$ eine der zulässigen Substitutionen $[BC]$ erhalten werden können. Nun findet sich aber

$$[BA]\,[AC]: \begin{cases} w' = \mp e^{\frac{2hi\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1+i)(w + iz) \\ x' = \pm e^{\frac{2hi\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1-i)(x + iy) \\ y' = \pm e^{\frac{2hi\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1-i)(x - iy) \\ z' = \pm e^{\frac{2hi\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1+i)(w - iz) \end{cases} \quad (h = 0, 1, 2)$$

und keine dieser Substitutionen ist mit einer zulässigen Substitution $[BC]$ identisch, weil man doch unmöglich h, k und das Vorzeichen so wählen kann, dass beispielsweise die Werthe von w' gleich werden, dass also

$$\mp e^{\frac{2hi\pi}{3}} \cdot \tfrac{1}{2}(1+i) = -e^{\frac{2ki\pi}{3}} \cdot \tfrac{1}{2}(1-i)$$

oder

$$e^{\frac{2(h-k)i\pi}{3}} = \mp i$$

wird.

Damit ist in der That der verlangte Nachweis erbracht.

David Hilbert, *Ueber eine allgemeine Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten für eine binäre Grundform geraden Grades.* (Vorgelegt von *F. Klein.*)

Unter den Schwierigkeiten und Hindernissen, welche sich der fortschreitenden Entwickelung der binären Invariantentheorie in den Weg stellen, sind diejenigen nicht gering zu schätzen, welche einerseits in der Herstellung hinreichender Invarianten- resp. Covariantencriterien für die einfachsten und nächstliegenden Ausartungen einer Grundform, andererseits in der Deutung der einfachsten Invarianten- resp. Covariantenrelationen durch Beschreibung der entsprechenden Ausartung jener Form bestehen. Wie in der That die bisher der Untersuchung zugänglichen Einzelfälle bestätigen, geben im Allgemeinen einfache an eine Grundform gestellte Anforderungen, z. B. die Forderung einer Doppelwurzel, keineswegs zu übersichtlichen invarianten Bildungen Anlass, während umgekehrt das identische Verschwinden einfacher Covarianten, z. B. einer bestimmten Ueberschiebung der Grundform über sich selber, nur selten eine einfache Deutung für jene Grundform gestattet. Eine Aussöhnung des gekennzeichneten Zwiespaltes für eine Reihe von Fragen anzubahnen, eventuell Grund und Wesen jener eigenthümlichen Verhältnisse aufzudecken, dafür giebt es meiner Ueberzeugung nach ein geeignetes Mittel in der systematischen Behandlung einer gewissen allgemeinen Gattung *irrationaler Invarianten und Covarianten* der Grundform. Als irrationale Invariante bezeichnen wir jede Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Invarianten der Grundform sind und zwar in der Weise, dass ihre Gewichte eine arithmetische Reihe bilden. Die so definirte irrationale Invariante besitzt in der That die Eigenschaft, für die transformirte Grundform einen Werth anzunehmen, welcher bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante als Factor mit ihrem

ursprünglichen Werthe übereinstimmt. Eine irrationale Covariante ist eine solche Covariante, deren Bildungsgesetz die Kenntniss irgendwelcher irrationaler Invarianten voraussetzt.

Um nun den Weg anzudeuten, welcher naturgemäss und unmittelbar zur Betrachtung jener allgemeinen Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten hinführt, verfahren wir derart, dass wir zunächst eine irrationale Covariante φ von unbestimmter Bedeutung fingiren und dann von dieser aus unter ausschliesslicher Benutzung der einfachsten und ursprünglichsten invarianten Prozesse zu weiteren irrationalen Bildungen fortzuschreiten versuchen. In diesem Sinne bilden wir die i^{te} Ueberschiebung der Form φ über die Grundform f, wodurch sich die neue irrationale Covariante $(f, \varphi)_i = \varphi'$ ergiebt; die i'^{te} Ueberschiebung der letzteren über die Grundform f liefert die weitere irrationale Covariante $(f, \varphi')_{i'} = \varphi''$ u. s. f. War die ursprüngliche Form φ vom Grade ν, so besitzt die Form φ' den Grad $\nu + n - 2i$, die Form φ'' den Grad $\nu + 2n - 2(i + i')$ u. s. f. Richten wir es nun so ein, dass nach einer gewissen Anzahl $\varkappa$ von Wiederholungen der beschriebenen Operation die dann entstandene Form $\varphi^{(\varkappa)}$ mit der ursprünglichen Form φ den gleichen Grad ν erhält und lassen von da an die Ueberschiebungszahlen $i, i', \ldots i^{(\varkappa-1)}$ periodisch wiederkehren, so ist damit ein in das Unendliche fortlaufender Prozess definirt, und es entsteht die Frage, welche Grenzformen nach unendlicher Fortsetzung dieses Prozesses auftreten. Die nähere Ueberlegung zeigt, dass diese Grenzformen von der Art der ursprünglich fingirten Form φ wesentlich unabhängig erscheinen: zugleich ergiebt sich die aufgeworfene Frage als gleichbedeutend mit der Aufsuchung solcher Formen φ, welche die Eigenschaft besitzen, sich nach $\varkappa$ maliger Wiederholung des oben beschriebenen invarianten Prozesses bis auf eine Constante λ zu reproduciren. Diese Constante λ ist eine irrationale Invariante im früher definirten Sinne, die Form φ eine ihr zugehörige irrationale Covariante. Inwiefern die in der bisherigen Litteratur behandelten Einzelfälle von irrationalen Invarianten und Covarianten durch die skizzirten Gesichtspunkte neuen Zusammenhang und einheitliche Bedeutung gewinnen, tritt im weiteren Verlauf der Untersuchung klar zu Tage.

Nach vorausgeschickter Kennzeichnung des allgemeinen Problems dürfte es als eine naturgemässe Specialisirung des-

selben erscheinen, wenn wir uns vorläufig mit der Untersuchung des nächstliegenden Falles $\varkappa = 1$ eingehender beschäftigen. Unsere Fragestellung specialisirt sich in diesem Falle, wie folgt:

Wie lassen sich binäre Formen $\varphi = \alpha_x^\nu$ vom ν^{ten} Grade finden, die sich nach ihrer i^{ten} Ueberschiebung über eine gegebene binäre Grundform $f = a_x^n$ vom ν^{ten} Grade bis auf einen constanten, im Allgemeinen von Null verschiedenen Factor — λ ungeändert reproduciren, mithin die Identität:

$$(1) \qquad (f, \varphi)_i + \lambda\varphi = 0$$

erfüllen?

Zunächst ist offenbar, dass in Folge der Relation:

$$\nu + n - 2i = \nu \quad \text{oder} \quad n = 2i$$

das gegenwärtige Problem stets eine binäre Form geraden Grades als gegebene Grundform voraussetzt. Da fernerhin das Verschwinden sämmtlicher $\nu + 1$ Coefficienten auf der linken Seite der Formel (1) erforderlich ist, so zerfällt die Bedingung (1) in $\nu + 1$ Bedingungsgleichungen für die $\nu + 1$ nicht homogenen Unbekannten:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \ \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \ldots \frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}, \ \lambda,$$

worin sich von vorne herein die Widerspruchsfreiheit und Bestimmtheit unseres Problems offenbart. Durch die Mittel der Determinantentheorie und die ausgiebige Anwendung von Eliminationsprozessen gewinnen wir der Reihe nach folgende Resultate:

λ ist eine irrationale Invariante der Grundform f vom Gewichte i und genügt der Gleichung $\nu + 1^{\text{ten}}$ Grades:

$$(2) \quad \Delta(\lambda) = J_0\lambda^{\nu+1} + J_2\lambda^{\nu-1} + J_3\lambda^{\nu-2} + \cdots + J_{\nu+1} = 0,$$

worin J_0 eine von Null verschiedene Zahl, $J_2, J_3, \ldots J_{\nu+1}$ rationale Invarianten resp. vom Grade 2, 3, ... $\nu + 1$ in den Coefficienten der Grundform f bedeuten. Die linke Seite der Gleichung (2) schreibt sich als Determinante in der Gestalt:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} k_0^0 a_i + \lambda, & k_1^0 a_{i-1}, & k_2^0 a_{i-2}, & \ldots k_\nu^0 a_{i-\nu}, \\ k_0^1 a_{i+1}, & k_1^1 a_i - \binom{\nu}{1}\lambda, & k_2^1 a_{i-1}, & \ldots k_\nu^1 a_{i-\nu+1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ k_0^\nu a_{i+\nu}, & k_1^\nu a_{i+\nu-1}, & k_2^\nu a_{i+\nu-2}, & \ldots k_\nu^\nu a_i + (-1)^\nu\binom{\nu}{\nu}\lambda \end{vmatrix}$$

Die Zeichen k bedeuten gewisse ganze Zahlen, welche der Doppelgleichung:

$$k_\varrho^{\sigma} = k_\sigma^{\varrho} = (-1)^{i+\nu}\, k_{\nu-\varrho}^{\nu-\sigma}$$

genügen. Zur Discussion der Gleichung (2) und damit überhaupt zur Weiterentwickelung des Problems ist eine durchgehende *Unterscheidung folgender vier Hauptfälle* nothwendig:

$$\left.\begin{array}{llll} \textit{Hauptfall}\ \ \mathrm{I}: & i \equiv 0, & \nu \equiv 0 & (\mathrm{mod}\ 2) \\ \quad -\quad \mathrm{II}: & i \equiv 1, & \nu \equiv 1 & - \\ \quad -\quad \mathrm{III}: & i \equiv 1, & \nu \equiv 0 & - \\ \quad -\quad \mathrm{IV}: & i \equiv 0, & \nu \equiv 1 & - \end{array}\right\} \begin{array}{l} i \leqq \nu, \\ n = 2i. \end{array}$$

Es zeigt sich, dass nur für Hauptfall I die Gleichung (2) im Allgemeinen $\nu + 1$ wesentlich untereinander verschiedene Wurzeln λ liefert; für Hauptfall II ordnen sich die $\nu + 1$ Wurzeln λ in $\frac{\nu+1}{2}$ Paare entgegengesetzt gleicher Wurzeln; für Hauptfall III ist eine der $\nu + 1$ in Rede stehenden Wurzeln gleich Null, während sich die übrigen ν in $\frac{\nu}{2}$ Paare entgegengesetzt gleicher Werthe anordnen; Hauptfall IV endlich charakterisirt sich dadurch, dass sich für ihn die $\nu + 1$ Wurzeln λ der Gleichung (2) in $\frac{\nu+1}{2}$ Paare gleicher Wurzeln anordnen. Zur Erleichterung der Uebersicht bei späterer Bezugnahme *gruppiren wir die $\nu + 1$ Wurzeln λ der Gleichung* (2) *in den vier Hauptfällen, wie folgt:*

Hauptfall I:

$$\lambda^{(0)},\ \lambda^{(1)},\qquad \lambda^{(2)},\ \lambda^{(3)}\qquad \ldots \lambda^{(\nu)}.$$

Hauptfall II:

$$\lambda^{(0)},\ \lambda^{(1)} = -\lambda^{(0)},\ \lambda^{(2)},\ \lambda^{(3)} = -\lambda^{(2)},\ \ldots\ \lambda^{(\nu-1)},\ \lambda^{(\nu)} = -\lambda^{(\nu-1)}.$$

Hauptfall III:

$$\lambda^{(0)},\ \lambda^{(1)} = -\lambda^{(0)},\ \lambda^{(2)},\ \lambda^{(3)} = -\lambda^{(2)},\ \ldots \lambda^{\nu-2},\quad \lambda^{\nu-1} = -\lambda^{(\nu-2)};\ \lambda^{(\nu)} = 0.$$

Hauptfall IV:

$$\lambda^{(0)},\ \lambda^{(1)} = \lambda^{(0)},\ \lambda^{(2)},\ \lambda^{(3)} = \lambda^{2};\ \ :\ \ldots \lambda^{\nu-1)},\ \lambda^{(\nu)} = \lambda^{(\nu-1)}.$$

Was nun die Ermittelung und Discussion der fraglichen Formen φ selber anbetrifft, so ergiebt sich, *dass für die ersten drei Hauptfälle im Allgemeinen zu jeder der $\nu + 1$ Wurzeln λ*

eine und nur eine Form φ im Sinne der Bedingungsgleichung (1) *gehört*. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\varDelta(x, y, \lambda) =$$

$$\left|\begin{array}{lllll} (-1)^\nu y_2{}^\nu, & k_0{}^0 a_i + \lambda, & k_1{}^0 a_{i-1}, & \ldots k_\nu{}^0 a_{i-\nu}, \\ -(-1)^\nu \binom{\nu}{1} y_1 y_2{}^{\nu-1}, & k_0{}^1 a_{i+1}, & k_1{}^1 a_i - \binom{\nu}{1}\lambda, & \ldots k_\nu{}^1 a_{i-\nu+1}, \\ \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \ldots\;\; \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\;\; \cdot \\ \binom{\nu}{\nu} y_1{}^\nu, & k_0{}^\nu a_{i+\nu}, & k_1{}^\nu a_{i+\nu-1}, & \ldots k_\nu{}^\nu a_i + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu}\lambda, \\ 0, & x_1{}^\nu, & -\binom{\nu}{1} x_1{}^{\nu-1} x_2, & \ldots (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} x_2{}^\nu, \end{array}\right|$$

und entwickeln die Determinante nach Potenzen von λ, wie folgt:

$$(3) \qquad \varDelta(x, y, \lambda) = C_0 \lambda^\nu + C_1 \lambda^{\nu-1} + \cdots + C_\nu ,$$

so sind die Coefficienten C_0, C_1, ... C_ν rationale Covarianten vom Grade ν für jede der beiden Variabelnreihen x_1, x_2; y_1, y_2, dagegen resp. vom Grade 0, 1, ... ν in den Coefficienten der Grundform f. Wie mit Hülfe dieser invarianten Bildung (3) für die ersten drei Hauptfälle die Construction der zur Wurzel $\lambda^{(\mu)}$ zugehörigen irrational-covarianten Form $\varphi^{(\mu)}$ ausgeführt wird, ist aus der *nachstehenden Tabelle* ersichtlich:

Hauptfall I:
$$\left.\begin{array}{ll} \varDelta(x, y, \lambda^{(\mu)}) & = \varphi^{(\mu)}(x)\,.\,\varphi^{(\mu)}(y) \\ \varDelta(x, x, \lambda^{(\mu)}) & = [\varphi^{(\mu)}(x)]^2 \end{array}\right\} \mu = 0, 1, \ldots \nu.$$

- II:
$$\left.\begin{array}{ll} \varDelta(x, y, \lambda^{(\mu)}) & = \varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(y) \\ \varDelta(x, y, \lambda^{(\mu+1)}) & = \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(y) \\ \varDelta(x, x, \lambda^{(\mu)}) & = \varDelta(x, x, \lambda^{(\mu+1)}) \\ & = \varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(x) \end{array}\right\} \mu = 0, 2, \ldots \nu - 1.$$

- III:
$$\left.\begin{array}{ll} \varDelta(x, y, \lambda^{(\mu)}) & = \varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(y) \\ \varDelta(x, y, \lambda^{(\mu+1)}) & = \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(y) \\ \varDelta(x, x, \lambda^{(\mu)}) & = \varDelta(x, x, \lambda^{(\mu+1)}) \\ & = \varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(x) \end{array}\right\} \mu = 0, 2, \ldots \nu - 2.$$

$$\begin{array}{ll} \varDelta(x, y, 0) & = \varphi^{(\nu)}(x)\varphi^{(\nu)}(y), \\ \varDelta(x, x, 0) & = [\varphi^{(\nu)}(x)]^2 . \end{array}$$

Der vierte Hauptfall schliesslich nimmt eine gesonderte Stellung ein, indem für denselben die invarianten Ausdrücke $\Delta(x, y, \lambda^{(\mu)})$ für alle Werthe der Variabeln x_1, x_2 und y_1, y_2 identisch verschwinden. Die nähere Untersuchung dieses Hauptfalles zeigt dementsprechend, *dass hier jedem der $\frac{\nu+1}{2}$ untereinander verschiedenen Wurzelwerthe λ nicht eine bestimmte Form φ, sondern alle Formen eines gewissen Formenbüschels zugehören.* Zur Construction dieser $\frac{\nu+1}{2}$ Büschel verhilft uns die invariante Bildung:

$$\Delta\begin{pmatrix} x, & y & \lambda \\ r, & s & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -s_2^\nu, & -y_2^\nu, & k_0^0 a_i + \lambda, & k_1^0 a_{i-1}, & \ldots k_\nu^0 a_{-\nu}, \\ +\binom{\nu}{1} s_1 s_2^{\nu-1}, & +\binom{\nu}{1} y_1 y_2^{\nu-1}, & k_0^1 a_{i+1}, & k_1^1 a_i - \binom{\nu}{1}\lambda, & \ldots k_\nu^1 a_{i-\nu+1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ s_1^\nu, & y_1^\nu, & k_0^\nu a_{i+\nu}, & k_1^\nu a_{i+\nu-1}, & \ldots k_\nu^\nu a_i - \binom{\nu}{\nu}\lambda, \\ 0, & 0, & x_1^\nu, & -\binom{\nu}{1} x_1^{\nu-1} x_2, & \ldots -\binom{\nu}{\nu} x_2^\nu, \\ 0, & 0, & r_1^\nu, & -\binom{\nu}{1} r_1^{\nu-1} r_2, & \ldots -\binom{\nu}{\nu} r_2^\nu, \end{vmatrix}$$

$$= C_0 \lambda^{\nu-1} + C_1 \lambda^{\nu-2} + \cdots + C_{\nu-1},$$

worin die Entwickelungscoefficienten $C_0, C_1, \ldots C_{\nu-1}$ rationale Covarianten vom Grade ν für jede der vier Variabelnreihen $x_1, x_2;\ y_1, y_2;\ r_1, r_2;\ s_1, s_2$, dagegen resp. vom Grade $0, 1, \ldots \nu - 1$ in den Coefficienten der Grundform sind. Bezeichnen nun, μ als gerade vorausgesetzt, $\varphi^{(\mu)}$ und $\varphi^{(\mu+1)}$ zwei beliebige Formen des zur Wurzel $\lambda^{(\mu)}$ gehörigen Büschels, so besteht die Formel:

Hauptfall IV:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \lambda \\ r, & s & \end{pmatrix} &= [\varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(r) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(r)] \\ &\quad \times [\varphi^{(\mu)}(y)\,\varphi^{(\mu+1)}(s) - \varphi^{(\mu+1)}(y)\,\varphi^{(\mu)}(s)] \\ \Delta\begin{pmatrix} x, & x & \lambda \\ r, & r & \end{pmatrix} &= [\varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(r) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(r)]^2. \end{aligned}\right\} \mu = 0, 2, \ldots \nu - 1.$$

Die Jacobi'sche Covariante $J^{(\mu)}$ des so auftretenden Formenbüschels drückt sich unter Einführung des invarianten Determinantenausdruckes:

$$\varDelta^{(2)}(x, y, \lambda) =$$

$$\begin{vmatrix} y_2^{\nu-1}, & 0, & k_0^0 a_i+\lambda, & k_1^0 a_{i-1}, & \ldots k_\nu^0 a_{i-\nu}, \\ -\binom{\nu-1}{1} y_2^{\nu-2} y_1, & y_2^{\nu-1}, & k_0^1 a_{i+1}, & k_1^1 a_i - \binom{\nu}{1}\lambda, & \ldots k_\nu^1 a_{i-\nu+1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ . \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ . \\ y_1^{\nu-1}, & -\binom{\nu-1}{1} y_1^{\nu-2} y_2, & k_0^{\nu-1} a_{i+\nu-1}, & k_1^{\nu-1} a_{i+\nu-2}, & \ldots k_\nu^{\nu-1} a_{i-1}, \\ 0, & y_1^{\nu-1}, & k_0^\nu a_{i+\nu}, & k_1^\nu a_{i+\nu-1}, & \ldots k_\nu^\nu a_i - \binom{\nu}{\nu}\lambda, \\ 0, & 0, & x_1^{\nu-1}, & -\binom{\nu-1}{1} x_1^{\nu-2} x_2, \ldots & 0, \\ 0, & 0, & 0, & x_1^{\nu-1}, \ldots & x_2^{\nu-1}, \end{vmatrix}$$

$$= C_0 \lambda^{\nu-1} + C_1 \lambda^{\nu-2} + \cdots + C_{\nu-1}$$

mittelst der Formel:

$$\textit{Hauptfall IV}: \quad \varDelta^{(2)}(x, y, \lambda^{(\mu)}) = J^{(\mu)}(x)\, J^{(\mu)}(y)$$

$$\varDelta^{(2)}(x, x, \lambda^{(\mu)}) = [J^{(\mu)}(x)]^2,$$

direct durch den Wurzelwerth $\lambda^{(\mu)}$ und die rational-invarianten Bildungen C_0, $C_1, \ldots C_{\nu-1}$ der Grundform aus. Welche Formel übrigens in allen bisher angegebenen Formelpaaren den Vorzug verdient, ob die erstere mit zwei Variabelnreihen oder die letztere mit nur einer Variabelnreihe, bleibt der Prüfung des Einzelfalles vorbehalten.

Betreffs des gegenseitigen Verhaltens der Formen φ untereinander sprechen wir in aller Kürze folgende Behauptungen aus:

Die $\nu+1$ Formen $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots \varphi^{(\nu)}$ bilden, von Ausnahmefällen abgesehen, ein System linear von einander unabhängiger Formen ν^{ten} Grades.

Ihre ν^{ten} Ueberschiebungen $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu$ verschwinden für alle Indexpaare $\mu, \varkappa$, welche sich n i c h t in nachstehender Tabelle mit bezüglicher Unterscheidung der vier Hauptfälle verzeichnet finden.

Tab. I.

Hauptfall I: $\mu, \varkappa = 0, 0;\ = 1, 1;\ = 2, 2; \ldots = \nu, \nu.$

- II: $\mu, \varkappa = 0, 1;\ = 2, 3;\ = 4, 5; \ldots = \nu-1, \nu.$

- III: $\mu, \varkappa = 0, 1;\ = 2, 3;\ = 4, 5; \ldots = \nu-2, \nu-1;\ = \nu, \nu.$

- IV: $\mu, \varkappa = 0, 1;\ = 2, 3;\ = 4, 5; \ldots = \nu-1, \nu.$

Die in der Tabelle ausgezeichneten Ueberschiebungen müssen, von Ausnahmefällen abgesehen, nothwendig endlich bleiben; sie gestatten eine einfache Darstellung als Function der Wurzelwerthe λ, wie folgt:

Hauptfall I, II, III: $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu = (\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(0)})(\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(1)}) \ldots$
$\ldots(\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(\mu-1)})(\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(\mu+1)}) \ldots (\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(\nu)})$,

Hauptfall IV: $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu = (\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(0)})(\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(2)}) \ldots$
$\ldots(\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(\mu-2)})(\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(\mu+2)}) \ldots (\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(\nu-1)})$.

In diesen Formeln ist zugleich die Proportionalität der Discriminante von Gleichung (2) mit dem Quadrate der Functionalinvariante des Formensystems φ ausgesprochen.

Zwischen den quadratischen Covarianten der Formen φ bestehen bezüglich für die vier Hauptfälle die folgenden linearen Identitäten:

Tab. II.

Hptf. I: $c^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_\sigma + c^{(1)}(\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_\sigma + \cdots + c^{(\nu)}(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma = 0$,
$\sigma = 0, 2, \ldots \nu - i - 2, \nu - i + 2, \ldots \nu$.

- II: $c^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma + c^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma + \cdots + c^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma = 0$,
$\sigma = 0, 2, \ldots \nu - i - 2, \nu - i + 2, \ldots \nu - 1$.

- III: $c^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma + c^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma + \cdots + c^{(\nu-2)}(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\sigma = 0$,
$\sigma = 1, 3, \ldots \nu - i - 2, \nu - i + 2, \ldots \nu - 1$.

- IV: $c^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma + c^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma + \cdots + c^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma = 0$,
$\sigma = 1, 3, \ldots \nu - i - 2, \nu - i + 2, \ldots \nu$.

Die Constanten $c^{(\mu)}$ sind nichts anderes als die Wurzelwerthe $\lambda^{(\mu)}$ nach ihrer Division mit den bezüglichen in der vorigen Tabelle angegebenen Ueberschiebungen $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu$.

Mit der Herstellung des invarianten Bedingungssystems (Tab. II) ist die Gesammtheit der allgemein gültigen invarianten Relationen des Formensystems $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots \varphi^{(\nu)}$ erschöpft, indem das gleichzeitige Bestehen der bisher gefundenen invarianten Beziehungen für jenes Formensystem hinreicht, damit dasselbe im Sinne der Bedingungsgleichung (1) einer Grundform f vom Grade $n = 2i$ zugehören kann. Wir gewinnen somit das Theorem:

Verschwinden für ein System von $\nu + 1$ Formen ν^{ten} Grades alle ν^{ten} Ueberschiebungen mit Ausnahme der bezüglich in Tab. I angegebenen und existiren ferner $\nu + 1$ resp. $\frac{\nu+1}{2}$ resp. $\frac{\nu}{2} + 1$

Constanten c von der Art, dass zwischen den quadratischen Covarianten der Formen $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots \varphi^{(\nu)}$ bezüglich die linearen Beziehungen in Tab. II stattfinden, dann und nur dann gehört das Formensystem im Sinne der Bedingungsgleichung (1) *einer Grundform f vom Grade $n = 2i$ zu. Die Grundform f und die entsprechenden irrationalen Invarianten $\lambda^{(\mu)}$ derselben erhält man bezüglich aus den Formeln:*

Hauptfall I:

$$f = c^0 (\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_{\nu-i} + c^{(1)} (\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_{\nu-i} + \cdots + c^{(\nu)} (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_{\nu-i};$$
$$\lambda^{(\mu)} = c^{(\mu)} (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu)})_{\nu}.$$

Hauptfall II:

$$f = c^0 (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_{\nu-i} + c^{(2)} (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_{\nu-i} + \cdots + c^{(\nu-1)} (\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_{\nu-i};$$
$$\lambda^{(\mu)} = c^{(\mu)} (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_{\nu}.$$

Hauptfall III:

$$f = c^{(0)} (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_{\nu-i} + c^{(2)} (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_{\nu-i} + \cdots + c^{(\nu-2)} (\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_{\nu-i};$$
$$\lambda^{(\mu)} = c^{(\mu)} (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_{\nu}.$$

Hauptfall IV:

$$f = c^{(0)} (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_{\nu-i} + c^{(2)} (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_{\nu-i} + \cdots + c^{(\nu-1)} (\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_{\nu-i};$$
$$\lambda^{(\mu)} = c^{(\mu)} (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_{\nu}.$$

Nachdem damit die Hauptpunkte des Eingangs bezeichneten Problems erledigt sind, entsteht eine Reihe weiterer Fragen, unter denen die Untersuchung der möglichen Ausartungen des allgemeinen Falles die erste Stelle einnimmt. Der eben betrachtete Fall ist dadurch charakterisirt, dass für ihn die $\nu + 1$ Wurzeln λ, von der paarweisen Gleichheit im vierten Hauptfalle abgesehen, untereinander verschieden ausfallen. Bestehen jedoch zwischen den Invarianten $J_0, J_2, J_3, \ldots J_{\nu+1}$ der Grundform f in Gleichung (2) eine resp. mehrere Relationen, welche die Gleichheit zweier resp. mehrerer Wurzeln λ zur Folge haben, so ist offenbar, dass die Construction des vollständigen Systems $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots \varphi^{(\nu)}$ in obiger Weise nicht durchführbar wird. Schliessen wir vorläufig andere Vorkommnisse und Ausartungen höherer Art aus, so zeigt die eingehendere Untersuchung mittelst Grenzübergang, *dass im Falle einer* $(l + 1)$ *fachen Wurzel* λ *an Stelle der entsprechenden Formen* $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots \varphi^{(l)}$ *gewisse andere Formen* $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots \psi^{(l)}$ *treten, für welche allerdings die aufgestellten Theoreme des allgemeinen Falles im Einzelnen eine modificirte Gestalt annehmen.*

Während der eben skizzirte Ausnahmefall durch die Existenz gewisser Relationen zwischen den rationalen *Invarianten* der Grundform f bedingt war, umfasst eine zweite nicht minder wichtige Gattung von Ausartungen des allgemeinen Falles alle diejenigen Vorkommnisse, in denen es sich um das identische Verschwinden der zur Construction des Systems $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots \varphi^{(\nu)}$ nothwendigen *Covarianten* der Grundform f handelt. Um hier möglichste Vollständigkeit zu erzielen, wird das Studium *der allgemeineren invarianten Bildung:*

$$\Delta\begin{pmatrix} p^{(1)}, & q^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \lambda \\ p^{(l)}, & q^{(l)} & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (-1)^{\nu} q_2^{(l)\nu}, & \ldots & (-1)^{\nu} q_2^{(1)\nu}, & k_0^{0} a_i + \lambda, & \ldots k_{\nu}^{0} a_{i-\nu}, \\ -(-1)\binom{\nu}{1} q_1^{(l)} q_2^{(l)\nu-1}, & \ldots & -(-1)^{\nu}\binom{\nu}{1} q_1^{(1)} q_2^{(1)\nu-1}, & k_0^{1} a_{i+1}, & \ldots k_{\nu}^{1} a_{i-\nu+1}, \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ q_1^{(l)\nu}, & \ldots & q_1^{(1)\nu}, & k_0^{\nu} a_{i+\nu}, & \ldots k_{\nu}^{\nu} a_i + (-1)^{\nu}\lambda. \\ 0, & \ldots & 0, & p_1^{(1)\nu}, & \ldots (-1)^{\nu} p_2^{(1)\nu}, \\ 0, & \ldots & 0, & p_1^{(2)\nu}, & \ldots (-1)^{\nu} p_2^{(2)\nu}, \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ 0, & \ldots & 0, & p_1^{(l)\nu}, & \ldots (-1)^{\nu} p_2^{(l)\nu}, \end{vmatrix}$$

$$= C_0 \lambda^{\nu-l+1} + C_1 \lambda^{\nu-l} + \cdots + C_{\nu-l+1}$$

nothwendig, worin die Entwickelungscoefficienten $C_0, C_1, \ldots C_{\nu-l+1}$ *rationale Covarianten vom Grade* ν *für jede der* $2\,l$ *Variabelnreihen* $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}; q_1^{(1)}, q_2^{(1)}; \ldots p_1^{(l)}, p_2^{(l)}; q_1^{(l)}, q_2^{(l)}$; *dagegen resp. vom Grade* $0, 1, \ldots \nu - l + 1$ *in den Coefficienten der Grundform sind. Es zeigt sich, dass das identische Verschwinden dieser invarianten Bildung nach Einsetzung eines Wurzelwerthes* λ *zur Folge hat, dass dem letzteren nicht eine einzelne Form* φ, *sondern alle Formen einer bestimmten* l*-fach unendlichen linearen Mannigfaltigkeit im Sinne der Bedingungsgleichung* (1) *zugehören. Die Bestimmung dieser Formenmannigfaltigkeit, sowie ihrer Functionalcovariante geschieht wiederum mit Hülfe rationaler Covarianten der Grundform.*

Tritt uns die eben beschriebene Ausartung in ihrer reinsten Form entgegen, so wird jene Wurzel λ nur zu einer $l+1$-fachen

Wurzel der Gleichung (2) und die befriedigende Erledigung dieses Falles bietet keine fernere Schwierigkeit. Fallen jedoch noch weitere Wurzeln der Gleichung (2) mit jenem $l+1$-fachen Wurzelwerthe λ zusammen, *so combiniren sich die beiden vorhin beschriebenen Gattungen von Ausnahmefällen und es entsteht eine grosse Mannigfaltigkeit möglicher Vorkommnisse.* Eine befriedigende und vollständige Discussion derselben erreichen wir mittelst einer Methode, welche der Methode der Elementartheiler in der Theorie der Ausartungen der quadratischen Form ähnlich ist.

Die Begründung der im Vorstehenden ausgesprochenen Behauptungen, sowie eine eingehendere Discussion der speciellen Grundformen 2ten, 4ten, 6ten und 8ten Grades an der Hand der gekennzeichneten Methode behalte ich einer späteren Veröffentlichung vor. Für die bezeichneten Fälle ist die wirkliche Berechnung der in Frage kommenden rationalen Invarianten und Covarianten und ihre Darstellung durch bekannte, übersichtliche invariante Bildungen noch in einfacher Weise möglich nnd führt demgemäss zu bemerkenswerthen Einzelresultaten. An gegenwärtiger Stelle sei nur erwähnt, dass die beiden Fälle $n = 4$, $\nu = 2$ und $n = 4$, $\nu = 3$ schon in der bisherigen Litteratur für die Theorie der biquadratischen Form eine wichtige Rolle spielen, indem der erstere von ihnen zur Theorie der Hermite'schen φ, ψ, χ-Formen[1]) führt und der zweite Fall die Frage nach der Construction der cubischen Formenbüschel von vorgeschriebener Jacobi'scher Covariante zur Erledigung bringt. Ein besonderes Interesse beansprucht noch *der allgemeinere Fall $\nu = i$, weil derselbe die Theorie der Potenzdarstellung und sogenannten Canonisirung binärer Formen geraden Grades in sich begreift.* Das Studium der möglichen Ausartungen dieses Falles führt mit Nothwendigkeit auf die Betrachtung gewisser Grenzformen, unter welchen die von Klein und Gordan untersuchten Formen mit linearen Transformationen in sich eine ausgezeichnete Stelle einnehmen.

Schliesslich verlangt unser Problem noch nach einer anderen Richtung hin die Discussion der Gleichung (2). Da näm-

1) Vgl. Faà di Bruno, Theorie der binären Formen. Deutsch.bearbeitet von Th. Walter. § 20.

lich die Grundform f nur $n-2$ algebraisch von einander unabhängige Invarianten zur Verfügung stellt, so werden bei der Wahl eines genügend grossen ν zwischen den Coefficienten der Gleichung (2) Beziehungen stattfinden, deren Untersuchung Interesse bietet. Zeigt sich dabei die Reducibilität der Gleichung (2), so besitzt die Grundform nothwendig eine Gruppe von weniger als $\nu+1$ rationalen Covarianten vom Grade ν, welche durch die Eigenschaft ausgezeichnet sind, sämmtlich nach ihrer i^{ten} Ueberschiebung über die Grundform in eine lineare Combination ihrer selbst überzugehen. Als Beispiel und Beleg für dieses Vorkommniss diene der Fall der biquadratischen Form: $n=4$, $\nu=4$.

Nach den einleitenden Bemerkungen am Anfange der gegenwärtigen Mittheilung entsprang das vorstehend untersuchte Problem einer weit umfassenderen Idee. Unser Fall $\varkappa=1$ ergab sich aus der letzteren durch naturgemässe Specialisirung, hatte jedoch vorweg die Ausschliessung der Formen ungeraden Grades von der Betrachtung zur Folge. Schon dieser Umstand weist auf die Nothwendigkeit der Untersuchung des weiteren Specialfalles $\varkappa=2$ hin, welcher für die binären Formen ungeraden Grades eine nicht weniger wichtige Rolle spielen wird, wie der oben behandelte Fall $\varkappa=1$ für die Formen geraden Grades.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

INHALT.

Seite

J. Gierster, Ueber die Galois'sche Gruppe der Modulargleichungen für den Transformationsgrad q^n. Vorgelegt von F. Klein 291

G. Morera, Zur Transformation und Theilung der elliptischen Functionen. Vorgelegt von F. Klein 302

W. Dyck, Beiträge zur Analysis situs. I. Mittheilung. Vorgelegt von F. Klein. (Mit 1 lithogr. Tafel.) 314

W. Braune und *H. Stahel*, Ueber das Verhältniss der Lungen, als zu ventilirender Lufträume, zu den Bronchien als luftzuleitenden Röhren. (Mit 1 Holzschnitt.) 326

L. Lange, Ueber das Beharrungsgesetz 333

C. Neumann, Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontal-Ebene unter dem Einfluss der Schwere. (Mit 2 Holzschnitten.) 352

A. Harnack, Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrales 379

J. Thomae, Ueber eine einfache Aufgabe aus der Theorie der Elasticität 399

W. Reichardt, Ein Beitrag zur Theorie der Gleichungen sechsten Grades. Vorgelegt von F. Klein. 419

D. Hilbert, Ueber eine allgemeine Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten für eine binäre Grundform geraden Grades. Vorgelegt von F. Klein. 427

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

NOV 13 1954

HALL USE

CANCELLED

JUN 29 1967

3 2044 092 879 931